Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е-Хуэй Хуан, Сяо-Цзюн Лю, Юй-Цинь Яо, Юнь-Бо Цзэн, Новая расширенная матричная иерархия Кадомцева–Петвиашвили и ее решения, *ТМФ*, 2011, том 167, номер 2, 222–238

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6636>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:05:08

© 2011 г.

Е-Хуэй Хуан*, Сяо-Цзюн Лю[†],
Юй-Цинь Яо[†], Юнь-Бо Цзэн*

НОВАЯ РАСШИРЕННАЯ МАТРИЧНАЯ ИЕРАРХИЯ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ И ЕЕ РЕШЕНИЯ

Исходя из матричной иерархии Кадомцева–Петвиашвили и вводя новый τ_B -поток, получены новая расширенная матричная иерархия Кадомцева–Петвиашвили и ее представление Лакса с учетом симметричного условия для квадрата собственных функций. Новая иерархия содержит два набора времен t_A и τ_B , а также собственные функции и присоединенные собственные функции в качестве компонент. Предложен обобщенный метод одевания для решения расширенной матричной иерархии Кадомцева–Петвиашвили и представлены некоторые решения. Исследованы солитонные решения двух типов $(2+1)$ -мерного уравнения Абловица–Каупа–Ньюэлл–Сегура с самосогласованными источниками и два типа уравнения Дэви–Стюартсона с самосогласованными источниками.

Ключевые слова: расширенная матричная иерархия Кадомцева–Петвиашвили, представление Лакса, обобщенный метод одевания, $(2+1)$ -мерное уравнение Абловица–Каупа–Ньюэлл–Сегура с самосогласованными источниками, уравнение Дэви–Стюартсона с самосогласованными источниками.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обобщения иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП) привлекают значительный интерес как с физической, так и с математической точки зрения [1]–[9]. Один из типов обобщения – так называемая многокомпонентная КП- (мкКП) иерархия, или матричная КП-иерархия [2]–[4], которая содержит много физически актуальных нелинейных интегрируемых систем таких, как $(2+1)$ -мерная иерархия Абловица–Каупа–Ньюэлл–Сегура (АКНС) и уравнение Дэви–Стюартсона (ДС). Расширенное уравнение ДС можно вывести из матричной КП-иерархии [4]. Явные решения матричного КП-уравнения исследовались в работах [10], [11]. Взаимосвязь между $(1+1)$ -мерной C -интегрируемой иерархией Бюргерса и матричной КП-иерархией

*Department of Mathematical Science, Tsinghua University, Beijing, China.
E-mail: huangyh@mails.tsinghua.edu.cn; yzeng@math.tsinghua.edu.cn

[†]Department of Applied Mathematics, China Agricultural University, Beijing, China.
E-mail: tigertooth4@gmail.com; yyqinw@126.com

обсуждалась в работе [12]. Подчиненные связям матричные КП-потoki были получены из матричной КП-иерархии в работе [3]. Другой тип обобщений КП-уравнения – так называемое КП-уравнение с самосогласованными источниками, введенное Мельниковым [5]–[7]. КП-уравнения первого и второго типов с самосогласованными источниками исследовались в работе [5]. КП-уравнение с самосогласованными источниками описывает взаимодействие длинной волны с коротким волновым пакетом, распространяющимися на плоскости x, y под углом друг к другу. Недавно для построения расширенной КП-иерархии был предложен систематический подход, идейно опирающийся на симметричное ограничение квадрата собственной функции [13]. КП-иерархия расширяется за счет того, что содержит два набора времен t_n и τ_k и большее число компонент, задаваемых собственными функциями и присоединенными собственными функциями. Эта расширенная КП-иерархия и ее t_n - и τ_k -редукции предоставляют единообразный способ нахождения двух типов КП-уравнения с самосогласованными источниками и ряда $(1 + 1)$ -мерных солитонных уравнений с самосогласованными источниками. Решения расширенной КП-иерархии и расширенной мКП-иерархии можно получить в рамках обобщенного метода одевания [14].

В настоящей работе мы построим расширение матричной КП-иерархии. В духе подхода, основанного на симметричном условии для квадрата собственной функции в матричной КП-иерархии, мы вводим новый τ_B -поток путем “расширения” определенного t_A -потока матричной КП-иерархии. Расширенная матричная КП-иерархия состоит из t_A -потока, τ_B -потока и t_A -эволюций собственных функций и присоединенных собственных функций. Для расширенной матричной КП-иерархии из коммутативности t_A - и τ_B -потоков и представления Лакса получается представление нулевой кривизны. Расширенная матричная КП-иерархия содержит два набора времен t_A и τ_B и большее число компонент, получаемых добавлением собственных функций и присоединенных собственных функций, и допускает t_A - и τ_B -редукции. Расширенная матричная КП-иерархия и обе ее редукции дают единый способ нахождения двух типов матричной КП-иерархии с самосогласованными источниками и двух типов $(1 + 1)$ -мерной редуцированной матричной КП-иерархии с самосогласованными источниками.

Ограничивая элементы матричной КП-иерархии (2×2) -матрицами, мы в качестве примеров выводим из расширенной матричной КП-иерархии два типа $(2 + 1)$ -мерного уравнения АКНС с самосогласованными источниками и два типа уравнения ДС с самосогласованными источниками. Можно вывести два типа $(1 + 1)$ -мерного уравнения АКНС с самосогласованными источниками для редукции двух типов. Уравнение ДС с самосогласованными источниками также исследовалось в работах [15], [16]. Следует подчеркнуть, что наше уравнение ДС с самосогласованными источниками отличается от такового из работ [15], [16] тем, что они имеют источники различных типов, которые удовлетворяют различным условиям.

Метод одевания представляет собой важный инструмент для решения иерархии Гельфанда–Дикого и КП-иерархии [17]. Однако метод одевания для матричной КП-иерархии нельзя непосредственно применять к расширенной матричной КП-иерархии. Комбинируя метод одевания и метод вариации постоянных, мы предлагаем обобщенный метод одевания для расширенной матричной КП-иерархии. Используя его, мы можем решить полную иерархию расширенной матричной КП-иерархии. В качестве примеров мы решаем $(2 + 1)$ -мерные уравнения АКНС двух типов

с самосогласованными источниками, а также уравнения ДС двух типов с самосогласованными источниками.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 строится расширенная матричная КП-иерархия и выводится ее пара Лакса, а в качестве примеров рассматриваются два типа $(2 + 1)$ -мерного АКНС-уравнения с самосогласованными источниками и уравнение ДС с самосогласованными источниками. В разделе 3 даются t_A - и τ_B -редукции расширенной матричной КП-иерархии. В разделе 4 обсуждается обобщенный метод одевания для расширенной матричной КП-иерархии. В разделе 5 приводятся N -солитонные решения расширенной матричной КП-иерархии. Исследуются солитонные решения $(2 + 1)$ -мерного уравнения АКНС с самосогласованными источниками и уравнения ДС с самосогласованными источниками. Раздел 6 представляет собой заключение.

2. РАСШИРЕННАЯ МАТРИЧНАЯ КП-ИЕРАРХИЯ

Сначала рассмотрим хорошо известную матричную КП-иерархию [3], [4]. Пусть g_0 – конечномерная матричная алгебра; это означает, что элементы из g_0 являются $(N \times N)$ -матрицами. Матричную КП-иерархию можно сформулировать с помощью псевдодифференциального оператора, который называется одевающим [17]:

$$W = 1 + w_1 \partial^{-1} + w_2 \partial^{-2} + \dots, \quad (2.1)$$

где $\partial = \partial/\partial x$, матричнозначные коэффициенты $w_i \in g_0$ являются функциями переменной x , $w = (w_1, w_2, \dots)$ – динамические поля матричной КП-иерархии. Определим

$$\mathcal{A} = \{c_n \partial^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad c_n \in g_0, \quad [c_n, c_m] = 0\}.$$

Для каждого элемента $A \in \mathcal{A}$ эволюция оператора W имеет вид

$$W_{t_A} = -P_{<0}(WAW^{-1})W = -WA + M_A W, \quad (2.2)$$

где

$$M_A = P_{\geq 0}(WAW^{-1}), \quad (2.3)$$

а $P_{\geq 0}(L)$ и $P_{<0}(L)$ обозначают неотрицательную и отрицательную части псевдодифференциального оператора L . Если мы зафиксируем произвольный элемент $C \in \mathcal{A}$ и определим оператор Лакса как

$$L = WCW^{-1}, \quad (2.4)$$

то уравнение Лакса матричной КП-иерархии будет иметь вид

$$L_{t_A} = [M_A, L]. \quad (2.5)$$

Коммутативность потоков ∂_{t_A} и ∂_{t_B} порождает уравнения нулевой кривизны матричной КП-иерархии:

$$M_{A,t_B} - M_{B,t_A} + [M_A, M_B] = 0. \quad (2.6)$$

Известно [3], что эволюция оператора W , задаваемая как

$$W_z = - \sum_{i=1}^N \Phi_i \partial^{-1} \Psi_i^T W, \quad (2.7a)$$

$$\Phi_{i,t_A} = M_A(\Phi_i), \quad (2.76)$$

$$\Psi_{i,t_A} = -M_A^*(\Psi_i), \quad (2.7в)$$

совместна с матричной КП-иерархией (2.5) и редуцирует матричную КП-иерархию к матричной КП-иерархии со связями. Если $M_A = \sum_{i=0}^N u_i \partial^i$, то присоединенный оператор M_A^* определяется как

$$M_A^* = \sum_{i=0}^N (-1)^i \partial^i u_i^T. \quad (2.8)$$

Основываясь на этом наблюдении, введем новый τ_B -поток, задаваемый как

$$W_{\tau_B} = -P_{<0}(WBW^{-1})W + \sum_{i=1}^N \Phi_i \partial^{-1} \Psi_i^T W, \quad (2.9a)$$

$$\Phi_{i,t_A} = M_A(\Phi_i), \quad (2.9б)$$

$$\Psi_{i,t_A} = -M_A^*(\Psi_i). \quad (2.9в)$$

Можно доказать следующие леммы.

ЛЕММА 1. *Выполняется соотношение*

$$P_{<0}[M_A, \Phi \partial^{-1} \Psi^T] = M_A(\Phi) \partial^{-1} \Psi^T - \Phi \partial^{-1} (M_A^*(\Psi))^T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности рассмотрим моном $Q = u \partial^k$, $u \in g_0$. Используя формулу (2.8), получаем

$$\begin{aligned} P_{<0}(\partial^{-1} \Psi^T Q) &= P_{<0}(\partial^{-1} \Psi^T u \partial^k) = \\ &= P_{<0}(\partial^{-1} \partial \Psi^T u \partial^{k-1} - \partial^{-1} \partial (\Psi^T u) \partial^{k-1}) = \\ &= -P_{<0}(\partial^{-1} \partial (\Psi^T u) \partial^{k-1}) = \dots = \\ &= (-1)^k \partial^{-1} (\Psi^T u)^{(k)} = (-1)^k \partial^{-1} ((u^T \Psi)^{(k)})^T = \\ &= \partial^{-1} (Q^*(\Psi))^T. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_{<0}[M_A, \Phi \partial^{-1} \Psi^T] &= P_{<0}(M_A \Phi \partial^{-1} \Psi^T) - P_{<0}(\Phi \partial^{-1} \Psi^T M_A) = \\ &= M_A(\Phi) \partial^{-1} \Psi^T - \Phi \partial^{-1} (M_A^*(\Psi))^T. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Более того, находим, что

$$\begin{aligned} L_{\tau_B} &= W_{\tau_B} C W^{-1} - W C W^{-1} W_{\tau_B} W^{-1} = \\ &= M_B L - L M_B + \Phi \partial^{-1} \Psi^T L - L \Phi \partial^{-1} \Psi^T = \\ &= [M_B + \Phi \partial^{-1} \Psi^T, L]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

ЛЕММА 2. *Задаваемый формулами (2.9) и (2.10) τ_B -поток является совместным с матричной КП-иерархией (2.5), а именно $(W_{t_A})_{\tau_B} = (W_{\tau_B})_{t_A}$ и $(L_{t_A})_{\tau_B} = (L_{\tau_B})_{t_A}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства опустим знак суммы. Замечая, что $W_{\tau_B} = W_{t_B} + \Phi \partial^{-1} \Psi^T W$, получаем

$$\begin{aligned} (W_{\tau_B})_{t_A} &= (W_{t_B})_{t_A} + (M_A(\Phi) \partial^{-1} \Psi^T - \Phi \partial^{-1} (M_A^*(\Psi))^T - \Phi \partial^{-1} \Psi^T P_{<0}(W A W^{-1})) W, \\ (W_{t_A})_{\tau_B} &= -P_{<0}(W_{t_B} A W^{-1} + \Phi \partial^{-1} \Psi^T W A W^{-1} - W A W^{-1} W_{t_B} W^{-1} - \\ &\quad - W A W^{-1} \Phi \partial^{-1} \Psi^T) W - P_{<0}(W A W^{-1}) W_{t_B} - P_{<0}(W A W^{-1}) \Phi \partial^{-1} \Psi^T W, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} (W_{\tau_B})_{t_A} - (W_{t_A})_{\tau_B} &= (W_{t_B})_{t_A} - (W_{t_A})_{t_B} + (M_A(\Phi) \partial^{-1} \Psi^T - \Phi \partial^{-1} (M_A^*(\Psi))^T - \\ &\quad - [\Phi \partial^{-1} \Psi^T, P_{<0}(W A W^{-1})] + P_{<0}([\Phi \partial^{-1} \Psi^T, W A W^{-1}])) W. \end{aligned}$$

Используя лемму 1, находим, что

$$\begin{aligned} P_{<0}([\Phi \partial^{-1} \Psi^T, W A W^{-1}]) &= P_{<0}(\Phi \partial^{-1} \Psi^T M_A + \Phi \partial^{-1} \Psi^T P_{<0}(W A W^{-1}) - \\ &\quad - M_A \Phi \partial^{-1} \Psi^T - P_{<0}(W A W^{-1}) \Phi \partial^{-1} \Psi^T) = [\Phi \partial^{-1} \Psi^T, P_{<0}(W A W^{-1})] + \\ &\quad + \Phi \partial^{-1} (M_A^*(\Psi))^T - M_A(\Phi) \partial^{-1} \Psi^T, \end{aligned}$$

откуда $(W_{\tau_B})_{t_A} - (W_{t_A})_{\tau_B} = 0$. Поскольку $(L_{t_A})_{\tau_B} = ((W C W^{-1})_{t_A})_{\tau_B}$, $(L_{\tau_B})_{t_A} = ((W C W^{-1})_{\tau_B})_{t_A}$, из $(W_{t_A})_{\tau_B} = (W_{\tau_B})_{t_A}$ получаем $(L_{t_A})_{\tau_B} = (L_{\tau_B})_{t_A}$. Лемма доказана.

Коммутативность t_A - и τ_B -потоков позволяет получить новую расширенную матричную КП-иерархию:

$$\partial_{t_A} L = [M_A, L], \quad (2.11a)$$

$$\partial_{\tau_B} L = \left[M_B + \sum_{i=1}^N \Phi_i \partial^{-1} \Psi_i^T, L \right], \quad (2.11б)$$

$$\Phi_{i,t_A} = M_A(\Phi_i), \quad (2.11в)$$

$$\Psi_{i,t_A} = -M_A^*(\Psi_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.11г)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Коммутативность потоков (2.11a) и (2.11б) при условиях (2.11в) и (2.11г) порождает уравнение нулевой кривизны для расширенной матричной КП-иерархии (2.11):

$$M_{A,\tau_B} - \left(M_B + \sum_{i=1}^N \Phi_i \partial^{-1} \Psi_i^T \right)_{t_A} + \left[M_A, M_B + \sum_{i=1}^N \Phi_i \partial^{-1} \Psi_i^T \right] = 0, \quad (2.12a)$$

$$\Phi_{i,t_A} = M_A(\Phi_i), \quad (2.12б)$$

$$\Psi_{i,t_A} = -M_A^*(\Psi_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.12в)$$

или, эквивалентно,

$$M_{A,\tau_B} - M_{B,t_A} + [M_A, M_B] - \sum_{i=1}^N P_{\geq 0}([\Phi_i \partial^{-1} \Psi_i^T, M_A]) = 0, \quad (2.13a)$$

$$\Phi_{i,t_A} = M_A(\Phi_i), \quad (2.136)$$

$$\Psi_{i,t_A} = -M_A^*(\Psi_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.137)$$

причем представление Лакса задается как

$$\psi_{t_A} = M_A(\psi), \quad (2.14a)$$

$$\psi_{\tau_B} = \left(M_B + \sum_{i=1}^N \Phi_i \partial^{-1} \Psi_i^T \right) (\psi). \quad (2.146)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коммутативность потоков (2.11a) и (2.116) при условиях (2.11b) и (2.11r) немедленно дает (2.12). Теперь докажем (2.13). Используя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} -(\Phi \partial^{-1} \Psi^T)_{t_A} + [M_A, \Phi \partial^{-1} \Psi^T] &= -M_A(\Phi) \partial^{-1} \Psi^T + \Phi \partial^{-1} M_A^*(\Psi)^T + [M_A, \Phi \partial^{-1} \Psi^T] = \\ &= -P_{<0}[M_A, \Phi \partial^{-1} \Psi^T] + [M_A, \Phi \partial^{-1} \Psi^T] = \\ &= P_{\geq 0}[M_A, \Phi \partial^{-1} \Psi^T]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Расширенная матричная КП-иерархия обобщает матричную КП-иерархию в том отношении, что содержит два набора времен t_A и τ_B и большее число компонент Φ_i и Ψ_i , $i = 1, \dots, N$.

В дальнейшем мы ограничим w_i матрицами 2×2 и рассмотрим расширенную матричную КП-иерархию при $A = \sigma_3 \partial$, $B = \sigma_3 \partial^2$ и $C = \sigma_3 \partial$, где $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Соответствующие времена суть $t_A = y$ и $t_B = t$. Введем

$$U = \begin{pmatrix} 0 & r \\ q & 0 \end{pmatrix} = [\omega_1, \sigma_3] = -2\sigma_3 \omega_1^{\text{off}}, \quad D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = -2\omega_1^{\text{diag}}.$$

Уравнение нулевой кривизны (2.6) приводит к эволюционному уравнению

$$U_t = \frac{1}{2} \sigma_3 (U_{xx} + U_{yy}) + \sigma_3 U^3 + [D_y, U], \quad (2.16a)$$

$$\sigma_3 D_y - D_x + U^2 = 0, \quad (2.166)$$

или

$$r_t = \frac{1}{2} (r_{xx} + r_{yy}) + r^2 q + (a_y - b_y) r, \quad a_y - a_x + r q = 0, \quad (2.17a)$$

$$q_t = -\frac{1}{2} (q_{xx} + q_{yy}) - q^2 r - (a_y - b_y) q, \quad b_y + b_x - r q = 0. \quad (2.176)$$

Поскольку $a_x - a_y = b_y + b_x$, можно положить $a + b = \phi_x$, $a - b = \phi_y$, откуда $\phi_{xx} - \phi_{yy} = 2rq$. Обозначая $v = \phi_y$, имеем

$$r_t = \frac{1}{2} (r_{xx} + r_{yy}) + r^2 q + v_y r, \quad (2.18a)$$

$$q_t = -\frac{1}{2} (q_{xx} + q_{yy}) - q^2 r - v_y q, \quad (2.186)$$

$$v_{xx} - v_{yy} = 2(rq)_y, \quad (2.18b)$$

что представляет собой $(2+1)$ -мерное уравнение АКНС [3]. Если заменить U_t на iU_t и считать, что $q = \bar{r}$, $\phi = \bar{\phi}$, то приведенная выше система редуцируется к уравнению Дэви–Стюартсона I (ДСI):

$$ir_t = \frac{1}{2}(r_{xx} + r_{yy}) + |r|^2 r + v_y r, \quad v_{xx} - v_{yy} = 2(|r|^2)_y. \quad (2.19)$$

Теперь выведем из (2.13) $(2+1)$ -мерное уравнение АКНС с самосогласованными источниками и уравнение ДС с самосогласованными источниками.

ПРИМЕР 1. Если взять $t_A = y$ и $\tau_B = t$, то из (2.13) получим $(2+1)$ -мерное уравнение АКНС первого типа с самосогласованными источниками:

$$U_t = \frac{1}{2}\sigma_3(U_{xx} + U_{yy}) + \sigma_3 U^3 + [D_y, U] + \left[\sum_{i=1}^N \Phi_i \Psi_i^T, \sigma_3 \right], \quad (2.20a)$$

$$\sigma_3 D_y - D_x + U^2 = 0, \quad (2.20б)$$

$$\Phi_{i,y} = \sigma_3 \Phi_{i,x} + U \Phi_i, \quad (2.20в)$$

$$\Psi_{i,y} = \sigma_3 \Psi_{i,x} - U^T \Psi_i, \quad (2.20г)$$

что можно также переписать как

$$r_t = \frac{1}{2}(r_{xx} + r_{yy}) + r^2 q + v_y r - \sum_{i=1}^N (2(\phi_{i11} \psi_{i21} + \phi_{i12} \psi_{i22})), \quad (2.21a)$$

$$q_t = -\frac{1}{2}(q_{xx} + q_{yy}) - q^2 r - v_y q + \sum_{i=1}^N (2(\phi_{i21} \psi_{i11} + \phi_{i22} \psi_{i12})), \quad (2.21б)$$

$$v_{xx} - v_{yy} = 2(rq)_y, \quad (2.21в)$$

$$\Phi_{i,y} = \sigma_3 \Phi_{i,x} + U \Phi_i, \quad (2.21г)$$

$$\Psi_{i,y} = \sigma_3 \Psi_{i,x} - U^T \Psi_i. \quad (2.21д)$$

Здесь и далее

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \phi_{i11} & \phi_{i12} \\ \phi_{i21} & \phi_{i22} \end{pmatrix}, \quad \Psi_i = \begin{pmatrix} \psi_{i11} & \psi_{i12} \\ \psi_{i21} & \psi_{i22} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N,$$

являются (2×2) -матрицами.

Представление Лакса имеет вид

$$\psi_y = (\sigma_3 \partial + U) \psi, \quad (2.22a)$$

$$\psi_t = \left(\sigma_3 \partial^2 + U \partial + \frac{1}{2} U_x + \frac{1}{2} \sigma_3 U^2 + \frac{1}{2} \sigma_3 U_y + D_y + \sum_{i=1}^N \Phi_i \partial^{-1} \Psi_i^T \right) \psi. \quad (2.22б)$$

ПРИМЕР 2. Взяв $\tau_A = y$ и $t_B = t$, получим из (2.13) $(2+1)$ -мерное уравнение АКНС второго типа с самосогласованными источниками:

$$U_t = \frac{1}{2}\sigma_3(U_{xx} + U_{yy}) + \sigma_3 U^3 + [D_y, U] - \sum_{i=1}^N ([U, (\Phi_i \Psi_i^T)^{\text{diag}}] + 2\sigma_3 (\Phi_{i,x} \Psi_i^T)^{\text{off}}), \quad (2.23a)$$

$$(\sigma_3 D_y - D_x + U^2)_y - \sum_{i=1}^N ([U, (\Phi_i \Psi_i^T)^{\text{off}}] + 2\sigma_3 (\Phi_i \Psi_i^T)_x^{\text{diag}}) = 0, \quad (2.23б)$$

$$\Phi_{i,t} = \sigma_3 \Phi_{i,xx} + U \Phi_{i,x} + \frac{1}{2}(U_x + \sigma_3 U^2 + \sigma_3 U_y + D_y) \Phi_i, \quad (2.23в)$$

$$\Psi_{i,t} = -\sigma_3 \Psi_{i,xx} + U^T \Psi_{i,x} - \frac{1}{2}(U_x + \sigma_3 U^2 + \sigma_3 U_y + D_y)^T \Psi_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.23г)$$

или

$$\begin{aligned} r_t = & \frac{1}{2}(r_{xx} + r_{yy}) + r^2 q + v_y r + \\ & + \sum_{i=1}^N (r(\phi_{i11} \psi_{i11} + \phi_{i12} \psi_{i12} - \phi_{i21} \psi_{i21} - \phi_{i22} \psi_{i22}) - \\ & - 2(\phi_{i11,x} \psi_{i21} + \phi_{i12,x} \psi_{i22})), \end{aligned} \quad (2.24а)$$

$$\begin{aligned} q_t = & -\frac{1}{2}(q_{xx} + q_{yy}) - q^2 r - v_y q - \\ & - \sum_{i=1}^N (q(\phi_{i11} \psi_{i11} + \phi_{i12} \psi_{i12} - \phi_{i21} \psi_{i21} - \phi_{i22} \psi_{i22}) - \\ & - 2(\phi_{i21,x} \psi_{i11} + \phi_{i22,x} \psi_{i12})), \end{aligned} \quad (2.24б)$$

$$\begin{aligned} v_{yy} - v_{xx} = & 2 \left(\sum_{i=1}^N (r(\phi_{i21} \psi_{i11} + \phi_{i22} \psi_{i12} - q(\phi_{i11} \psi_{i21} + \phi_{i12} \psi_{i22}) + \right. \\ & \left. + 2(\phi_{i11} \psi_{i11} + \phi_{i12} \psi_{i12})_x) \right), \end{aligned} \quad (2.24в)$$

$$\Phi_{i,t} = \sigma_3 \Phi_{i,xx} + U \Phi_{i,x} + \frac{1}{2}(U_x + \sigma_3 U^2 + \sigma_3 U_y + D_y) \Phi_i, \quad (2.24г)$$

$$\Psi_{i,t} = -\sigma_3 \Psi_{i,xx} + U^T \Psi_{i,x} - \frac{1}{2}(U_x + \sigma_3 U^2 + \sigma_3 U_y + D_y)^T \Psi_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.24д)$$

Представление Лакса имеет вид

$$\psi_y = \left(\sigma_3 \partial + U + \sum_{i=1}^N \Phi_i \partial^{-1} \Psi_i^T \right) \psi, \quad (2.25а)$$

$$\psi_t = \left(\sigma_3 \partial^2 + U \partial + \frac{1}{2} U_x + \frac{1}{2} \sigma_3 U^2 + \frac{1}{2} \sigma_3 U_y + D_y \right) \psi. \quad (2.25б)$$

ПРИМЕР 3. Определим $\tilde{U} = \begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix}$. Тогда уравнение ДСИ первого типа с самосогласованными источниками имеет вид

$$ir_t = \frac{1}{2}(r_{xx} + r_{yy}) + |r|^2 r + v_y r - 2 \sum_{j=1}^N (\phi_{j11} \psi_{j21} + \phi_{j12} \psi_{j22}), \quad (2.26а)$$

$$v_{xx} - v_{yy} = 2(|r|^2)_y, \quad (2.26б)$$

$$\Phi_{j,y} = \sigma_3 \Phi_{j,x} + \tilde{U} \Phi_j, \quad (2.26в)$$

$$\Psi_{j,y} = \sigma_3 \Psi_{j,x} - \tilde{U}^T \Psi_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.26г)$$

Его представление Лакса есть

$$\psi_y = (\sigma_3 \partial + \tilde{U})\psi, \quad (2.27a)$$

$$\psi_t = -i \left(\sigma_3 \partial^2 + \tilde{U} \partial + \frac{1}{2} \tilde{U}_x + \frac{1}{2} \sigma_3 \tilde{U}^2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \tilde{U}_y + D_y + \sum_{j=1}^N \Phi_j \partial^{-1} \Psi_j^T \right) \psi. \quad (2.27b)$$

ПРИМЕР 4. Уравнение ДСИ второго типа с самосогласованными источниками имеет вид

$$\begin{aligned} ir_t = & \frac{1}{2}(r_{xx} + r_{yy}) + |r|^2 r + v_y r + \\ & + \sum_{j=1}^N (r(\phi_{j11}\psi_{j11} + \phi_{j12}\psi_{j12} - \phi_{j21}\psi_{j21} - \phi_{j22}\psi_{j22}) - \\ & - 2(\phi_{j11,x}\psi_{j21} + \phi_{j12,x}\psi_{j22})), \end{aligned} \quad (2.28a)$$

$$\begin{aligned} v_{yy} - v_{xx} = & 2 \left(\sum_{j=1}^N (r(\phi_{j21}\psi_{j11} + \phi_{j22}\psi_{j12} - \bar{r}(\phi_{j11}\psi_{j21} + \phi_{j12}\psi_{j22}) + \right. \\ & \left. + 2(\phi_{j11}\psi_{j11} + \phi_{j12}\psi_{j12})) \right), \end{aligned} \quad (2.28b)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{j,t} = & \sigma_3 \Phi_{j,xx} + \tilde{U} \Phi_{j,x} + \\ & + \frac{1}{2}(\tilde{U}_x + \sigma_3 \tilde{U}^2 + \sigma_3 \tilde{U}_y + D_y) \Phi_j, \end{aligned} \quad (2.28b)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{j,t} = & -\sigma_3 \Psi_{j,xx} + \tilde{U}^T \Psi_{j,x} - \\ & - \frac{1}{2}(\tilde{U}_x + \sigma_3 \tilde{U}^2 + \sigma_3 \tilde{U}_y + D_y)^T \Psi_j, \quad j = 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (2.28g)$$

его представление Лакса есть

$$\psi_y = \left(\sigma_3 \partial + \tilde{U} + \sum_{j=1}^N \Phi_j \partial^{-1} \Psi_j^T \right) \psi, \quad (2.29a)$$

$$\psi_t = -i \left(\sigma_3 \partial^2 + \tilde{U} \partial + \frac{1}{2} \tilde{U}_x + \frac{1}{2} \sigma_3 \tilde{U}^2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \tilde{U}_y + D_y \right) \psi. \quad (2.29b)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Расширенная матричная КП-иерархия (2.11) предоставляет единообразный подход к построению $(2+1)$ -мерных уравнений АХНС (и уравнений ДСИ) первого и второго типов с самосогласованными источниками и их представлений Лакса.

3. РЕДУКЦИИ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЧНОЙ КП-ИЕРАРХИИ

Расширенная КП-иерархия зависит от двух наборов времен t_A и τ_B . Естественно рассмотреть ее t_A - и τ_B -редукции.

3.1. t_A -Редукция. t_A -Редукция расширенной матричной КП-иерархии имеет вид

$$WAW^{-1} = M_A, \quad (3.1)$$

где $A = C_k \partial^k$. Волновая функция и присоединенная волновая функция равны

$$\Phi(t, z) = W e^{\xi(t, z)}, \quad \Phi^*(t, z) = (W^*)^{-1} e^{-\xi(t, z)}, \quad (3.2)$$

где $\xi(t, z) = \sum_{i>0} t_i z^i$, $t_1 = x$. Тогда

$$M_A(\Phi) = W A W^{-1} \Phi = z^k \Phi C_k, \quad (3.3)$$

$$M_A^*(\Phi^*) = (W A W^{-1})^* \Phi^* = -z^k \Phi^* C_k, \quad (3.4)$$

$$L_{t_A} = [M_A, L] = [W A W^{-1}, W C W^{-1}] = W[A, C]W^{-1} = 0, \quad (3.5)$$

поэтому L не зависит от t_A и, следовательно, зависимость от t_A в формулах (2.12) можно опустить:

$$(M_A)_{\tau_B} = \left[M_B + \sum_{i=1}^N \Phi_i \partial^{-1} \Psi_i^T, M_A \right], \quad (3.6a)$$

$$M_A(\Phi_i) = \lambda_i^k \Phi_i C_k, \quad (3.6b)$$

$$M_A^*(\Psi_i) = \lambda_i^k \Psi_i C_k. \quad (3.6v)$$

При $A = \sigma_3 \partial$ и $B = \sigma_3 \partial^2$ имеем $M_A(\Phi_i) = W A W^{-1}(\Phi_i) = \lambda_i \Phi_i \sigma_3$. Тогда $(2+1)$ -мерное уравнение АКНС первого типа с самосогласованными источниками редуцируется к $(1+1)$ -мерному уравнению АКНС первого типа с самосогласованными источниками:

$$U_t = \frac{1}{2} \sigma_3 U_{xx} + \sigma_3 U^3 + \left[\sum_{i=1}^N \Phi_i \Psi_i^T, \sigma_3 \right], \quad (3.7a)$$

$$U^2 = D_x, \quad (3.7b)$$

$$\sigma_3 \Phi_{i,x} + U \Phi_i = \lambda_i \Phi_i \sigma_3, \quad (3.7b)$$

$$\sigma_3 \Psi_{i,x} - U^T \Psi_i = \lambda_i \Psi_i \sigma_3. \quad (3.7g)$$

3.2. τ_B -Редукция. τ_B -Редукция имеет вид [3]

$$W B W^{-1} = M_B + \sum_{i=1}^N \Phi_i \partial^{-1} \Psi_i^T, \quad (3.8)$$

при этом в формулах (2.12) можно опустить зависимость от τ_B :

$$\left(M_B + \sum_{i=1}^N \Phi_i \partial^{-1} \Psi_i^T \right)_{t_A} = \left[M_A, M_B + \sum_{i=1}^N \Phi_i \partial^{-1} \Psi_i^T \right], \quad (3.9a)$$

$$\Phi_{i,t_A} = M_A(\Phi_i), \quad (3.9b)$$

$$\Psi_{i,t_A} = -M_A^*(\Psi_i), \quad (3.9v)$$

что дает в точности матричную КП-иерархию со связями, приведенную в работе [3].

При $B = \sigma_3 \partial$ и $A = \sigma_3 \partial^2$ получаем $(2+1)$ -мерное уравнение АКНС, или уравнение АКНС второго типа со связями и самосогласованными источниками:

$$U_t = \frac{1}{2} \sigma_3 U_{xx} + \sigma_3 U^3 + \left[\sum_{j=1}^m (\Phi_j \Psi_j^T)^{\text{diag}}, U \right] + \sigma_3 \sum_{j=1}^m (\Phi_{jx} \Psi_j^T - \Phi_j \Psi_{jx}^T)^{\text{off}}, \quad (3.10a)$$

$$\Phi_{it} = \sigma_3 \Phi_{ixx} + U \Phi_{ix} + \frac{1}{2} U_x \Phi_i + \frac{1}{2} \sigma_3 U^2 \Phi_i + \sum_{j=1}^m \Phi_j \Psi_j^T \Phi_i + \sum_{j=1}^m (\Phi_j \Psi_j^T)^{\text{diag}} \Phi_i, \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{it} = & -\sigma_3 \Psi_{ixx} + U^T \Psi_{ix} + \frac{1}{2} U_x^T \Psi_i - \frac{1}{2} \sigma_3 U^2 \Psi_i - \\ & - \sum_{j=1}^m \Psi_j \Phi_j^T \Psi_i - \sum_{j=1}^m (\Psi_j \Phi_j^T)^{\text{diag}} \Psi_i. \end{aligned} \quad (3.107)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Расширенная матричная КП-иерархия и ее t_A - и τ_B -редукции дают простой и единообразный способ получения двух типов $(2+1)$ - и $(1+1)$ -мерных уравнений АКС с самосогласованными источниками.

4. ОБОБЩЕННЫЙ ОДЕВАЮЩИЙ ПОДХОД К РАСШИРЕННОЙ МАТРИЧНОЙ КП-ИЕРАРХИИ

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда g_0 – алгебра матриц размера 2×2 . Мы предлагаем обобщенный одевающий подход к расширенной матричной КП-иерархии. Для одетого оператора L вида (2.4)

$$L = WCW^{-1}, \quad (4.1)$$

W обычно имеет конечные члены, так что эквивалентным образом можно считать оператор W чисто дифференциальным оператором порядка N :

$$W = \partial^N + w_1 \partial^{N-1} + w_2 \partial^{N-2} + \dots + w_N. \quad (4.2)$$

Пусть (2×2) -матрицы f_i и g_i таковы, что

$$f_{i,t_A} = A(f_i), \quad f_{i,\tau_B} = B(f_i), \quad g_{i,t_A} = A(g_i), \quad g_{i,\tau_B} = B(g_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.3)$$

Пусть в рамках метода вариации постоянных (2×2) -матрицы h_i – линейные комбинации f_i и g_i вида

$$h_i = f_i + \alpha_i(\tau_B) g_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.4)$$

где α_i – функции τ_B . Мы предполагаем, что h_i и ее производные являются обратимыми матрицами и что $(2N \times 2N)$ -матрица

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_N \\ h_1^{(1)} & h_2^{(1)} & \dots & h_N^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1^{(N-1)} & h_2^{(N-1)} & \dots & h_N^{(N-1)} \end{pmatrix}$$

обратима.

ТЕОРЕМА 1 [3]. Пусть $a_0, \dots, a_{N-1}$ – (2×2) -матричные функции, определенные как решения линейной алгебраической системы

$$\sum_{i=0}^N a_i h_j^{(i)} = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.5)$$

где $a_N = 1$. Тогда $W = \sum_{i=0}^N a_i \partial^i$ удовлетворяет формуле (2.2) и $L = WCW^{-1}$ удовлетворяет матричной КП-иерархии (2.5).

Имеем

$$W(h_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.6)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $b_1, \dots, b_N - (2 \times 2)$ -матричные функции, для которых

$$\sum_{j=1}^N h_j^{(i)} b_j = \delta_{i, N-1}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (4.7)$$

Определим $\Phi_i = -\dot{\alpha}_i W(g_i)$ и $\Psi_i^T = b_i$, где $\dot{\alpha}_i = d\alpha_i/d\tau_B$. Тогда $W = \sum_{i=0}^N a_i \partial^i$, Φ_i , Ψ_i и $L = WCW^{-1}$ удовлетворяют расширенной матричной КП-иерархии (2.11).

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются несколько лемм, имеющих место при указанных выше предположениях.

ЛЕММА 3. Выполняется равенство

$$W^{-1} = \sum_{i=1}^N h_i \partial^{-1} \Psi_i^T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулы (4.6) и (4.7), имеем

$$\begin{aligned} P_{\geq 0} \left(W \sum_{i=1}^N h_i \partial^{-1} \Psi_i^T \right) &= P_{\geq 0} \left(W \sum_{i=1}^N h_i \partial^{-1} b_i \right) = P_{\geq 0} \left(W \sum_{k=0}^{\infty} \partial^{-k-1} \sum_{i=1}^N h_i^{(k)} b_i \right) = \\ &= P_{\geq 0} \left(W \partial^{-N} + \sum_{k=N}^{\infty} \partial^{-k-1} \sum_{i=1}^N h_i^{(k)} b_i \right) = \\ &= P_{\geq 0} \left(W \partial^{-N} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \partial^{-k-1} \sum_{i=1}^N h_i^{(N+k)} b_i \right) \right) = 1. \\ P_{\leq 0} \left(W \sum_{i=1}^N h_i \partial^{-1} \Psi_i^T \right) &= \sum_{i=1}^N (W(h_i)) \partial^{-1} \Psi_i^T = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

т.е. $W^{-1} = \sum_{i=1}^N h_i \partial^{-1} \Psi_i^T$.

ЛЕММА 4. Верно соотношение

$$W^*(\Psi_i) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения $W^*(W^{-1})^* \partial^j = \partial^j$ следует, что

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Res}_{\partial} W^* \left(\sum_{i=1}^N h_i \partial^{-1} \Psi_i^T \right)^* \partial^j = -\text{Res}_{\partial} W^* \sum_{i=1}^N \Psi_i \partial^{-1} h_i^T \partial^j = \\ &= (-1)^{j+1} \sum_{i=1}^N W^*(\Psi_i) h_i^{T(j)}. \end{aligned}$$

Поскольку $(2N \times 2N)$ -матрица

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_N \\ h_1^{(1)} & h_2^{(1)} & \dots & h_N^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1^{(N-1)} & h_2^{(N-1)} & \dots & h_N^{(N-1)} \end{pmatrix}$$

обратима, получаем $W^*(\Psi_i) = 0$.

ЛЕММА 5. Оператор $\partial^{-1}\Psi_i^T W$ является чисто дифференциальным для каждого i . Более того, при $1 \leq i, j \leq N$ имеем $(\partial^{-1}\Psi_i^T W)(h_j) = \delta_{ij}I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $P_{<0}(\partial^{-1}\Psi_i^T W) = \partial^{-1}(W^*(\Psi_i))^T = 0$, мы знаем, что $\partial^{-1}\Psi_i^T W$ – чисто дифференциальный оператор. Пусть $c_{ij} = (\partial^{-1}\Psi_i^T W)(h_j)$. Получаем, что $\partial(c_{ij}) = \Psi_i^T W(h_j) = 0$ и

$$\sum_{i=1}^N h_i^{(k)} c_{ij} = \partial^k \left(\sum_i h_i c_{ij} \right) = \partial^k \left(\sum_i (h_i \partial^{-1}\Psi_i^T W)(h_j) \right) = h_j^{(k)}.$$

Таким образом, $c_{ij} = \delta_{ij}I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Оператор W удовлетворяет равенству

$$W_{\tau_B} = -P_{<0}(WBW^{-1})W + \sum_{i=1}^N \Phi_i \partial^{-1}\Psi_i^T W.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя ∂_{τ_B} к тождеству $W(h_i) = 0$ и используя выражения (4.3) и леммы 3, 5, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= W_{\tau_B}(h_i) + WB(h_i) + \dot{\alpha}_i W(g_i) = \\ &= (\partial_{\tau_B} W)(h_i) + (WBW^{-1}W)(h_i) - \sum_{j=1}^N \Phi_j \delta_{ji} = \\ &= \left(\partial_{\tau_B} W + P_{<0}(WBW^{-1})W - \sum_{j=1}^N \Phi_j \partial^{-1}\Psi_j^T W \right)(h_i). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Поскольку неотрицательный оператор, действующий на h_i , имеет степень ниже N , а h_i суть N независимых функций, сам оператор должен равняться нулю. Предложение доказано.

Вернемся к доказательству теоремы 2. Доказательство соотношения (2.11a) аналогично тому, которое дано для теоремы 1. С использованием формулы (2.10) получаем равенство (2.11б), и прямым вычислением получаем (2.11в) и (2.11г).

5. РЕШЕНИЯ ДЛЯ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЧНОЙ КП-ИЕРАРХИИ

Используя обобщенный одевающий подход, определяемый теоремой 2, можно построить явные решения расширенной матричной КП-иерархии.

Для $(2+1)$ -мерного уравнения АКС с самосогласованными источниками выберем подходящие (2×2) -матрицы f_i и g_i . Решение уравнений $f_y = \sigma_3 f_x$, $f_t = \sigma_3 f_{xx}$ имеет вид

$$f = \begin{pmatrix} c_{11}\lambda^{-1} + d_{11}e^{\lambda x + \lambda y + \lambda^2 t} & c_{12}\mu^{-1} + d_{12}e^{\mu x + \mu y + \mu^2 t} \\ c_{21}\lambda^{-1} + d_{21}e^{\lambda x - \lambda y - \lambda^2 t} & c_{22}\mu^{-1} + d_{22}e^{\mu x - \mu y - \mu^2 t} \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

где c_{ij} , d_{ij} – произвольные константы, которые, однако, следует выбрать так, чтобы f была обратима при всех x, y, t . Можно определить

$$f_i = \begin{pmatrix} \lambda_i^{-1} + e^{\lambda_i x + \lambda_i y + \lambda_i^2 t} & 0 \\ 0 & \mu_i^{-1} + e^{\mu_i x - \mu_i y - \mu_i^2 t} \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$g_i = \begin{pmatrix} 0 & -e^{\mu_i x + \mu_i y + \mu_i^2 t} \\ e^{\lambda_i x - \lambda_i y - \lambda_i^2 t} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

где $\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0$. Таким образом, мы имеем a_i и b_i , и N -солитонное решение $(2+1)$ -мерного уравнения АКНС с самосогласованными источниками есть

$$U = -2\sigma_3 a_{n-1}^{\text{off}}, \quad D = a_{n-1}^{\text{diag}}, \quad \Phi_i = -\dot{\alpha}_i W(g_i), \quad \Psi_i = b_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.4)$$

Односолитонное решение $(2+1)$ -уравнения АКНС первого типа с самосогласованным источником (2.21) можно построить из

$$h = f + \alpha(t)g = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} + e^{\lambda x + \lambda y + \lambda^2 t} & -\alpha(t)e^{\mu x + \mu y + \mu^2 t} \\ \alpha(t)e^{\lambda x - \lambda y - \lambda^2 t} & \mu^{-1} + e^{\mu x - \mu y - \mu^2 t} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda^{-1} + e^{\xi_{11}} & -\alpha(t)e^{\xi_{12}} \\ \alpha(t)e^{\xi_{21}} & \mu^{-1} + e^{\xi_{22}} \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Из теорем 1 и 2 имеем $a_0 = -h_x h^{-1}$, $a_1 = 1$, $b_0 = h^{-1}$, что дает

$$\begin{aligned} W &= \partial - h_x h^{-1}, & U &= 2\sigma_3 (h_x h^{-1})^{\text{off}}, & D &= 2(h_x h^{-1})^{\text{diag}}, \\ \Phi &= -\dot{\alpha}(t)(g_x - h_x h^{-1}g), & \Psi^T &= h^{-1}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Таким образом, односолитонное решение $(2+1)$ -уравнения АКНС первого типа с самосогласованным источником (2.21) есть

$$q = -2\alpha(t) \frac{(\lambda/\mu)e^{\xi_{21}} + (\lambda - \mu)e^{\xi_{21} + \xi_{22}}}{A(t)}, \quad (5.7)$$

$$r = 2\alpha(t) \frac{-(\mu/\lambda)e^{\xi_{12}} + (\lambda - \mu)e^{\xi_{11} + \xi_{12}}}{A(t)}, \quad (5.8)$$

$$v = 2 \frac{(\lambda/\mu)e^{\xi_{11}} - (\mu/\lambda)e^{\xi_{22}} + (\lambda - \mu)(e^{\xi_{11} + \xi_{22}} - \alpha^2(t)e^{\xi_{12} + \xi_{21}})}{A(t)}, \quad (5.9)$$

$$\Phi = -\dot{\alpha}(t) \begin{pmatrix} \alpha^2(t)\Phi_{11} & -\alpha(t)\Phi_{12} \\ \alpha(t)e^{\xi_{21}}\Phi_{21} & \alpha^2(t)\Phi_{22} \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \left(\frac{1}{\lambda} + e^{\xi_{11}} \right) \left(\frac{1}{\mu} + e^{\xi_{22}} \right) + \alpha^2(t) e^{\xi_{12} + \xi_{21}}, \\
 \Phi_{11} &= \frac{1}{A(t)} \left(\frac{\mu}{\lambda} e^{\xi_{12} + \xi_{21}} + (\mu - \lambda) e^{\xi_{11} + \xi_{12} + \xi_{21}} \right), \\
 \Phi_{12} &= \frac{1}{A(t)} \left((\lambda - \mu) e^{\xi_{11} + \xi_{22}} + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) e^{\xi_{22}} + \frac{\lambda}{\mu} e^{\xi_{11}} + \frac{1}{\mu} \right), \\
 \Phi_{21} &= \frac{1}{A(t)} \left((\mu - \lambda) e^{\xi_{11} + \xi_{22}} + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) e^{\xi_{11}} + \frac{\mu}{\lambda} e^{\xi_{22}} + \frac{1}{\lambda} \right), \\
 \Phi_{22} &= \frac{1}{A(t)} \left(\frac{\lambda}{\mu} e^{\xi_{21} + \xi_{12}} + (\lambda - \mu) e^{\xi_{21} + \xi_{22} + \xi_{12}} \right), \\
 \Psi_{11}(t) &= \frac{1}{A(t)} \left(\frac{1}{\mu} + e^{\xi_{22}} \right), \quad \Psi_{21}(t) = -\frac{1}{A(t)} \alpha(t) e^{\xi_{21}}, \\
 \Psi_{21}(t) &= \frac{1}{A(t)} \alpha(t) e^{\xi_{21}}, \quad \Psi_{21}(t) = \frac{1}{A(t)} \left(\frac{1}{\lambda} + e^{\xi_{11}} \right).
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Односолитонное решение $(2+1)$ -уравнения АКНС второго типа с самосогласованным источником (2.24) можно построить по формулам, аналогичным (5.5)–(5.12), с заменой $\alpha(t)$ на $\alpha(y)$ и, соответственно, $A(t)$ на $A(y)$.

Односолитонное решение $(2+1)$ -уравнения ДС первого типа с самосогласованным источником (2.26) можно построить исходя из выражения

$$\begin{aligned}
 h = f + \alpha(t)g &= \begin{pmatrix} \lambda^{-1} + e^{\lambda x + \lambda y + i\lambda^2 t} & -\alpha(t)e^{-\lambda x - \lambda y + i\lambda^2 t} \\ \alpha(t)e^{\lambda x - \lambda y - i\lambda^2 t} & \lambda^{-1} + e^{-\lambda x + \lambda y - i\lambda^2 t} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda^{-1} + e^{\eta_{11}} & -\alpha(t)e^{\eta_{12}} \\ \alpha(t)e^{\eta_{21}} & \lambda^{-1} + e^{\eta_{22}} \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

где $\lambda > 0$. Оно имеет вид

$$r = 2\alpha(t) \frac{e^{\eta_{12}} + 2\lambda e^{\eta_{11} + \eta_{12}}}{A(t)}, \tag{5.14}$$

$$v = 2 \frac{e^{\eta_{22}} + e^{\eta_{11}} + 2\lambda(e^{\eta_{11} + \eta_{22}} - \alpha^2(t)e^{\eta_{12} + \eta_{21}})}{A(t)}, \tag{5.15}$$

$$\Phi = -\dot{\alpha}(t) \begin{pmatrix} -\alpha(t)\Phi_{11} & \alpha(t)e^{\eta_{12}}\Phi_{12} \\ \alpha(t)e^{\eta_{12}}\Phi_{21} & \alpha(t)\Phi_{22} \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}, \tag{5.17}$$

где теперь

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \left(\frac{1}{\lambda} + e^{\eta_{11}} \right) \left(\frac{1}{\lambda} + e^{\eta_{22}} \right) + \alpha^2(t) e^{\eta_{12} + \eta_{21}}, \\
 \Phi_{11} &= \frac{1}{A(t)} (e^{\eta_{12} + \eta_{21}} + 2\lambda e^{\eta_{11} + \eta_{12} + \eta_{21}}), \\
 \Phi_{12} &= \frac{1}{A(t)} \left(2\lambda e^{\eta_{11} + \eta_{22}} + 2e^{\eta_{22}} + e^{\eta_{11}} + \frac{1}{\lambda} \right), \\
 \Phi_{21} &= \frac{1}{A(t)} \left(2\lambda e^{\eta_{11} + \eta_{22}} + 2e^{\eta_{11}} + e^{\eta_{22}} + \frac{1}{\lambda} \right), \\
 \Phi_{22} &= \frac{1}{A(t)} (e^{\eta_{21} + \eta_{12}} + 2\lambda e^{\eta_{21} + \eta_{22} + \eta_{12}}), \\
 \Psi_{11} &= \frac{1}{A(t)} \left(\frac{1}{\lambda} + e^{\eta_{22}} \right), \quad \Psi_{12} = -\frac{1}{A(t)} \alpha(t) e^{\eta_{21}}, \\
 \Psi_{21} &= \frac{1}{A(t)} \alpha(t) e^{\eta_{12}}, \quad \Psi_{22} = \frac{1}{A(t)} \left(\frac{1}{\lambda} + e^{\eta_{11}} \right).
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Односолитонное решение $(2+1)$ -уравнения ДС второго типа с самосогласованным источником (2.28) можно построить по формулам, аналогичным (5.13)–(5.18), с заменой $\alpha(t)$ на $\alpha(y)$ и, соответственно, $A(t)$ на $A(y)$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы обобщили матричную КП-иерархию за счет введения нового τ_B -потока и добавления собственных функций и присоединенных собственных функций в качестве новых компонент. Для расширенной матричной КП-иерархии и ее t_A - и τ_B -редукций даны уравнения нулевой кривизны и представления Лакса. Расширенная матричная КП-иерархия и две ее редукции дают единообразный способ нахождения двух типов $(2+1)$ - и $(1+1)$ -мерных уравнений АКНС (и уравнений ДС) с самосогласованными источниками. Путем комбинации метода одевания и метода вариации постоянных мы предложили обобщенный метод одевания для решения расширенной матричной КП-иерархии и получили некоторые ее решения. Были изучены солитонные решения двух типов $(2+1)$ -уравнения АКНС с самосогласованными источниками и двух типов уравнения ДС с самосогласованными источниками.

Благодарности. Работа поддержана National Basic Research Program of China (973 program) (2007CB814800) и National Science Foundation of China (Grant no 10801083, 10901090), а также Chinese Universities Scientific Fund (грант № 2011JS041).

Список литературы

- [1] M. Sato, “Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmann manifolds”, *Random Systems and Dynamical Systems*, RIMS Kokyuroku, **439**, ed. H. Tōtōki, Kyoto Univ., Kyoto, 1981, 30–46.
- [2] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, *J. Phys. Soc. Japan*, **50**:11 (1981), 3806–3812.
- [3] W. Oevel, *Phys. A*, **195**:3–4 (1993), 533–576.
- [4] A. Kundu, W. Strampp, *J. Math. Phys.*, **36**:8 (1995), 4192–4202, arXiv: hep-th/9311153.
- [5] V.K. Mel’nikov, *Lett. Math. Phys.*, **7**:2 (1983), 129–136.
- [6] V.K. Mel’nikov, *Comm. Math. Phys.*, **112**:4 (1987), 639–652.

- [7] V. K. Mel'nikov, *Comm. Math. Phys.*, **126**:1 (1989), 201–215.
- [8] Yi. Cheng, *J. Math. Phys.*, **33**:11 (1992), 3774–3782.
- [9] T. Xiao, Y. B. Zeng, *J. Phys. A*, **37**:28 (2004), 7143–7162, arXiv: nlin/0412070.
- [10] A. L. Sakhnovich, *J. Phys. A*, **36**:18 (2003), 5023–5033.
- [11] C. Schiebold, *Glasg. Math. J.*, **51**:A (2009), 147–155.
- [12] A. I. Zenchuk, P. M. Santini, *J. Phys. A*, **41**:18 (2008), 185209, 28 pp., arXiv: 0801.3945.
- [13] X. J. Liu, Y. B. Zeng, R. L. Lin, *Phys. Lett. A*, **372**:21 (2008), 3819–3823, arXiv: 0710.4015.
- [14] X. Liu, R. Lin, B. Jin, Y. Zeng, *J. Math. Phys.*, **50**:5 (2009), 053506, 14 pp., arXiv: 0905.1402.
- [15] J. Hu, H.-Y. Wang, H.-W. Tam, *J. Math. Phys.*, **49**:1 (2008), 013506, 9 pp.
- [16] S. Shen, L. Jiang, *J. Comput. Appl. Math.*, **233**:2 (2009), 585–589.
- [17] L. Dickey, *Soliton equations and Hamiltonian systems*, Advanced Ser. Math. Phys., **26**, 2nd ed., World Sci., Singapore, 2003.

Поступила в редакцию 5.09.2010,
после доработки 26.09.2010