Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Чжи-Цзюнь Цяо, Сянь-Ци Ли, Интегрируемое уравнение с негладкими солитонами, *ТМФ*, 2011, том 167, номер 2, 214–221

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6635>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:22:41

© 2011 г.

Чжи-Цзюнь Цяо*, Сянь-Ци Ли*

ИНТЕГРИРУЕМОЕ УРАВНЕНИЕ С НЕГЛАДКИМИ СОЛИТОНАМИ

Представлены бигамильтонова структура и пара Лакса для уравнения $\rho_t = bu_x + (1/2)[(u^2 - u_x^2)\rho]_x$, где $\rho = u - u_{xx}$, $b = \text{const}$, которые гарантируют его интегрируемость в смысле пары Лакса. Более того, изучены негладкие солитонные решения этого уравнения. Показано, что при исчезающем граничном условии $u \rightarrow 0$ на пространственной и временной бесконечностях это уравнение имеет как решение типа солитон с пиком (пикон) “W/M-формы”, так и решение типа солитон с каспом (каспон).

Ключевые слова: интегрируемое уравнение, пара Лакса, пикон, каспон.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория солитонов и интегрируемые системы играют важную роль при изучении нелинейных волновых уравнений. Они имеют много важных приложений в механике текучих сред, нелинейной оптике, в теориях классических и квантовых полей и т.д. В частности, в последнее время, начиная с момента изучения уравнения Камассы–Холма (КХ) с пиконными решениями [1], много внимания уделялось интегрируемым системам с негладкими солитонами такими, как пиконы и каспоны. Недавно был достигнут большой прогресс в изучении мелких волн [2]–[13].

В настоящей статье мы изучаем бигамильтонову структуру и пару Лакса уравнения

$$\rho_t = bu_x + \frac{1}{2}[(u^2 - u_x^2)\rho]_x, \quad \rho = u - u_{xx}, \quad b = \text{const}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

С подходящим перемасштабированием это уравнение можно считать частным случаем обобщения модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза (мКдФ), которое обсуждалось в работе [14]; оно может быть также выведено с помощью “перегруппировки” гамильтоновых операторов бигамильтоновой структуры модифицированного уравнения КдФ и добавления еще одного линейного члена bu_x [15]. Позже в работе [16] с помощью метода спектральной задачи мы построили уравнение без линейного члена и его пару Лакса, а также впервые предложили солитонные

*Department of Mathematics, The University of Texas-Pan American, Edinburg, USA.
E-mail: qiao@utpa.edu, qiaozjus@yahoo.com

решения “W/M-формы” и новый тип солитонного решения с каспом в явном виде. Это уравнение можно расширить до интегрируемой иерархии с использованием оператора рекурсии и решения ключевого матричного уравнения [17]. Хотя уравнение (1) и уравнение из работы [16] могли бы быть получены из обобщений уравнения мКдФ [14] с помощью некоторых преобразований, они не являются эквивалентными при перемасштабировании и других преобразованиях, так как оба включают в себя нелинейные кубические члены. Этот случай существенным образом отличается от квадратичного уравнения КХ и уравнений из b -семейства [18].

В работе [15] обсуждались условия существования пикона для уравнения (1), но не были приведены явные пиконные и каспонные решения. В настоящей статье мы показываем, что при нулевом граничном условии на пространственной и временной бесконечностях уравнение (1) имеет как пиконные решения “W/M-формы”, так и каспонные решения. Мы приводим графики пиконных и каспонных решений.

2. БИГАМИЛЬНОВА СТРУКТУРА И ПАРА ЛАКСА

2.1. Бигамильтонова структура. Уравнение (1) может быть переписано следующим образом:

$$\rho_t = \left[bu + \frac{1}{2}(u^2 - u_x^2)\rho \right]_x = J \frac{\delta H_1}{\delta \rho} = K \frac{\delta H_2}{\delta \rho}, \quad (2)$$

где

$$J = \partial \rho \partial^{-1} \rho \partial + b \partial, \quad K = \partial - \partial^3, \quad (3)$$

$$H_1 = \int_{\Omega} \rho u \, dx, \quad H_2 = \frac{1}{8} \int_{\Omega} \left(u^4 + 2u^2 u_x^2 - \frac{1}{3} u_x^4 + 4bu^2 \right) dx \quad (4)$$

и $\Omega = (x_0, x_0 + T)$ или $\Omega = (-\infty, +\infty)$, что делает u периодическим по отношению к T или приближающимся к константе на бесконечностях. Очевидно, что J и K являются операторами Гамильтона и, следовательно, H_1 и H_2 – гамильтонианы. Таким образом, уравнение (1) имеет бигамильтонову структуру, в подтверждение чего применяется соотношение $(1 - \partial^2)(\delta H_2 / \delta \rho) = (\delta H_2 / \delta u)$.

2.2. Пара Лакса. Продемонстрируем интегрируемость уравнения (1) в смысле пары Лакса. Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$\psi_x = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{1 - \lambda^2 b}}{2} & \frac{1}{2} \lambda \rho \\ -\frac{1}{2} \lambda \rho & \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 b}}{2} \end{pmatrix} \psi, \quad (5)$$

где λ – спектральный параметр, ρ – периодическая или затухающая на бесконечностях скалярная потенциальная функция и $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ – спектральная функция, соответствующая спектральному параметру λ . Тогда

$$K \nabla \lambda = \lambda^2 J \nabla \lambda, \quad (6)$$

где $\nabla \lambda = \lambda(\psi_1^2 + \psi_2^2)$.

Нетрудно доказать, что уравнение (1) имеет пару Лакса

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_x = U(\rho, \lambda) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_t = V(\rho, u, \lambda) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{1-\lambda^2 b}}{2} & \frac{1}{2}\lambda\rho \\ -\frac{1}{2}\lambda\rho & \frac{\sqrt{1-\lambda^2 b}}{2} \end{pmatrix}, \quad \rho = u - u_{xx},$$

$$V = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^{-2}\sqrt{1-\lambda^2 b} + \frac{\sqrt{1-\lambda^2 b}}{2}(u^2 - u_x^2) & \lambda^{-1}(\sqrt{1-\lambda^2 b}u_x - u_{xx}) - \frac{1}{2}\lambda\rho(u^2 - u_x^2) \\ \lambda^{-1}(\sqrt{1-\lambda^2 b}u_x + u_{xx}) + \frac{1}{2}\lambda\rho(u^2 - u_x^2) & -\lambda^{-2}\sqrt{1-\lambda^2 b} - \frac{\sqrt{1-\lambda^2 b}}{2}(u^2 - u_x^2) \end{pmatrix}.$$

Можно легко удостовериться в том, что уравнение нулевой кривизны

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \quad (9)$$

дает в точности уравнение (1). Следовательно, уравнение (1) является полностью интегрируемым в смысле пары Лакса.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Уравнение (6) играет важную роль при определении конечномерной ограниченной интегрируемой системы [19]. В дальнейшем мы вычислим параметрические решения уравнения (1), следуя идее ограниченности из работы [19].

3. НЕГЛАДКИЕ СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

3.1. Случай бегущей волны. Рассмотрим решение уравнения (1) в виде бегущей волны, полагая в общем случае $u(x, t) = U(x - ct)$, где c – скорость волны. Пусть $\xi = x - ct$, тогда $u(x, t) = U(\xi)$. Подстановка этого выражения в уравнение (1) дает

$$c(U - U'')' + bU' + \frac{1}{2}((U^2 - U'^2)(U - U''))' = 0, \quad (10)$$

где $U' = U_\xi$, $U'' = U_{\xi\xi}$, $U''' = U_{\xi\xi\xi}$.

Интегрируя дважды обе части уравнения (10) и используя условие равенства нулю на бесконечностях, получаем

$$U'^2 = U^2 + 2c \mp 2\sqrt{c^2 - bU^2}, \quad (11)$$

где минус соответствует $c > 0$, а плюс – $c < 0$, так как U затухает на бесконечностях.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Уравнение (11) в случае $c = 0$ не имеет решения в виде бегущей волны, удовлетворяющего нулевым граничным условиям на бесконечностях. Даже в случае отрицательного b уравнение (11) превращается в уравнение $U'^2 = U^2 \mp 2\sqrt{-b}U$, которое, очевидно, не имеет решения, затухающего на бесконечностях.

3.2. Солитоны с пиками “W/M-формы”. Пусть в уравнении (11) $X = \sqrt{c^2 - bU^2}$. Тогда $U^2 = (c^2 - X^2)/b$ и

$$U' = \pm \sqrt{\frac{c^2 - X^2}{b} + 2c \mp 2X}. \quad (12)$$

Подстановка U дает

$$\frac{X dX}{\sqrt{bc^2 - bX^2}} = \pm \sqrt{\frac{c^2 - X^2}{b} + 2c \mp 2X} d\xi, \quad (13)$$

или, эквивалентно,

$$\frac{X dX}{|c - \sigma X| \sqrt{(b + c + \sigma X)^2 - b^2}} = \pm d\xi, \quad \sigma = \pm 1. \quad (14)$$

Рассмотрим теперь случаи $\sigma = 1$ ($c > 0$) и $\sigma = -1$ ($c < 0$).

Случай 1: $\sigma = 1$ ($c > 0$).

1.1. Пусть $b < 0$, $c > 0$. Если $b < 0$, $b \leq -c$ и $c > 0$, то можно удостовериться, что солитонное решение не существует. Однако если $-c < b < 0$ и $c > 0$, то уравнение (14) может быть проинтегрировано:

$$(X + \alpha + \sqrt{(X + \alpha)^2 - b^2}) \left(\frac{X - c}{8c\alpha + (4c + 2b)(X - c) + 4\sqrt{c\alpha}\sqrt{(X + \alpha)^2 - b^2}} \right)^{1/2\theta} = e^{-|\xi|}, \quad (15)$$

где $\theta = \sqrt{\alpha/c}$, $0 < \theta < 1$, и $\alpha = b + c$. В общем случае нельзя получить решение уравнения (15) для X в явном виде, однако это возможно при некоторых специальных значениях θ . Возьмем, например, $\theta = 1/2$. Тогда $b = -3c/4$. При этом условии уравнение (15) преобразуется в

$$X^2 - vX + cv = 0, \quad (16)$$

где

$$v = c \left(\frac{9}{4} e^{-|\xi|} + \frac{9}{16} e^{|\xi|} + \frac{7}{4} \right),$$

или

$$v = \frac{9}{4} \varrho c + 2c \quad \text{при} \quad \varrho = \text{ch} \left(\frac{|\xi|}{2} - \ln 2 \right) - \frac{1}{9}.$$

Решение уравнения (16) дает

$$X = \frac{v - \sqrt{v^2 - 4cv}}{2} = c + \frac{9c}{8} \left(\varrho - \sqrt{\varrho^2 - \frac{64}{81}} \right).$$

Так как $U^2(\xi) = (c^2 - X^2)/b$, получаем

$$U^2(\xi) = c \left(3 + \frac{27}{8} \varrho \right) \left(\varrho - \sqrt{\varrho^2 - \frac{64}{81}} - \frac{4}{3} \right), \quad (17)$$

Рис. 1. Трех- и двумерный графики для солитонного решения с пиками формы “М” с $\theta = 1/2$.

где $\varrho = \text{ch } Y - 1/9$, $Y = |x - ct|/2 - \ln 2$. Если воспользоваться специальным значением $b = -3/4$ ($c = 1$), то решение может быть записано следующим образом:

$$U(\xi) = \pm \sqrt{\frac{1}{8}(7 + 9 \text{ch } Y) \left(3 \text{ch } Y - \frac{1}{3} - \sqrt{(9 \text{ch } Y + 7)(\text{ch } Y - 1)} \right) - \frac{4}{3}}, \quad (18)$$

где $Y = |x - t|/2 - \ln 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На рис. 1 показаны графики решения (18) в случае знака плюс. Это солитонное решение с пиками в “М-форме”. Если выбрать решение (18) в случае знака минус, то получим солитонное решение с пиками в “W-форме”. Показаны три пика при $-2 \ln 2, 0, 2 \ln 2$. Действительно, мы вычислили левые и правые производные в этих трех точках: $U'(-2 \ln 2^-) = \sqrt{2}/2$, $U'(-2 \ln 2^+) = -\sqrt{2}/2$, $U'(0^-) \approx -0.396$, $U'(0^+) \approx 0.396$, $U'(2 \ln 2^-) = \sqrt{2}/2$, $U'(2 \ln 2^+) = -\sqrt{2}/2$.

Если при решении в случае $-c < b < 0$ ($c > 0$) не учитывать абсолютное значение, входящее в изначальное решение, то можно получить еще одно решение

$$U(\xi) = \pm \sqrt{\frac{1}{8}(7 + 9 \text{ch } Y) \left(3 \text{ch } Y - \frac{1}{3} - \sqrt{(9 \text{ch } Y + 7)(\text{ch } Y - 1)} \right) - \frac{4}{3}}, \quad (19)$$

где $Y = (x - ct)/2 = \xi/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Графики для решения (19) в случае знака плюс показаны на рис. 2. Это каспное решение в форме “Λ”, так как $U'(0^+) = -\infty$, $U'(0^-) = \infty$. Если выбрать решение (19) в случае знака минус, то получаем каспное решение в форме “V”.

1.2. Если $b > 0$ и $c > 0$, то уравнение (14) может быть проинтегрировано так же, как и (15), но при $\theta > 1$. В этом случае можно получить неявные пиконные и каспные решения, графики которых могут иметь профили, похожие на изображенные на рис. 1 и 2.

Случай 2: $\sigma = -1$ ($c < 0$). Здесь мы лишь приведем результаты, так как процедура анализа и вычислений такая же, как и в случае 1.

Рис. 2. Трех- и двумерный графики для положительного каспонного решения с $\theta = 1/2$.

2.1. Рассмотрим случай $b > 0$, $c < 0$. Если $b > 0$, $b \geq -c$ и $c < 0$, то можно удостовериться, что солитонное решение не существует. Однако если $0 < b < -c$ и $c < 0$, то уравнение (14) может быть проинтегрировано:

$$(X - \alpha + \sqrt{(X - \alpha)^2 - b^2}) \left(\frac{X + c}{8c\alpha - (4c + 2b)(X + c) + 4\sqrt{c\alpha}\sqrt{(X - \alpha)^2 - b^2}} \right)^{1/2\theta} = e^{-|\xi|}, \quad (20)$$

где $\theta = \sqrt{\alpha/c}$, $0 < \theta < 1$, и $\alpha = b + c$. В общем случае уравнение (20) не может быть решено для X в явном виде, однако при некоторых специальных значениях θ , например $\theta = 1/2$, можно получить его явные решения с помощью процедуры, аналогичной использованной в случае $-c < b < 0$ и $c > 0$ (см. п. 1.1). Явное решение имеет вид (18), но теперь скорость бегущей волны c будет отрицательной, т.е. волна распространяется в обратном направлении.

2.2. Если $b < 0$ и $c < 0$, то уравнение (14) может быть проинтегрировано так же, как и (15), но при $\theta > 1$. В этом случае можно получить неявные пиконные и каспонные решения, графики которых подобны тем, что изображены на рис. 1 и 2.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Следуя идеям, изложенным в работах [16], [20], в настоящей статье мы приводим представление Лакса, бигамильтонову структуру, пиконы “W/M”-формы, а также новые каспоны для уравнения (1). Пиконные решения в “W/M-форме” и каспонные решения даются в явном виде, что подтверждает существование пиконов для уравнения (1) в работе [15]. Рассматривая дифференциальную форму (14), можно предположить, что уравнение (1) может иметь гладкие периодические решения в форме эллиптической функции Якоби, если при этом использовать процедуру пошагового анализа [10], [11].

С другой стороны, мы пытались найти многокаспонные и многопиконные решения уравнения (1), так как оно имеет пару Лакса и бигамильтонову структуру, но вследствие кубической нелинейности уравнения (1) пока не смогли получить ни

билинейную форму Хироты, ни преобразования Дарбу. Многокаспонные и многопиконные решения все еще нуждаются в дальнейшем изучении.

Уравнение (1) имеет физический смысл, как это показано в работе [15]. С другой стороны, мы считаем, что оно может быть выведено из двумерного уравнения Эйлера. В случае бегущей волны с нулевым граничным условием оно превращается в нелинейное уравнение $U'^2 = P(U)$, которое на самом деле является результатом интегрирования уравнения Ньютона для частицы: $U'' = U \pm (bU)/(c^2 - bU^2)$. Здесь $P(U) = U^2 + 2c \mp 2\sqrt{c^2 - bU^2}$ является новой потенциальной функцией (надо взять “−”, если $c > 0$, и “+”, если $c < 0$). Нам удалось решить это уравнение Ньютона и получить новые каспоны и солитоны с пиками “W/M-формы”. Эти решения могут применяться в нейрологии для создания математической модели и объяснения электрофизиологических реакций висцеральных болевых нейронов и повышения чувствительности рефлексов дорсальных корешков [21].

Насколько нам известно, для уравнения (1) все еще не найдены гладкие затухающие солитоны, но оно является полностью интегрируемым. Кроме того, можно рассматривать более общий случай $\rho_t = bu_x + \gamma u_{xxx} + (1/2)[(u^2 - u_x^2)\rho]_x$, $\rho = u - u_{xx}$, где b и γ – константы. Если $\gamma = -b$, оно может превратиться в уравнение, приведенное в работах [16], [20], так как $bu_x + \gamma u_{xxx}$ включается в ρ_t в случае бегущей волны. В общем случае $\gamma \neq -b$ нельзя применять интегрирование для получения явного решения подобно тому, как мы действовали в настоящей статье. Однако можно искать численное решение, основанное на неявной формуле, что выходит за рамки настоящей статьи.

Благодарности. Авторы выражают искреннюю благодарность референтам за ценные замечания, направленные на улучшение статьи. Работа Чжи-Цзюнь Цяо была частично поддержана U.S. Army Research Office (грант № W911NF-08-1-0511) и Texas Norman Hackerman Advanced Research Program (грант № 003599-0001-2009).

Список литературы

- [1] R. Camassa, D.D. Holm, *Phys. Rev. Lett.*, **71**:11 (1993), 1661–1664, arXiv: patt-sol/9305002.
- [2] A. Constantin, W. A. Strauss, *Comm. Pure Appl. Math.*, **53**:5 (2000), 603–610.
- [3] A. Degasperis, M. Procesi, “Asymptotic integrability”, *Symmetry and Perturbation Theory*, eds. A. Degasperis, G. Gaeta, World Sci., River Edge, NJ, 1999, 23–37.
- [4] H. R. Dullin, G. A. Gottwald, D.D. Holm, *Phys. Rev. Lett.*, **87**:19 (2001), 194501, 4 pp.
- [5] R. S. Johnson, *J. Fluid Mech.*, **455**:1 (2002), 63–82.
- [6] Z. Qiao, *Acta Appl. Math.*, **83**:3 (2004), 199–220.
- [7] Z. Qiao, *Comm. Math. Phys.*, **239**:1–2 (2003), 309–341.
- [8] Z. Qiao, S. Li, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **7**:4 (2004), 289–308.
- [9] Z. J. Qiao, G. P. Zhang, *Europhys. Lett.*, **73**:5 (2006), 657–663.
- [10] V. O. Vakhnenko, E. J. Parkes, *Chaos Solitons Fractals*, **20**:5 (2004), 1059–1073.
- [11] V. O. Vakhnenko, E. J. Parkes, *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, **8** (2006), 88–94.
- [12] G. Zhang, Z. Qiao, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **10**:3 (2007), 205–225.
- [13] G. Zhang, Z. Qiao, F. Liu, *Pac. J. Appl. Math.*, **1**:1 (2008), 105–121.
- [14] A. S. Fokas, *Phys. D*, **87**:1–4 (1995), 145–150.
- [15] P. J. Olver, P. Rosenau, *Phys. Rev. E*, **53**:2 (1996), 1900–1906.

- [16] Z. Qiao, *J. Math. Phys.*, **47**:11 (2006), 112701, 9 pp.
- [17] Z. J. Qiao, *Finite-dimensional Integrable System and Nonlinear Evolution Equations*, Chinese National Higher Education Press, Beijing, 2002.
- [18] D. D. Holm, M. F. Staley, *Phys. Lett. A*, **308**:5–6 (2003), 437–444, arXiv: nlin/0203007.
- [19] Z. Qiao, *Rev. Math. Phys.*, **13**:5 (2001), 545–586.
- [20] Z. Qiao, *J. Math. Phys.*, **48**:8 (2007), 082701, 20 pp.
- [21] J. H. Chen, H.-R. Weng, P. M. Dougherty, *Neuroscience*, **126**:3 (2004), 743–751.

Поступила в редакцию 3.06.2009,
после доработки 26.10.2010