Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Тюрин, Специальные лагранжевы слоения многообразия флагов F^3 , *ТМФ*, 2011, том 167, номер 2, 193–205

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6633>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:28:31

© 2011 г.

Н. А. Тюрин^{*†‡}

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЛАГРАНЖЕВЫ СЛОЕНИЯ МНОГООБРАЗИЯ ФЛАГОВ F^3

Предложена конструкция слоения на лагранжевы торы полного многообразия флагов в $\mathbb{C}^3$. В отличие от классического слоения, получаемого из системы Гельфанда–Цейтлина, предлагаемое слоение является специальным лагранжевым.

Ключевые слова: многообразие флагов, лагранжев тор, псевдоторическая структура, специальное лагранжево слоение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Лагранжевы слоения симплектических многообразий важны для нескольких приложений. С точки зрения классической механики, если фазовое пространство системы расслоено на лагранжевы подмногообразия, то движение в системе с гамильтонианом, векторное поле которого параллельно слоению, описывается в терминах слоев, и это имеет место даже в том случае, когда некоторые слои являются особыми.

Один из подходов, принятых в геометрическом квантовании (ГК), реализуется в такой же ситуации: если данное фазовое пространство расслоено на лагранжевы подмногообразия, то выбираются так называемые бор-зоммерфельдовы слои, составляющие дискретное подмножество, и этот набор порождает соответствующее гильбертово пространство. Здесь необходимо отметить, что понятие бор-зоммерфельдова лагранжева подмногообразия остается рабочим для некоторых типов особых лагранжевых слоев. Гомологическая зеркальная симметрия (ГЗС) сегодня включает в себя рассмотрение лагранжевых слоений и выделение в них конечного подмножества слоев, удовлетворяющих некоторому условию в терминах когомологий Фукаи–Флоера. И в этом случае тоже можно попробовать произвести подсчет голоморфных дисков для некоторых особых торов, так что и этот подход к ГЗС может быть продолжен на случай, когда слоения допускают особые слои.

^{*}Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: ntyurin@theor.jinr.ru

[†]Государственный университет – Высшая школа экономики, Москва, Россия

[‡]Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия

Идеальная модельная ситуация для наших рассуждений содержится в торической геометрии [1]. Если мы работаем с симплектическим торическим многообразием, т. е. с фазовым пространством вполне интегрируемой системы, то существует каноническое лагранжево слоение, параметризуемое выпуклым многогранником, что приводит к введению переменных действие–угол и полному решению системы. В то же время методы ГК и ГЗС, упомянутые выше, прекрасно работают в торическом случае. Проблема состоит в том, что множество торических многообразий не столь велико, и существуют другие многообразия, которые не обладают торической структурой по топологическим причинам, но должны быть вовлечены в рассмотрение.

Для компактного симплектического торического многообразия (M, ω) каноническое лагранжево слоение не является вполне регулярным – имеет место размерностная редукция: гладкие лагранжевы торы заполняют полностью не всё M , а только дополнение $M \setminus D$, где D – “симплектический дивизор”, класс гомологий которого двойствен по Пуанкаре антиканоническому классу M . Симплектическое подмногообразие D вещественной коразмерности 2 состоит из некоторого числа неприводимых компонент D_i . Каждая из этих компонент как симплектическое многообразие расслоено на лагранжевы торы, которые являются изотропными торами в M . Общая картина описывается в терминах многогранника моментов P : каждая его грань есть многогранник моментов для соответствующего симплектического торического многообразия вещественной размерности, равной удвоенной размерности грани. С этой точки зрения естественно называть D *граничным дивизором*.

Расширим класс симплектических торических многообразий. В настоящей работе, как и в статьях [2], [3], мы изучаем компактные гладкие симплектические многообразия, допускающие лагранжевы слоения почти такого же типа, что и в торическом случае, но разрешаем наличие особых торов в слоениях. Мы требуем, чтобы общий слой был гладким, а типы разрешенных особенностей исчерпывались следующей моделью. Для гладкого n -мерного тора T^n возьмем произвольное разложение

$$T^n = T^k \times T^{n-k}$$

и применим к T^n такую процедуру: в произвольной точке $p \in T^{n-k}$ слой $T_p^k = T^k \times \{p\}$ сжимается до $(k-1)$ -мерного тора. Обозначим соответствующее преобразование через C_p^k и скажем, что особый тор, разрешенный в наших слоениях, должен иметь вид $C_{p_1}^{k_1} \dots C_{p_l}^{k_l}(T^n)$. Заметим, что этот тип особенностей хорошо известен в классической механике: такие особенности соответствуют сепаратрисам. В то время как гладкий тор в слоении несет на себе траектории типа петель, особый тор несет на себе также прямые и неподвижные точки как решения.

В настоящей статье мы строим лагранжевы слоения описанного выше типа на комплексном многообразии флагов F^3 , являющемся полным флаговым многообразием для $\mathbb{C}^3$. Ниже описывается лагранжево слоение многообразия F^3 с граничным дивизором D , составленным из четырех поверхностей дель Пеццо $\mathbb{CP}_1^2$, и с подсемейством особых торов вещественной размерности 1. Общий слой этого слоения есть гладкий лагранжев тор, а особый слой получается применением преобразования C_p^2 к T^3 . Это не единственное слоение, которое дает наша конструкция, но мы выделяем именно его и называем *минимальным*, так как оно обладает минимальным

подсемейством особых торов. Наша конструкция основана на том, что F^3 обладает *псевдоторической структурой*, представляющей собой некоторое обобщение понятия торической структуры, предложенное в работах [2] и [3]. Всякое псевдоторическое многообразие обладает множеством лагранжевых слоений описанного типа.

На F^n , полном многообразии флагов в $\mathbb{C}^n$, имеется известная система Гельфанда–Цейтлина, вполне интегрируемая, но не являющаяся *эффективной*, поскольку F^n – не торическое многообразие. Образ многообразия F^n при отображении “действия” есть многогранник Гельфанда–Цейтлина. Отличие от торического случая выражается в нарушении размерностной редукции: некоторые грани многогранника Гельфанда–Цейтлина не являются образами комплексных подмножеств в F^n и даже образами некоторых подмножеств правильной размерности в F^n (т. е. размерности, равной удвоенной размерности грани). Например, существуют вершины, прообразы которых не являются точками в F^n (существует вершина максимального вырождения, прообраз которой – лагранжева n -мерная сфера). Таким образом, наша конструкция, в отличие от системы Гельфанда–Цейтлина, предлагает альтернативный путь построения лагранжева слоения на F^3 – мы сохраняем аргументы размерностной редукции, как и в торическом случае, но теряем гладкость слоев. В самом деле, граничный “дивизор” для системы Гельфанда–Цейтлина на многообразии флагов F^3 состоит из шести компонент, двух комплексных и четырех некомплексных, и имеется единственная четырехвалентная вершина (лежащая на пересечении этих четырех компонент) в многограннике Гельфанда–Цейтлина, прообраз которой – лагранжева сфера в F^3 . Граничный дивизор нашего минимального лагранжева слоения состоит из четырех комплексных компонент.

Чем интересны минимальные лагранжевы слоения на F^3 ? Во-первых, они дают новые специальные решения классической механической задачи на F^3 . Например, можно заметить, что некоторая комбинация трех функций λ_j^i из системы Гельфанда–Цейтлина дает две функции f_1, f_2 из нашей конструкции. Это означает, что если взять на F^3 гамильтониан H вида

$$H = \alpha f_1 + \beta f_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

то траектории движения, генерируемого H , могут быть найдены двумя способами: путем рассмотрения слоев лагранжева слоения Гельфанда–Цейтлина, по которым осуществляется движение, или путем рассмотрения минимального лагранжева слоения и изучения движения на нем. Ответ, безусловно, должен быть один и тот же, однако в некоторых вопросах может оказаться более удобным работать с минимальным лагранжевым слоением, например при отыскании минимальных орбит.

Во-вторых, можно применять стандартные методы ГК к многообразию флагов F^3 , снабженному минимальным лагранжевым слоением. Для особого тора, включающегося в это слоение, понятие бор-зоммерфельдова лагранжева цикла остается корректным: сжатый тор обладает стягиваемым в точку подмножеством “виртуальных” периодов, соответствующих образующим в фундаментальной группе, и эти виртуальные периоды должны быть тривиальными относительно любой целочисленной симплектической формы. Следовательно, можно определить множество бор-зоммерфельдовых слоев (относительно антиканонического класса, так как F^3

является многообразием Фано). Можно показать, что это множество является дискретным и конечным, таким образом, гильбертово пространство натягивается, как обычно, на это конечное множество. Преимущество минимального лагранжевого слоения состоит в явной связи между лагранжевым и кэлеровым квантованиями многообразия F^3 : как и в классическом торическом случае имеется версия соответствия Данилова–Хованского между голоморфными сечениями антиканонического класса и лагранжевыми циклами, удовлетворяющими условию Бора–Зоммерфельда относительно антиканонического класса. Необходимо напомнить, что для этих задач существует классический результат [4], решающий проблему ГК в терминах теории представлений.

В-третьих, при изучении *специальных лагранжевых слоений* на многообразиях Фано, введенных недавно в работе [5], если мы исследуем в этой связи многообразие флагов F^3 (или, в более общем случае, многообразие F^n), то слоение Гельфанда–Цейтлина не может обладать свойством специальности и, более того, не может привести к слоению искомого вида. В то же время минимальное лагранжево слоение на F^3 , построенное ниже, является специальным лагранжевым, и этот факт наиболее интересен для нас. Последние рассуждения носят достаточно специальный характер, но все же наша конструкция может в дальнейшем привести к содержательным результатам и в лагранжевой геометрии многообразий Фано.

2. ПСЕВДТОРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИИ ФЛАГОВ F^3

Мы строим большое семейство лагранжевых слоений на F^3 , используя понятие псевдоторической структуры, введенное в работах [2], [3]. Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Многообразие флагов F^3 является псевдоторическим.*

Напомним, псевдоторическая структура на симплектическом многообразии (M, ω_M) вещественной размерности $2n$ задается набором данных $(f_1, \dots, f_k, B, \psi, (Y, \omega_Y))$, где f_i – гладкие морсовские функции в инволюции, ψ определяет семейство симплектических торических многообразий с базисным множеством $B \subset M$, параметризуемое симплектическим торическим многообразием (Y, ω_Y) вещественной размерности $2(n - k)$ так, что

$$\psi: M - B \rightarrow Y$$

есть отображение с общим гладким симплектическим слоем, причем выполнены следующие условия согласования:

1) для каждого $p \in Y$ соответствующий элемент семейства

$$\overline{\psi^{-1}(p)} = \psi^{-1}(p) \cup B$$

сохраняется при гамильтоновом действии каждой из f_i ;

2) для любой гладкой функции $h \in C^\infty(Y, \mathbb{R})$ имеет место тождество

$$\nabla_\psi X_h \wedge X_{\psi^* h} \equiv 0$$

на $M - (B \cup \text{Sing})$, где Sing – множество особенностей особых слоев отображения ψ , ∇_ψ – симплектическая связность, порождаемая ψ , а X_h и $X_{\psi^* h}$ – гамильтоновы векторные поля, определяемые ω_Y и ω_M соответственно.

Иными словами, если имеется торическое действие T^k на M , то мы рассматриваем случай, когда листы этого действия, т. е. семейство (для общего элемента гладких) симплектических торических многообразий с одними и теми же отображениями моментов, параметризуется симплектическим торическим многообразием. Заметим, что второе условие согласованности выполнено автоматически, если и (M, ω_M) , и (Y, ω_Y) являются кэлеровыми многообразиями, ψ – комплексное отображение, а комплексная размерность Y равна единице.

Как было доказано в работе [3], если зафиксировать псевдоторическую структуру $(f_1, \dots, f_k, B, \psi, (Y, \omega_Y))$ на симплектическом многообразии (M, ω_M) , то выбор произвольного набора отображений моментов $(h_1, \dots, h_{n-k})$ на Y задает лагранжево слоение на M .

Теперь мы готовы к доказательству предложения 1. Рассмотрим прямое произведение $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$, зафиксируем однородные координаты $[x_0 : x_1 : x_2]$ и $[y_0 : y_1 : y_2]$ на этих проективных плоскостях и реализуем F^3 как гиперповерхность в $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$, задаваемую уравнением

$$\sum_{i=0}^2 x_i y_i = 0.$$

Рассмотрим отображение

$$\psi: \mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2 - B \rightarrow \mathbb{CP}_w^2,$$

определяемое соотношениями

$$w_i = x_i y_i, \quad i = 0, 1, 2,$$

где $[w_0 : w_1 : w_2]$ – однородные координаты на $\mathbb{CP}_w^2$. Так как при фиксации координат одновременно фиксируется соответствующая метрика Фубини–Штуди, все проективные плоскости снабжаются соответствующими симплектическими формами. Базисное множество B состоит из шести прямых, определяемых условиями

$$x_i = x_j = y_k = 0 \quad \text{или} \quad x_i = y_j = y_k = 0,$$

где i, j, k – различные числа из множества $\{0, 1, 2\}$.

Что является слоями отображения ψ ? Нетрудно видеть, что для произвольной точки $p \in \mathbb{CP}_w^2$ с координатами $[w_0 : w_1 : w_2]$ такими, что $w_i \neq 0$ для всех $i = 0, 1, 2$, компактифицированный слой

$$\overline{\psi^{-1}(p)} = \psi^{-1}(p) \cup B$$

есть поверхность дель Пеццо, изоморфная $\mathbb{CP}_3^2$. Базисное множество B – комплексный шестиугольник в $\mathbb{CP}_3^2$. Такой слой является общим.

Если взять теперь точку $p \in \mathbb{CP}_w^2$ с координатами $[w_0 : w_1 : w_2]$ так, что в точности одна из w_i равна нулю, то соответствующим компактифицированным слоем $\overline{\psi^{-1}(p)}$ будет объединение двух поверхностей дель Пеццо вида $\mathbb{CP}_1^2$, пересекающихся по “диагонали” шестиугольника B . Каждая из этих плоскостей имеет базисный четырехугольник, граница которого составлена из трех сторон шестиугольника B

и прямой пересечения поверхностей. Таким образом, этот компактифицированный слой является особым, и его особое множество есть в точности “диагональная” прямая.

Для точки $p \in \mathbb{CP}_w^2$ с координатами $[w_0 : w_1 : w_2]$, из которых только одна w_i ненулевая, компактифицированный слой снова будет особым. Он состоит из двух $\mathbb{CP}^2$ и двух квадрик. Шестиугольник B делится при этом на два треугольника и два четырехугольника парой пересекающихся диагоналей; треугольники лежат в плоскостях, а четырехугольники – в квадриках.

Топологически каждый слой является торическим, и наша конструкция снабжает каждый слой дивизором из антиканонической системы, который может рассматриваться как симплекс вырождения соответствующего набора отображений моментов (или граничный дивизор). Покажем, что $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$ несет на себе пару отображений моментов, гамильтоново действие которых сохраняет каждый слой, т. е. их ограничения на каждый слой дают вполне интегрируемую систему.

Для плоскости $\mathbb{CP}_x^2$ в прямом произведении рассмотрим вещественную функцию вида

$$f(x) = \frac{\sum_{i=0}^2 \lambda_i^x |x_i|^2}{\sum_{i=0}^2 |x_i|^2},$$

где λ_i^x – попарно различные вещественные числа. Для $\mathbb{CP}_y^2$ функция $f(y)$ получается подстановкой y вместо x в той же формуле. Тогда $f(x), f(y)$ – вещественные морсовские функции на соответствующих $\mathbb{CP}^2$, гамильтоновы действия которых сохраняют кэлеровы структуры. Если обозначить две естественные проекции как

$$q_* : \mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2 \rightarrow \mathbb{CP}_*^2, \quad * = x, y,$$

то функция $F = q_x^* f(x) + q_y^* f(y)$ (где звездочка теперь обозначает подъем) будет вещественной морсовской функцией на прямом произведении, гамильтоново векторное поле которой сохраняет кэлерову структуру на $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$. Нетрудно видеть, что если

$$\lambda_0^x + \lambda_0^y = \lambda_1^x + \lambda_1^y = \lambda_2^x + \lambda_2^y,$$

то гамильтоново векторное поле такой функции F должно сохранять слои отображения ψ . Так как на $\mathbb{CP}^2$ мы имеем в точности две алгебраически независимые почти всюду вещественные морсовские функции такого вида, существуют в точности две алгебраически независимые почти всюду морсовские функции F_1, F_2 , сохраняющие слои. Симплекс вырождения

$$\Delta(F_1, F_2) = \{X_{F_1} \wedge X_{F_2} = 0\} \subset \mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$$

состоит из шестиугольника B и трех его “диагоналей”. Таким образом, согласно общей теории (см. статью [3]) симплекс вырождения есть в точности объединение B и Sing .

Мы утверждаем, что построенные данные $(F_1, F_2, B, \psi, \mathbb{CP}^2)$ задают некоторую псевдоторическую структуру на прямом произведении $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$. Нетрудно показать, что второе условие согласованности выполняется, мы оставляем это рассуж-

дение за рамками настоящей работы. Сейчас наша цель – показать, что F^3 также обладает псевдоторической структурой. Данная псевдоторическая структура получается ограничением данных $(F_1, F_2, B, \psi, \mathbb{CP}^2)$ на слои над прямой $\mathbb{CP}_w^1 \subset \mathbb{CP}_w^2$, задаваемой уравнением

$$w_0 + w_1 + w_2 = 0.$$

Поскольку гамильтоновы векторные поля функций F_1, F_2 касательны F^3 , а образом F^3 при отображении ψ будет в точности прямая $\mathbb{CP}_w^1$, мы имеем набор данных $(f_1, f_2, B, \psi_1, \mathbb{CP}^1)$, где $f_i = F_i|_{F^3}$, $B = B$, так как B лежит в F^3 , $\psi_1 = \psi|_{F^3-B}$. Нетрудно видеть, что набор данных $(f_1, f_2, B, \psi_1, \mathbb{CP}_w^1)$ задает псевдоторическую структуру на F^3 . Предложение доказано.

Прямая $\mathbb{CP}_w^1 = \{w_0 + w_1 + w_2 = 0\} \subset \mathbb{CP}^2$ пересекает три базисные прямые $l_i = \{w_i = 0\}$, $i = 0, 1, 2$, в трех точках, и именно эти точки подлежат особым слоям отображения ψ . Тип особых слоев уже был описан выше: каждый из них есть пара $\mathbb{CP}_1^2$ (поверхностей дель Пеццо степени 8) с особым множеством, представляемым “диагональю”.

Теперь мы готовы описать минимальное лагранжево слоение на F^3 , упомянутое во введении. Зафиксируем гладкую морсовскую функцию на $\mathbb{CP}^1$, имеющую две критические точки $[0 : 1 : -1]$ и $[1 : 0 : -1]$ – максимум и минимум. Тогда граничный дивизор $D \subset F^3$ соответствующего слоения состоит из двух особых слоев, а каждый из них, в свою очередь, состоит из двух поверхностей дель Пеццо $\mathbb{CP}_1^2$. Таким образом, это дает четыре поверхности дель Пеццо, каждая из которых является торической с интегралами, получаемыми ограничением F_1, F_2 на каждую компоненту. Эти интегралы индуцируют каноническое торическое слоение на каждой компоненте. Это показывает, что D обладает слоением на гладкие торы, как обычно в торической геометрии. Рассмотрим теперь, что происходит на $F^3 - D$. Каждый слой $\psi^{-1}(p)$ расслаивается на гладкие двумерные торы путем ограничения функций f_1 и f_2 . Эти торы нумеруются парой регулярных значений функций f_1 и f_2 . Возьмем гладкую линию уровня – петлю γ – функции h на $\mathbb{CP}^1$, не проходящую через точку $[1 : -1 : 0]$. Зафиксируем пару регулярных значений для f_1, f_2 и соберем соответствующие им торы вдоль петли γ : возьмем $\bigcup_{p \in \gamma} T_p^{c_1, c_2}$, где $T_p^{c_1, c_2}$ – тор из слоя над p со значениями c_1, c_2 . Тогда такое объединение даст гладкий трехмерный тор, являющийся лагранжевым в F^3 . Это случай общего слоя.

Когда возникают особые торы? Если γ проходит через особую точку $[1 : -1 : 0]$, то это еще не означает автоматически, что соответствующий тор получится особым. В самом деле, для внутренних точек шестиугольника в $\mathbb{R}^2$, образованных парой значений функций f_1, f_2 , тор в слое над $[1 : -1 : 0]$ будет двумерным или одномерным, если пара значений (c_1, c_2) лежит на диагонали шестиугольника. В общем случае (c_1, c_2) дает двумерный тор, поэтому, собирая торы вдоль γ , мы снова получим гладкий лагранжев тор. Особенность возникает, когда точка (c_1, c_2) попадает на диагональ, поэтому этот отрезок параметризует особые торы, имеющие следующий тип: операция C_p^2 применена к T^3 .

Представленное выше лагранжево слоение F^3 является минимальным в следующем смысле: другой выбор функции h на прямой $\mathbb{CP}^1$, подлежащей ψ_1 , даст другое

слоение с бóльшим множеством особых торов (за исключением случая, когда h удовлетворяет тем же свойствам, т.е. ее минимум и максимум совпадают с какой-то другой парой из трех выделенных точек).

3. УСЛОВИЕ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Напомним, что изначально условие специальности для лагранжевых торов было введено для многообразий Калаби–Яу как условие, “двойственное” условию голоморфности в рамках проблемы ГЗС. В работе [5] это условие обобщается на случай некоторых многообразий Фано: если многообразие Фано X допускает эффективный дивизор в антиканонической системе, $D \subset |-K_X|$, то существует старшая голоморфная форма θ_D на дополнении $X - D$; эта форма имеет полюс в D и не обращается в нуль на $X - D$. Заметим, что эта форма однозначно определяется дивизором D с точностью до $\mathbb{C}^*$.

Так как по определению многообразие Фано X может быть вложено в проективное пространство некоторой степени своей антиканонической системы, можно приписать многообразию X соответствующую симплектическую форму, которая получается как ограничение стандартной симплектической формы на проективном пространстве на образ при вложении X . Таким образом, произвольное многообразие Фано несет некоторую симплектическую структуру с симплектической формой, класс когомологий которой пропорционален антиканоническому классу. Поэтому любое многообразие Фано можно рассматривать как монотонное симплектическое многообразие. Такая симплектическая структура на X может быть названа *канонической* (или антиканонической, если угодно).

Лагранжев тор $S \subset X$ называется *специальным лагранжевым* тором в (X, D) , если мнимая часть $\text{Im } e^{is} \theta_D|_S$ ограничения $\theta_D|_S$ тождественно обращается в нуль после некоторого поворота $e^{is} \in U(1)$. Лагранжево слоение $X - D$ называется *специальным*, если такое условие выполнено для любого слоя с одним и тем же e^{is} .

Простейший пример специального лагранжева слоения можно найти в торической геометрии. В самом деле, каноническое лагранжево слоение торического многообразия X получается в результате размерностного вырождения на дивизоре D_0 из антиканонической системы $|-K_X|$. В этом случае соответствующая старшая голоморфная форма θ_{D_0} имеет замечательно простой вид в координатах действие–угол, откуда следует свойство специальности.

Однако стандартное слоение не является подходящим для разного рода задач, например неудобна для дальнейших построений приводимость граничного дивизора D_0 . В работе [5] была сформулирована проблема построения специального лагранжева слоения для произвольного гладкого элемента антиканонической системы на $\mathbb{CP}^2$. В примере нестандартного специального лагранжева слоения, предложенном в [5], граничный дивизор приводим, поскольку составлен из прямой и коники, однако этот случай является более общим, нежели торический. В то же время эта проблема может быть исследована для любого многообразия Фано с эффективным дивизором в антиканонической системе. Например, мы утверждаем, что многообразие флагов F^3 обладает специальным лагранжевым слоением, а именно минимальное лагранжево слоение, построенное выше, удовлетворяет следующему условию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Минимальное лагранжево слоение на F^3 является специальным лагранжевым.*

В самом деле, граничный дивизор минимального слоения состоит из двух компактифицированных слоев отображения ψ . Антиканоический класс многообразия F^3 как расслоение представляется произведением $q_x^* \mathcal{O}_{\mathbb{CP}_x^2}(2) \otimes q_y^* \mathcal{O}_{\mathbb{CP}_y^2}(2)$ согласно формуле присоединения, в то же время компактифицированные слои отображения ψ являются нулями сечений расслоения $q_x^* \mathcal{O}_{\mathbb{CP}_x^2}(1) \otimes q_y^* \mathcal{O}_{\mathbb{CP}_y^2}(1)$. Таким образом, граничный дивизор минимального слоения лежит в антиканонической системе, и гомологическое условие удовлетворено.

Возьмем теперь граничный дивизор $D \subset F^3$ минимального лагранжева слоения и рассмотрим соответствующую старшую голоморфную форму θ_D на $F^3 - D$. Мы утверждаем, что в $F^3 - D$ существуют три вещественных векторных поля, два глобально и одно локально, которые сохраняют голоморфную форму θ_D . Это означает, что производная Ли формы θ_D относительно любого из трех этих векторных полей равна нулю. Поскольку форма θ_D замкнута, а векторные поля коммутируют между собой, при подстановке этой тройки векторных полей в θ_D получается постоянная функция. Эту тройку векторных полей образуют гамильтоновы векторные поля X_{f_1} , X_{f_2} (определенные глобально на всем F^3) и поднятое векторное поле $\nabla_\psi X_h$, определенное вне объединения особенностей слоев отображения ψ . В самом деле, каждое поле X_{f_i} порождает гамильтонову изотопию многообразия F^3 , которая оставляет неподвижным граничный дивизор D , что влечет тривиальность производной Ли $\mathcal{L}_{X_{f_i}} \theta_D$. С другой стороны, гамильтоново векторное поле X_h на базе псевдоторической структуры порождает некоторое однопараметрическое семейство симплектоморфизмов многообразия F^3 , которые переводят слои отображения ψ в слои и оставляют на месте граничный дивизор. Это означает что производная Ли $\mathcal{L}_{\nabla_\psi(X_h)} \theta_D$ тождественно равна нулю (но на этот раз она определена только вне особенностей отображения ψ).

Рассмотрим теперь произвольный тор $S \subset F^3$ из нашего минимального лагранжева слоения. Обозначим через $S_0 \subset S$ “гладкую” часть, состоящую из гладких точек (в общем случае $S_0 = S$). В произвольной точке $p \in S_0$ касательное пространство $T_p S$ натянуто на X_{f_1} , X_{f_2} , $\nabla_\psi X_h$. В то же время, поскольку $\theta_D(X_{f_1}, X_{f_2}, \nabla_\psi X_h)$ является постоянной комплексной функцией на S_0 , а детерминантное пространство $\det T_p S$ является вещественным и одномерным, ограничение θ_D на S_0 должно быть пропорционально произвольной вещественной старшей форме, не обращающейся в нуль, с коэффициентом пропорциональности $f e^{i\phi}$, где f – вещественная функция, ϕ – константа. Ключевым является тот факт, что эта константа (т.е. аргумент) одна и та же для всех торов $S \subset F^3$ минимального слоения. Это завершает доказательство предложения 2. Здесь мы неявно использовали тот важный факт, что функция h является символом на базе $\mathbb{CP}_w^1$, т.е. ее гамильтоново векторное поле сохраняет комплексную структуру. Поэтому утверждение предложения 2 остается справедливым для любых лагранжевых слоений, индуцируемых символами на базе $\mathbb{CP}_w^1$.

4. ТОРИЧЕСКОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ ФЛАГОВ F^3

Мы могли бы описать псевдоторическую структуру $(f_1, f_2, B, \psi_1, \mathbb{CP}^1)$ на многообразии флагов F^3 без всяких ссылок на его представление гиперповерхностью в прямом произведении $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$, однако вычисления, приведенные выше, оказываются полезными при изучении торического вырождения многообразия F^3 и связей между его каноническим лагранжевым слоением и минимальным лагранжевым слоением F^3 , построенным выше.

Торическое вырождение многообразия F^3 – это деформация многообразия флагов в некоторое особое торическое многообразие. В координатах $\{x_i, y_i\}$ она задается следующим семейством:

$$F_t = \{tx_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 = 0\} \subset \mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2,$$

где t – комплексный параметр. Если $t \neq 0$, то многообразие F_t изоморфно F^3 , в то время как $t = 0$ влечет, что F_0 – особое торическое многообразие. Как торическое многообразие, F_0 обладает каноническим лагранжевым слоением. Наша цель в этом разделе – связать слои лагранжева слоения F^3 , построенного в предыдущем разделе, со слоями этого канонического лагранжева слоения.

Первое наблюдение, ведущее в этом направлении, следующее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Особое торическое многообразие F_0 обладает псевдоторической структурой, и каноническое торическое слоение может быть реализовано путем выбора подходящей функции h на базе $\mathbb{CP}^1$.*

Рассмотрим снова $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$ и псевдоторическую структуру $(F_1, F_2, B, \psi, \mathbb{CP}_w^2)$, представленную выше. Возьмем теперь прямую

$$\mathbb{CP}_0^1 = \{w_1 + w_2 = 0\} \subset \mathbb{CP}_w^2.$$

Очевидно, что гамильтоновы действия функций F_1 и F_2 сохраняют F_0 , поэтому ограничения F_i на F_0 дают набор коммутирующих функций; B является базой семейства, ограничение отображения ψ на F_0 дает отображение в $\mathbb{CP}_0^1$, которое мы обозначим через ψ_0 , и всё вместе дает псевдоторическую структуру на F_0 .

Особые слои отображения ψ_0 суть слои над точками $[1 : 0 : 0]$ и $[0 : 1 : -1]$ в $\mathbb{CP}_0^1$. Теперь мы можем восстановить каноническое лагранжево слоение на F_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Функция h на $\mathbb{CP}_0^1$, имеющая в точности две критические точки, совпадающие с $[1 : 0 : 0]$ и $[0 : 1 : -1]$, порождает каноническое торическое слоение на F_0 .*

Это может быть показано в два приема. Во-первых, очевидно, что стандартное торическое слоение на F_0 может быть построено из некоторого канонического торического слоения на объемлющем многообразии $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$, инвариантном относительно гамильтонова действия функций F_1 и F_2 . Во-вторых, можно показать, что каноническое торическое слоение на прямом произведении $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$ порождается некоторым выбором отображений моментов H_1, H_2 на $\mathbb{CP}_w^2$ в присутствии псевдоторической структуры $(F_1, F_2, B_0, \psi, \mathbb{CP}_w^2)$. Если эти функции H_1, H_2 выбраны диагональными в координатах $[w_0 : w_1 : w_2]$, более того, одна из них, скажем H_1 , постоянна на прямой $l_0 = \{w_0 = 0\}$, то гамильтоново векторное поле H_1 должно быть параллельно прямой $\mathbb{CP}_0^1$, и ограничение H_1 на $\mathbb{CP}_0^1$ будет функцией h .

Единственный существенный момент в этом рассуждении состоит в необходимости показать, что диагональные в координатах $[w_0 : w_1 : w_2]$ функции H_1 и H_2 порождают каноническое торическое слоение на $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$, поэтому мы проверим только этот факт. Для того чтобы это увидеть, заметим, что для такого диагонального выбора функций H_1, H_2 особые слои отображения ψ будут лежать в точности

над симплексом вырождения $\Delta(H_1, H_2)$ функций H_1, H_2 , т.е. над объединением прямых $l_i = \{w_i = 0\} \subset \mathbb{CP}_w^2$. Это означает, что граничный дивизор D соответствующего слоения на $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$ составлен из компонент

$$\overline{\psi^{-1}(l_i)}, \quad i = 0, 1, 2,$$

а это в точности шесть неприводимых компонент вида $q_x^*(l_i^x), q_y^*(l_i^y), i = 0, 1, 2$, где $l_i^* \subset \mathbb{CP}_*^2$ – проективная прямая,

$$l_i^x = \{x_i = 0\}, \quad l_i^y = \{y_i = 0\}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Таким образом, граничный дивизор слоения, порождаемого функциями H_1, H_2 , совпадает с граничным дивизором канонического торического слоения. Поскольку для диагональных функций H_1, H_2 соответствующее слоение имеет только гладкие слои, такое слоение должно быть изоморфно стандартному слоению (получаемому как прямое произведение пары клиффордовых слоений на плоскостях $\mathbb{CP}_x^2, \mathbb{CP}_y^2$).

Как можно сравнить лагранжевы слоения на F_0 и $F^3 = F_1$? Регулярные слои можно связать гамильтоновым преобразованием прямого произведения $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$. Это можно сделать следующим образом. Рассмотрим морсовскую функцию g на $\mathbb{CP}_w^2$ такую, что ее гамильтоново векторное поле за конечное время сдвигает проективную прямую $l_1 = \{w_0 + w_1 + w_2 = 0\}$ в проективную прямую $l_0 = \{w_1 + w_2\}$. Если зафиксировать морсовскую функцию h_1 на проективной прямой l_1 , то она деформируется в морсовскую функцию h_0 на l_0 . В то же время можно определить гамильтонову изотопию всего $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$, порождаемую частичным подъемом g . Так как ψ^*g не определена на базисном множестве $B \subset \mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$ и не является гладкой на множестве особенностей Sing , возьмем две малые вложенные окрестности $B_1 \supset B_2$ достаточно малых радиусов $1 \gg r_1 > r_2 > 0$ вокруг

$$\Delta(F_1, F_2) = B \cup \text{Sing} \subset \mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2.$$

Тогда можно построить гладкую функцию G на всем $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$ по следующим правилам: $G = \psi^*g$ на $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2 - B_1$, $G = 0$ в B_2 , функция G гладко изменяется от ∂B_1 до ∂B_2 . Нетрудно видеть, что гамильтоново действие G на $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$ сдвигает за некоторое конечное время “центральную часть” F_1^c многообразия F_1 в “центральную часть” F_0^c многообразия F_0 , где под “центральной частью” мы понимаем

$$F_i^c = F_i - (F_i \cap B_1), \quad i = 0, 1.$$

Следовательно, имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Каждый гладкий лагранжесв тор в минимальном лагранжесвом слоении на F^3 , построенный в предыдущем разделе, гамильтоново изотопен некоторому гладкому лагранжесву тору из канонического лагранжесва слоения торического вырождения F_0 .*

Для доказательства надо взять r_1 так, что данный тор не пересекает B_1 ; нетрудно видеть, что это возможно. Тогда гамильтонова изотопия, порождаемая G , сдвинет

данный тор в некоторое подмногообразие в F_0 , которое будет расслоено над соответствующей линией уровня функции h_0 . По построению G эта функция коммутирует с F_i везде вне B_1 , и это означает что полученный тор в F_0 лежит на совместном множестве уровней этих функций, а отсюда следует, что он будет лагранжевым в F_0 . Остается заметить, что он порождается псевдоторической структурой по функции h_0 , которая имеет в точности две критические точки, подлежащие в точности особым слоям отображения ψ_0 , поэтому это слой канонического слоения.

Особый тор при переходе к пределу $t \rightarrow 0$ сжимается в изотропный тор в F_0 , лежащий на компоненте граничного дивизора.

Последнее утверждение влечет следующий факт.

СЛЕДСТВИЕ. *Когомологии Флоера $FH(S)$ гладкого слоя $S \subset F^3$ минимального лагранжева слоения совпадают с когомологиями Флоера некоторого слоя канонического лагранжева слоения многообразия F_0 , которое является торическим вырождением многообразия флагов F^3 .*

В самом деле, когомологии Флоера (вне зависимости от того, кто и как их определяет) должны быть стабильными относительно гамильтоновой изотопии, и все данные, используемые для вычислений $FH(S)$ на F_0 могут быть перенесены на F^3 , что должно приводить к тому же самому ответу.

Интересно сравнить результаты данного раздела с результатами работы [6], так как именно эта интересная статья привлекла внимание автора настоящей работы к многообразию флагов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Конструкции, представленные в настоящей работе, приводят к еще одному важному вопросу лагранжевой геометрии комплексных многообразий флагов – к проблеме классификации монотонных лагранжевых торов с точностью до гамильтоновой изотопии. Эта проблема окончательно не решена даже для проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ (см. обсуждение в статье [3]), однако считается достоверным, что в этом случае существуют два типа монотонных лагранжевых торов, первый из которых доставляется торической структурой, в то время как второй, чекановского типа, может быть получен из псевдоторических рассмотрений [7].

В случае многообразия флагов F^3 имеется стандартный монотонный тор, представляемый слоем в слоении Гельфанда–Цейтлина. Однако рассмотрение псевдоторических торов приводит к другим монотонным торам, и естественно ожидать, что, как и в проективном случае, эти новые торы окажутся другими, “нестандартными”.

Благодарности. Я хочу поблагодарить С. Белева, Д. Ору и Д. Орлова за полезные обсуждения и замечания. Особая благодарность Ю. Нохаре, чей доклад на конференции GEOQUANT–2009 (Luxembourg, September 7–11, 2009) дал толчок настоящей работе. Следовательно, я обязан поблагодарить и организаторов этой конференции, в первую очередь М. Шлихенмайера и А. Сергеева, что я делаю с огромным удовольствием. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Лаборатории алгебраической геометрии ГУ-ВШЭ (грант правительства РФ, дог. 11.G34.31.0023), РФФИ (гранты № 08-01-00095, 08-01-00392_а, 10-01-93113) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1987.2008.1).

Список литературы

- [1] M. Audin, *Torus Actions on Symplectic Manifolds*, Progr. Math., **93**, Birkhäuser, Basel, 2004.
- [2] С. А. Белев, Н. А. Тюрин, *Матем. заметки*, **87**:1 (2010), 48–59.
- [3] Н. А. Тюрин, *ТМФ*, **162**:3 (2010), 307–333.
- [4] V. Guillemin, S. Sternberg, *J. Funct. Anal.*, **52**:1 (1983), 106–128.
- [5] D. Auroux, *J. Gökova Geom. Topol.*, **1** (2007), 51–91, arXiv: 0706.3207.
- [6] T. Nishinou, Y. Nohara, K. Ueda, *Adv. Math.*, **224**:2 (2010), 648–706, arXiv: 0810.3470.
- [7] N. A. Tyurin, *Twist tori and pseudotoric structures*, arXiv: 1004.2574.

Поступила в редакцию 1.08.2010