Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Дулат, Кан Ли, Цзянь-Хуа Ван, Функции Вигнера для задачи Ландау в некоммутативной квантовой механике, *ТМФ*, 2011, том 167, номер 2, 264–272

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6638>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:20:38

© 2011 г. С. Дулат*, Кан Ли†, Цзянь-Хуа Ван‡

ФУНКЦИИ ВИГНЕРА ДЛЯ ЗАДАЧИ ЛАНДАУ В НЕКОММУТАТИВНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Исследованы функции Вигнера в некоммутативной квантовой механике. Путем решения не зависящего от времени уравнения Шредингера в некоммутативном пространстве и в некоммутативном фазовом пространстве получены функции Вигнера для задач Ландау в этих пространствах.

Ключевые слова: функция Вигнера, некоммутативная квантовая механика, задача Ландау.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время изучение физических явлений в некоммутативном пространстве (НКП) и некоммутативном фазовом пространстве (НКФП) привлекает внимание многих исследователей. Это связано с тем, что влияние пространственной некоммутативности может становиться существенным на струнном масштабе. Кроме того, имеется много работ, посвященных теоретико-полевым исследованиям различных аспектов квантовой механики в НКП и НКФП с обычными (коммутативными) временными координатами [1]–[11]. Например, фаза Ааронова–Бома в НКП и НКФП исследовалась в работах [1]–[3], а фаза Ааронова–Кашера для частиц со спином $1/2$ и спином 1 в НКП и НКФП – в работах [4], [5]. В работах [6], [7] рассматривались задача Ландау и эффект Хе–Мекеллара–Вилкенса как в НКП, так и в НКФП. Имеется также ряд работ, посвященных квантовому эффекту Холла в НКП [8] и НКФП [9]. В работе [12] изучалась функция Вигнера для негамильтоновых систем в НКП. Функции Вигнера для задачи Ландау в НКП исследовались в работе [13], а функция Вигнера для осциллятора Клейна–Гордона в НКП – в работе [14]. В работе [15] рассмотрены функции Вигнера для гармонического осциллятора в случае некоммутативной квантовой механики. Функция Вигнера очень важна не только потому, что она является эквивалентом волновой функции Шредингера в квантовой механике, но и потому, что она связана с квантовым наблюдением,

*School of Physics Science and Technology, Xinjiang University, Urumqi, China

†Department of Physics, Hangzhou Normal University, Hangzhou, China.

E-mail: kangli60@yahoo.com.cn

‡Department of Physics, Shaanxi University of Technology, Hanzhong, China

и поэтому дальнейшие исследования некоммутативной функции Вигнера являются очень важными и полезными.

В настоящей работе исследуется влияние некоммутативности на функцию Вигнера для задачи Ландау. Работа построена следующим образом. В разделе 2 вводится функция Вигнера для задачи Ландау. В разделе 3 исследованы функции Вигнера для задачи Ландау в НКП. В разделе 4 с использованием обобщенного сдвига Боппа получены функции Вигнера для задачи Ландау в НКФП. Раздел 5 представляет собой заключение.

2. ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА ДЛЯ ЗАДАЧИ ЛАНДАУ

Существуют три формулировки квантовой механики: стандартное операторное квантование, развитое Шредингером, Дираком и Гейзенбергом, квантование с помощью интеграла по траекториям, построенное Фейнманом, и формулировка в терминах фазового пространства (также известная как квантование Мойала, или деформационное квантование), развитая Вигнером [16], которая хотя и менее известна, но полезна во многих областях физики. Например, она может быть использована при описании квантового процесса переноса в фазовом пространстве, в квантовой оптике, ядерной физике, физике твердого тела, М-теории, некоммутативной геометрии и матричных моделях. В данной формулировке квантовой механики отсутствуют операторы, а наблюдаемые и амплитуды переходов являются интегралами по фазовому пространству классических числовых функций, их композиция реализуется *-произведением, и, как в статистической механике, вес задается функцией Вигнера. Исходя из квантово-механической волновой функции Вигнер построил функцию распределения, которая является вещественной, но не всюду положительной. Затем Мойал записал эволюционное уравнение для данного распределения, введя для этого свою знаменитую скобку [17]. Функция Вигнера распределения вероятности для одновременных значений координат $\mathbf{x}$ и импульсов $\mathbf{p}$ в фазовом пространстве размерности $2d$ определяется в терминах волновой функции $\psi(\mathbf{x})$ уравнения Шредингера $\hat{H}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}})\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x})$ (здесь $\hat{H}$ – гамильтониан, а координаты $\hat{\mathbf{x}}$ и импульсы $\hat{\mathbf{p}}$ удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$) как

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{y} e^{-i\mathbf{y} \cdot \mathbf{p}} \psi^*\left(\mathbf{x} - \frac{\hbar}{2}\mathbf{y}\right) \psi\left(\mathbf{x} + \frac{\hbar}{2}\mathbf{y}\right), \quad (1)$$

где $\psi^*(\mathbf{x})$ обозначает функцию, комплексно-сопряженную $\psi(\mathbf{x})$. Можно также получить не зависящую от времени функцию Вигнера чистого состояния, непосредственно решая уравнение на собственные значения в терминах *-произведения [18]:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) *_\hbar W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) *_\hbar H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = EW(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (2)$$

где ассоциативное *-произведение записывается как

$$*_\hbar \equiv \exp\left\{\frac{i\hbar}{2}\left(\overleftarrow{\partial}_{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\partial}_{\mathbf{p}} - \overleftarrow{\partial}_{\mathbf{p}} \cdot \overrightarrow{\partial}_{\mathbf{x}}\right)\right\},$$

а $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ – классический гамильтониан, соответствующий $\hat{H}$. Данное произведение кодирует полное квантово-механическое действие. Если вспомнить, как действует

трансляционный оператор, то оказывается, что $*$ -произведение индуцирует сдвиги Боппа:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) *_{\hbar} g(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &= f\left(\mathbf{x} + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_{\mathbf{p}}, \mathbf{p} - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_{\mathbf{x}}\right) g(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \\ &= f\left(\mathbf{x}, \mathbf{p} - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_{\mathbf{x}}\right) g\left(\mathbf{x}, \mathbf{p} + \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_{\mathbf{x}}\right). \end{aligned}$$

Заметим, что $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) *_{\hbar} g(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ обозначает квантовую деформацию обычного коммутативного произведения функций $f \cdot g$. Итак, имеются два эквивалентных способа получения функций Вигнера: с помощью равенства (1) или с помощью уравнения (2).

Для иллюстрации подхода, основанного на уравнении (2), рассмотрим задачу Ландау, задаваемую следующим гамильтонианом:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2\mu} \left[\left(p_x - \frac{eB}{2c} y \right)^2 + \left(p_y + \frac{eB}{2c} x \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2\mu} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} \mu \omega^2 (x^2 + y^2) + \omega (x p_y - y p_x), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\omega = qB/2\mu c$. Переопределив координаты как

$$q = \frac{p_y}{\sqrt{\mu}} + \omega \sqrt{\mu} x, \quad p = \frac{p_x}{\sqrt{\mu}} - \omega \sqrt{\mu} y, \quad (4)$$

мы можем записать гамильтониан задачи Ландау (3) в виде, отвечающем одномерному гармоническому осциллятору, в котором $\mu = 1$ и $\omega = 1$:

$$H(q, p) = \frac{1}{2} (p^2 + q^2).$$

В терминах q и p задача на собственные значения (2) записывается как

$$H(q, p) *_{\hbar} W(q, p) = W(q, p) *_{\hbar} H(q, p) = EW(q, p), \quad (5)$$

где $*_{\hbar} \equiv e^{i\hbar\omega} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)$. Отсюда

$$[q^2 + p^2 - \hbar^2 \omega^2 (\partial_q^2 + \partial_p^2) + 2i\hbar\omega (q\partial_p - p\partial_q) - 2E] W(q, p) = 0. \quad (6)$$

Учитывая, что $W(q, p) *_{\hbar} H(q, p) = EW(q, p)$, имеем

$$[q^2 + p^2 - \hbar^2 \omega^2 (\partial_q^2 + \partial_p^2) - 2i\hbar\omega (q\partial_p - p\partial_q) - 2E] W(q, p) = 0. \quad (7)$$

В силу соотношений (5)–(7) мнимая часть этого уравнения записывается как

$$(q\partial_p - p\partial_q) W(q, p) = 0,$$

а вещественная часть есть

$$[q^2 + p^2 - \hbar^2 \omega^2 (\partial_q^2 + \partial_p^2) - 2E] W(q, p) = 0. \quad (8)$$

Вводя новую переменную

$$\xi = \frac{q^2 + p^2}{\hbar\omega}, \quad (9)$$

можно переписать уравнение (8) в виде

$$\left[\frac{\xi}{4} - \xi \partial_\xi^2 - \partial_\xi - \frac{E}{2\hbar\omega} \right] W(\xi) = 0. \quad (10)$$

Положив $W(\xi) = e^{-\xi/2} L(\xi)$, мы переписываем уравнение (10) как

$$\left[\xi \partial_\xi^2 + (1 - \xi) \partial_\xi + \frac{E}{2\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right] L(\xi) = 0.$$

Решением этого уравнения являются полиномы Лагерра

$$L_n(\xi) = \frac{1}{n!} e^\xi \partial_\xi^n (e^{-\xi} \xi^n), \quad n = \frac{E_n}{2\hbar\omega} - \frac{1}{2} = 0, 1, \dots, \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) 2\hbar\omega,$$

а соответствующие нормированные функции Вигнера суть

$$W_n = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} e^{-\xi/2} L_n(\xi).$$

Подставляя в это равенство соотношение (9), можно записать функции Вигнера W_n для задачи Ландау как

$$\begin{aligned} W_n(q, p) &= \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} \exp\left\{ -\frac{q^2 + p^2}{2\hbar\omega} \right\} L_n\left(\frac{q^2 + p^2}{\hbar\omega} \right) = \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} \exp\left\{ -\frac{H(q, p)}{\hbar\omega} \right\} L_n\left(\frac{2H(q, p)}{\hbar\omega} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

При $n = 0$ имеем

$$W_0 = \frac{1}{\pi\hbar} \exp\left\{ -\frac{H(q, p)}{\hbar\omega} \right\}.$$

Подставляя соотношения (4) в последние равенства, получаем функции Вигнера в переменных $\mathbf{x}, \mathbf{p}$:

$$\begin{aligned} W_n(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &= \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} \exp\left\{ -\frac{(p_y/\sqrt{\mu} + \omega\sqrt{\mu}x)^2 + (p_x/\sqrt{\mu} - \omega\sqrt{\mu}y)^2}{2\hbar\omega} \right\} \times \\ &\times L_n\left(-\frac{(p_y/\sqrt{\mu} + \omega\sqrt{\mu}x)^2 + (p_x/\sqrt{\mu} - \omega\sqrt{\mu}y)^2}{\hbar\omega} \right) = \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} \exp\left\{ -\frac{H(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\hbar\omega} \right\} L_n\left(\frac{2H(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\hbar\omega} \right), \\ W_0(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{\pi\hbar} \exp\left\{ -\frac{H(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\hbar\omega} \right\}. \end{aligned}$$

3. ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА ДЛЯ ЗАДАЧИ ЛАНДАУ В НКП

Операторы координаты $\hat{x}_i^{\text{nc}}$ и импульса $\hat{p}_i^{\text{nc}}$, $i = x, y$, на некоммутативной плоскости удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{x}_i^{\text{nc}}, \hat{x}_j^{\text{nc}}] = i\theta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i^{\text{nc}}, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (12)$$

Уравнение Шредингера в НКП имеет вид

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}) *_{\theta} \psi^{\text{nc}}(\mathbf{x}) = E\psi^{\text{nc}}(\mathbf{x}), \quad (13)$$

где произведение Мойала–Вейля (или $*$ -произведение) определяется следующим образом: $*_{\theta} = e^{(i\theta/2)(\overleftarrow{\partial}_x \overrightarrow{\partial}_y - \overleftarrow{\partial}_y \overrightarrow{\partial}_x)}$. После того как из уравнения (13) найдена $\psi^{\text{nc}}(\mathbf{x})$, функция Вигнера на НКП принимает вид

$$W^{\text{nc}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{y} e^{-i\mathbf{y} \cdot \mathbf{p}} \psi^{\text{nc}}\left(\mathbf{x} + \frac{\hbar}{2}\mathbf{y}\right) *_{\theta} \psi^{*\text{nc}}\left(\mathbf{x} - \frac{\hbar}{2}\mathbf{y}\right).$$

Функцию Вигнера на НКП можно также получить альтернативным способом, решая следующее уравнение на собственные значения в терминах $*$ -произведения:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) * W^{\text{nc}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = W^{\text{nc}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) * H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = EW^{\text{nc}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (14)$$

где

$$* = *_h *_\theta = \exp\left(\frac{i\hbar}{2} \sum_{i=x}^y (\overleftarrow{\partial}_{x_i} \overrightarrow{\partial}_{p_i} - \overleftarrow{\partial}_{p_i} \overrightarrow{\partial}_{x_i}) + \frac{i\theta}{2} (\overleftarrow{\partial}_x \overrightarrow{\partial}_y - \overleftarrow{\partial}_y \overrightarrow{\partial}_x)\right).$$

Вместо решения уравнения Шредингера в НКП с использованием $*$ -произведения мы используем метод сдвига Боша, т.е. заменяем $*_{\theta}$ -произведение в уравнении Шредингера обычным произведением, производя при этом сдвиг

$$\hat{x}_i^{\text{nc}} = \hat{x}_i - \frac{1}{2\hbar} \theta_{ij} \hat{p}_j, \quad \hat{p}_i^{\text{nc}} = \hat{p}_i, \quad i = x, y, \quad \theta_{ij} = \theta \epsilon_{ij}. \quad (15)$$

Тогда уравнение (13) принимает вид $\hat{H}(\hat{\mathbf{x}}^{\text{nc}}, \hat{\mathbf{p}}^{\text{nc}}) \psi^{\text{nc}}(\mathbf{x}) = E\psi^{\text{nc}}(\mathbf{x})$. Поэтому уравнение (14) можно переписать как

$$H(\mathbf{x}^{\text{nc}}, \mathbf{p}^{\text{nc}}) *_h W^{\text{nc}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = W^{\text{nc}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) *_h H(\mathbf{x}^{\text{nc}}, \mathbf{p}^{\text{nc}}) = EW^{\text{nc}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}^{\text{nc}}, \mathbf{p}^{\text{nc}}) &= \frac{1}{2\mu} \left[\left(p_x - \frac{eB}{2c} y^{\text{nc}} \right)^2 + \left(p_y + \frac{eB}{2c} x^{\text{nc}} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2\mu} \left\{ \left[\left(1 - \frac{eB}{4\hbar c} \theta \right) p_x - \frac{eB}{2c} y \right]^2 + \left[\left(1 - \frac{eB}{4\hbar c} \theta \right) p_y + \frac{eB}{2c} x \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2\mu} \{ [(1 + \kappa)p_x - \omega y]^2 + [(1 + \kappa)p_y + \omega x]^2 \}, \quad \kappa = -\frac{qB}{4\hbar c} \theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Переопределяя координаты,

$$q^{\text{nc}} = \frac{(1 + \kappa)p_y}{\sqrt{\mu}} + \omega\sqrt{\mu}x, \quad p^{\text{nc}} = \frac{(1 + \kappa)p_x}{\sqrt{\mu}} - \omega\sqrt{\mu}y,$$

можно записать гамильтониан (17) для задачи Ландау в виде, отвечающем одномерному гармоническому осциллятору, в котором $\mu = 1$ и $\omega = 1$:

$$H(q^{\text{nc}}, p^{\text{nc}}) = \frac{1}{2}((p^{\text{nc}})^2 + (q^{\text{nc}})^2).$$

Сравнивая уравнения (2) и (16), получаем

$$W_n^{\text{nc}}(q, p) = W(q, p) \Big|_{\substack{q=q^{\text{nc}}, \\ p=p^{\text{nc}}}},$$

откуда

$$\begin{aligned} W_n^{\text{nc}}(q^{\text{nc}}, p^{\text{nc}}) &= \frac{(-1)^n}{(\pi\hbar)^2} \exp\left\{-\frac{(q^{\text{nc}})^2 + (p^{\text{nc}})^2}{2\hbar\omega(1+\kappa)}\right\} L_n\left(\frac{(q^{\text{nc}})^2 + (p^{\text{nc}})^2}{\hbar\omega(1+\kappa)}\right) = \\ &= \frac{(-1)^n}{(\pi\hbar)^2} \exp\left\{-\frac{H(q^{\text{nc}}, p^{\text{nc}})}{\hbar\omega(1+\kappa)}\right\} L_n\left(\frac{2H(q^{\text{nc}}, p^{\text{nc}})}{\hbar\omega(1+\kappa)}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

При $n = 0$ имеем

$$W_0^{\text{nc}} = \frac{1}{(\pi\hbar)^2} \exp\left\{-\frac{H(q^{\text{nc}}, p^{\text{nc}})}{\hbar\omega(1+\kappa)}\right\}.$$

4. ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА ДЛЯ ЗАДАЧИ ЛАНДАУ В НКФП

Случай, когда и операторы координаты, и операторы импульса не коммутируют между собой [10], [11], отличается от случая, когда только операторы координаты не коммутируют между собой. Таким образом, в НКФП не только операторы координаты являются некоммутирующими, как в (12), но и операторы импульса удовлетворяют коммутационным соотношениям $[\hat{p}_i^{\text{ncps}}, \hat{p}_j^{\text{ncps}}] = i\bar{\theta}_{ij}$, $i, j = x, y$. Здесь $\{\bar{\theta}_{ij}\}$ – полностью антисимметричная матрица, определяющая свойство некоммутативности импульсов в НКФП и играющая роль, аналогичную постоянной $\hbar$ в обычной квантовой механике. Уравнение Шредингера в НКФП записывается в виде

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}) *_{\bar{\theta}} \psi^{\text{ncps}}(\mathbf{x}) = E\psi^{\text{ncps}}(\mathbf{x}), \quad (19)$$

где $*_{\bar{\theta}}$ -произведение для НКФП определяется как $*_{\bar{\theta}} = e^{(i\bar{\theta}/2)(\overleftarrow{\partial}_{p_x}\overrightarrow{\partial}_{p_y} - \overleftarrow{\partial}_{p_y}\overrightarrow{\partial}_{p_x})}$. Функция Вигнера на НКФП записывается в виде

$$W^{\text{ncps}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{y} e^{-i\mathbf{y} \cdot \mathbf{p}} \psi^{\text{ncps}}\left(\mathbf{x} + \frac{\hbar}{2}\mathbf{y}\right) *_{\bar{\theta}} \psi^{*\text{ncps}}\left(\mathbf{x} - \frac{\hbar}{2}\mathbf{y}\right),$$

а уравнение на $*$ -собственные значения в НКФП таково:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) * W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) * H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = EW(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (20)$$

где $*$ = $*_{\hbar} *_{\theta} *_{\bar{\theta}}$.

Вместо решения уравнения Шредингера в НКФП мы используем метод сдвига Боппа, т.е. заменяем $*_{\theta} *_{\bar{\theta}}$ -произведение в уравнении Шредингера обычным произведением, сделав сдвиг

$$\hat{x}_i^{\text{ncps}} = \alpha \hat{x}_i - \frac{1}{2\alpha\hbar} \theta_{ij} \hat{p}_j, \quad \hat{p}_i^{\text{ncps}} = \alpha \hat{p}_i + \frac{1}{2\alpha\hbar} \bar{\theta}_{ij} \hat{x}_j, \quad i = x, y, \quad (21)$$

где $\bar{\theta}_{ij} = \bar{\theta}\epsilon_{ij}$, $\theta\bar{\theta} = 4\hbar^2\alpha^2(1 - \alpha^2)$. Тогда уравнение (19) принимает вид

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{x}}^{\text{neps}}, \hat{\mathbf{p}}^{\text{neps}})\psi^{\text{neps}}(\mathbf{x}) = E\psi^{\text{neps}}(\mathbf{x}),$$

а уравнение (20) можно переписать как

$$H(\mathbf{x}^{\text{neps}}, \mathbf{p}^{\text{neps}}) *_\hbar W^{\text{neps}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = W^{\text{neps}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) *_\hbar H(\mathbf{x}^{\text{neps}}, \mathbf{p}^{\text{neps}}) = EW^{\text{neps}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}). \quad (22)$$

Гамильтониан для двумерной задачи Ландау в НКФП в симметричной калибровке имеет вид

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}^{\text{neps}}, \mathbf{p}^{\text{neps}}) &= \frac{1}{2\mu} \left[\left(p_x^{\text{neps}} - \frac{eB}{2c} y^{\text{neps}} \right)^2 + \left(p_y^{\text{neps}} + \frac{eB}{2c} x^{\text{neps}} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2\mu} \left\{ \left[\left(\alpha + \frac{\kappa}{\alpha} \right) p_x - \omega \left(\alpha + \frac{\lambda}{\alpha} \right) y \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\alpha + \frac{\kappa}{\alpha} \right) p_y + \omega \left(\alpha + \frac{\lambda}{\alpha} \right) x \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\lambda = -\bar{\theta}/2\hbar\omega$. Переопределяя координаты,

$$\begin{aligned} q^{\text{neps}} &= \frac{(\alpha + \kappa/\alpha)p_y}{\sqrt{\mu}} + \omega \left(\alpha + \frac{\lambda}{\alpha} \right) \sqrt{\mu} x, \\ p^{\text{neps}} &= \frac{(\alpha + \kappa/\alpha)p_x}{\sqrt{\mu}} - \omega \left(\alpha + \frac{\lambda}{\alpha} \right) \sqrt{\mu} y, \end{aligned} \quad (24)$$

можно записать гамильтониан (19) задачи Ландау в НКФП в виде, отвечающем одномерному гармоническому осциллятору, в котором $\mu = 1$ и $\omega = 1$:

$$H(q^{\text{neps}}, p^{\text{neps}}) = \frac{1}{2}((p^{\text{neps}})^2 + (q^{\text{neps}})^2).$$

Сравнивая уравнения (2) и (22), получаем

$$W_n^{\text{neps}}(q, p) = W(q, p) \Big|_{\substack{q=q^{\text{neps}}, \\ p=p^{\text{neps}}}},$$

откуда

$$\begin{aligned} W_n^{\text{neps}}(q, p) &= \frac{(-1)^n}{(\pi\hbar)^2} \exp \left\{ -\frac{(q^{\text{neps}})^2 + (p^{\text{neps}})^2}{2\hbar\omega(\alpha + \kappa/\alpha)(\alpha + \lambda/\alpha)} \right\} \times \\ &\quad \times L_n \left(\frac{(q^{\text{neps}})^2 + (p^{\text{neps}})^2}{\hbar\omega(\alpha + \kappa/\alpha)(\alpha + \lambda/\alpha)} \right) = \\ &= \frac{(-1)^n}{(\pi\hbar)^2} \exp \left\{ -\frac{H(q^{\text{nc}}, p^{\text{nc}})}{\hbar\omega(\alpha + \kappa/\alpha)(\alpha + \lambda/\alpha)} \right\} \times \\ &\quad \times L_n \left(\frac{2H(q^{\text{neps}}, p^{\text{neps}})}{\hbar\omega(\alpha + \kappa/\alpha)(\alpha + \lambda/\alpha)} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

– функция Вигнера для задачи Ландау в НКФП. Функция Вигнера, соответствующая волновой функции основного состояния, имеет вид

$$W_0^{\text{ncps}} = \frac{1}{(\pi\hbar)^2} \exp \left\{ -\frac{H(q^{\text{ncps}}, p^{\text{ncps}})}{\hbar\omega(\alpha + \kappa/\alpha)(\alpha + \lambda/\alpha)} \right\}.$$

Следует упомянуть, что преобразование (24), а также общий вид (25) функции Вигнера задачи Ландау в НКФП представляют собой полностью новые результаты.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы исследовали функции Вигнера для задачи Ландау в обычном коммутативном пространстве, а затем для случаев НКП и НКФП. Вместо утомительных вычислений с использованием *-произведения мы использовали метод “сдвига”, пользуясь тем, что *-произведение в уравнениях (13) и (19) можно заменить уравнениями сдвига Боппа (15) в НКП и (21) в НКФП. Эти сдвиги эквивалентны использованию *-произведения. Дополнительные члены в функции Вигнера (18) на НКП и в функции Вигнера (25) на НКФП связаны с некоммутативностью пространства и фазового пространства. Ожидается, что этот эффект можно будет проверить при очень высоких энергиях, так что его экспериментальное наблюдение остается предметом дальнейших исследований.

Использованный в работе метод можно применить к другим физическим задачам в НКП и НКФП. Этому будут посвящены наши дальнейшие работы.

Благодарности. Мы благодарим профессора Ранджбар-Даеми за любезное приглашение и гостеприимство во время визита авторов в International Centre for Theoretical Physics (Triest, Italy). Настоящая работа выполнена при поддержке National Natural Science Foundation of China (проекты № 10965006, 10875035) и Natural Science Foundation of Zhejiang Province (проект Y6110470).

Список литературы

- [1] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, *Phys. Rev. Lett.*, **86**:13 (2001), 2716–2719, arXiv: hep-th/0010175; M. Chaichian, A. Demichev, P. Prešnajder, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, *Nucl. Phys. B*, **611**:1–3 (2001), 383–402, arXiv: hep-th/0101209.
- [2] M. Chaichian, P. Prešnajder, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, *Phys. Lett. B*, **527**:1–2 (2002), 149–154, arXiv: hep-th/0012175; H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, J. C. Rojas, *Phys. Rev. D*, **66**:4 (2002), 045018, 13 pp., arXiv: hep-th/0203260.
- [3] K. Li, S. Dulat, *Eur. Phys. J. C*, **46**:3 (2006), 825–828, arXiv: hep-th/0508193.
- [4] B. Mirza, M. Zarei, *Eur. Phys. J. C*, **32**:4 (2004), 583–586, arXiv: hep-th/0311222; K. Li, J. Wang, *Eur. Phys. J. C*, **50**:4 (2007), 1007–1011, arXiv: hep-th/0608100.
- [5] B. Mirza, R. Narimani, M. Zarei, *Eur. Phys. J. C*, **48**:2 (2006), 641–645, arXiv: hep-th/0610323; S. Dulat, K. Li, *Eur. Phys. J. C*, **54**:2 (2008), 333–337, arXiv: 0802.1243.
- [6] J. Gamboa, F. Méndez, M. Loewe, J. C. Rojas, *Modern Phys. Lett. A*, **16**:32 (2001), 2075–2078, arXiv: hep-th/0104224; P. A. Horváthy, *Ann. Phys.*, **299**:1 (2002), 128–140, arXiv: hep-th/0201007; Ö. F. Dayı, L. T. Kelleyane, *Modern Phys. Lett. A*, **17**:29 (2002), 1937–1944, arXiv: hep-th/0202062; S. Dulat, K. Li, *Chin. Phys. C*, **32**:2 (2008), 92–95; P. R. Giri, P. Roy, *Eur. Phys. J. C*, **57**:4 (2008), 835–839, arXiv: 0803.4090.

- [7] J. Wang, K. Li, *J. Phys. A*, **40**:9 (2007), 2197–2202, arXiv:0708.0783; S. Dulat, K. Li, J. Wang, *J. Phys. A*, **41**:6 (2008), 065303, 7 pp., arXiv:0802.1116; *Chin. Phys. B*, **17**:5 (2008), 1716–1719.
- [8] Ö.F. Dayi, A. Jellal, *J. Math. Phys.*, **43**:10 (2002), 4592–4601, arXiv:hep-th/0111267; Erratum **45**:2 (2004), 827; A. Kokado, T. Okamura, T. Saito, *Hall effect in Noncommutative spaces*, arXiv:hep-th/0307120; B. Basu, S. Ghosh, *Phys. Lett. A*, **346**:1–3 (2005), 133–140, arXiv:cond-mat/0503266; B. Harms, O. Micu, *J. Phys. A*, **40**:33 (2007), 10337–10347, arXiv:hep-th/0610081; A. L. Carey, K. Hannabuss, V. Mathai, *J. Geom. Symmetry Phys.*, **6** (2006), 16–37, arXiv:math/0008115.
- [9] S. Dulat, K. Li, *Eur. Phys. J. C*, **60**:1 (2009), 163–168, arXiv:0802.1118.
- [10] M. Demetrian, D. Kochan, *Acta Phys. Slovaca*, **52**:1 (2002), 1–9, arXiv:hep-th/0102050; Z. Jian-Zu, *Phys. Lett. B*, **584**:1–2 (2004), 204–209, arXiv:hep-th/0405135.
- [11] K. Li, J. Wang, C. Chen, *Modern Phys. Lett. A*, **20**:28 (2005), 2165–2174, arXiv:hep-th/0409234.
- [12] T. Heng, B. Lin, S. Jing, *Chin. Phys. Lett.*, **27**:9 (2010), 090302, 4 pp.
- [13] Ö.F. Dayi, L.T. Kelleyane, *Modern Phys. Lett. A*, **17**:29 (2002), 1937–1944, arXiv:hep-th/0202062.
- [14] K. Li, J. Wang, S. Dulat, K. Ma, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **49**:1 (2010), 134–143.
- [15] J. Wang, K. Li, S. Dulat, *Wigner Functions for harmonic oscillator in noncommutative phase space*, arXiv:0908.1703.
- [16] E. Wigner, *Phys. Rev.*, **40**:50 (1932), 749–759.
- [17] J. E. Moyal, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **45**:1 (1949), 99–124.
- [18] D. B. Fairlie, C. A. Manogue, *J. Phys. A*, **24**:16 (1991), 3807–3815; T. Curtright, D. Fairlie, C. Zachos, *Phys. Rev. D*, **58**:2 (1998), 025002, 14 pp., arXiv:hep-th/9711183; C. Zachos, *Internat. J. Modern Phys. A*, **17**:3 (2002), 297–316, arXiv:hep-th/0110114.

Поступила в редакцию 26.08.2010,
после доработки 27.10.2010