Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Особенности динамики уравнения Гинзбурга–Ландау в плоской области, *ТМФ*, 2000, том 125, номер 2, 205–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf664>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:01:54

© 2000 г.

А. Ю. Колесов*, Н. Х. Розов†

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ В ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

Исследуется краевая задача

$$w_t = \varkappa_0 \Delta w + \varkappa_1 w - \varkappa_2 w |w|^2, \quad w|_{\partial\Omega_0} = 0$$

в области $\Omega_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$. Здесь w – комплекснозначная функция, Δ – оператор Лапласа, а комплексные постоянные $\varkappa_j$, $j = 0, 1, 2$, таковы, что $\operatorname{Re} \varkappa_j > 0$. Показано, что при некоторой общности положения, связанной с выбором l_1, l_2 , и при $\operatorname{Re} \varkappa_0 \rightarrow 0$, $\operatorname{Re} \varkappa_1 \rightarrow 0$ количество устойчивых инвариантных торов данной краевой задачи неограниченно растет, причем неограниченно увеличиваются и размерности этих торов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнением Гинзбурга–Ландау принято называть систему двух параболических уравнений типа реакция–диффузия, которая в комплексной форме записи имеет вид

$$w_t = \varkappa_0 \Delta w + \varkappa_1 w - \varkappa_2 w |w|^2, \tag{1}$$

где w – комплекснозначная функция; Δ – оператор Лапласа; $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2$ – комплексные постоянные, удовлетворяющие условиям $\operatorname{Re} \varkappa_j > 0$, $j = 0, 1, 2$.

В случае двух пространственных переменных это уравнение представляет интерес во многих прикладных вопросах. К ним можно отнести теорию возникновения ветровых волн на воде [1], исследование диссипативных структур в активных средах и в колебательных химических реакциях [2, 3], проблему морфогенеза [4] и т.д. (см. обзор [5], где содержится достаточно подробная библиография).

Уравнение (1) называют также уравнением Курамото–Цудзуки по имени двух японских физиков, которые, опираясь на развитые Гинзбургом и Ландау физические представления, считали, что оно описывает динамику параболической системы типа реакция–диффузия с граничными условиями Неймана и с коэффициентами диффузии порядка единицы, когда ее пространственно-однородное состояние равновесия колебательным

*Ярославский государственный университет, Ярославль, Россия

†Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: rozov@rozov.mcsme.ru

образом теряет устойчивость. Строгое математическое рассмотрение данного вопроса было проведено в работах [6–8], где показано, что предположение японских физиков имеет место только в случае, если коэффициенты диффузии указанной системы малы.

В области $\Omega_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$ рассмотрим краевую задачу

$$w_t = \varkappa_0 \Delta w + \varkappa_1 w - \varkappa_2 w |w|^2, \quad w|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad (2)$$

и будем интересоваться ее аттракторами при дополнительных предположениях о малости $\operatorname{Re} \varkappa_0$ и $\operatorname{Re} \varkappa_1$. А именно всюду ниже считаем, что

$$\operatorname{Re} \varkappa_1 = \varepsilon \ll 1, \quad \operatorname{Re} \varkappa_0 = \varepsilon \nu, \quad \nu = \operatorname{const} > 0, \quad \operatorname{Im} \varkappa_0 \neq 0. \quad (3)$$

Выполняя в (2) замену $w \exp(-i \operatorname{Im} \varkappa_1 t) \rightarrow w$ и проводя подходящие перенормировки переменных t, w и параметров ε, ν , добиваемся выполнения равенств

$$\operatorname{Im} \varkappa_0 = -1, \quad \operatorname{Im} \varkappa_1 = 0, \quad \varkappa_2 = \varkappa, \quad \varkappa = 1 + i c_0, \quad (4)$$

где знак параметра c_0 произволен. Наконец, после замен $x/l_1 \rightarrow x, y/l_2 \rightarrow y$ в переменных $u_1 = \operatorname{Re} w, u_2 = \operatorname{Im} w$ задача (2) с учетом равенств (3), (4) записывается в виде

$$u_t = D L u + \varepsilon(u + \nu L u) + F(u), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5)$$

где

$$u = \operatorname{colon}(u_1, u_2), \quad L = a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad a_j = \frac{1}{l_j}, \quad j = 1, 2,$$

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(u) = -(u_1^2 + u_2^2) \operatorname{colon}(u_1 - c_0 u_2, c_0 u_1 + u_2)$$

(colon обозначает вектор-столбец).

Поставим вопрос о динамике краевой задачи (5) по параметру ν , принимая в качестве ее фазового пространства (пространства начальных условий) гильбертово пространство $W_2^0(\Omega; \mathbb{R}^2)$, получающееся в результате замыканий в метрике W_2^2 линейала гладких вектор-функций, удовлетворяющих граничному условию из (5). Использование фазового пространства позволяет практически без изменений распространять на уравнения с частными производными основные положения качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Нетрудно видеть, что линейная краевая задача, получающаяся из (5) при $\varepsilon = 0$ и после отбрасывания нелинейности, допускает тригонометрические решения

$$\begin{aligned} a \exp(i\omega_{n,k}t) e_{n,k}(x, y), \quad \bar{a} \exp(-i\omega_{n,k}t) e_{n,k}(x, y), \\ a = \operatorname{colon} \left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2} \right), \quad \omega_{n,k} = \pi^2(a_1^2 n^2 + a_2^2 k^2), \\ e_{n,k}(x, y) = 2 \sin(n\pi x) \sin(k\pi y), \quad n, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Поэтому для построения асимптотики автоколебаний краевой задачи (5) воспользуемся методом квазинормальных форм [8], смыкающимся в идейном плане с асимптотическим методом Крылова–Боголюбова–Митропольского [9].

В данном случае, отталкиваясь от выражений (6), подставим в (5) ряд по нечетным степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\varepsilon} u_0(t, \tau, x, y) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_1(t, \tau, x, y) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \\ u_0 &= \sum_{n,k=1}^{\infty} [\xi_{n,k}(\tau) a \exp(i\omega_{n,k}t) + \bar{\xi}_{n,k}(\tau) \bar{a} \exp(-i\omega_{n,k}t)] e_{n,k}(x, y). \end{aligned} \quad (7)$$

Подлежащие определению комплексные амплитуды $\xi_{n,k}$ таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_{n,k}^2 |\xi_{n,k}|^2$ (в этом случае $u_0 \in \overset{0}{W}_2^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$). Приравнявая затем коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, для нахождения u_1 получим краевую задачу

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - D L u_1 = -\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + u_0 + \nu L u_0 + F(u_0), \quad u_1|_{\partial\Omega} = 0. \quad (8)$$

Всюду ниже будем предполагать, что между собственными частотами $\omega_{n,k}$ отсутствуют всевозможные резонансные соотношения 3-го порядка, т.е.

$$\omega_{n_0,k_0} \neq m_1 \omega_{n_1,k_1} + m_2 \omega_{n_2,k_2} + m_3 \omega_{n_3,k_3} \quad (9)$$

для любого набора индексов (n_j, k_j) , $j = 0, 1, 2, 3$, и для любого целочисленного вектора $(m_1, m_2, m_3) : |m_1| + |m_2| + |m_3| = 3$ (тождественные резонансы $\omega_{n,k} = \omega_{n,k} + \omega_{m,s} - \omega_{m,s}$ из рассмотрения, естественно, исключаются). Подчеркнем, что выполнения неравенств (9) всегда можно добиться за счет подходящего выбора параметров a_1 и a_2 . Например, эти неравенства заведомо выполняются, если отношение a_1^2/a_2^2 иррационально. С другой стороны, случай $a_1 = a_2$ из рассмотрения исключается, т.к. здесь $\omega_{n,k} = \omega_{k,n}$, а значит, имеются нетождественные резонансы вида

$$\omega_{n,k} = 2\omega_{k,n} - \omega_{n,k}, \quad \omega_{n,k} = \omega_{n,k} + \omega_{m,s} - \omega_{s,m}.$$

Обозначим через $f_{n,k}(\tau)$ векторный коэффициент при гармонике $\exp(i\omega_{n,k}t) e_{n,k}(x, y)$ в неоднородности из (8). В предположениях (9) функция u_1 может быть найдена из (8) в виде формального тригонометрического ряда в том и только том случае, если

$$(f_{n,k}(\tau), a) \equiv 0, \quad n, k = 1, 2, \dots,$$

где $(\cdot, \cdot)$ — евклидово скалярное произведение в комплексификации $\mathbb{R}^2$. Эти равенства будем рассматривать, в свою очередь, как уравнения для определения неизвестных амплитуд $\xi_{n,k}$. В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{n,k}}{d\tau} = (1 - \nu\omega_{n,k})\xi_{n,k} - \varkappa \left[\frac{9}{4}\xi_{n,k}|\xi_{n,k}|^2 + 3\xi_{n,k} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} |\xi_{m,k}|^2 + \right. \\ \left. + 3\xi_{n,k} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} |\xi_{n,m}|^2 + 2\xi_{n,k} \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, r \neq k}}^{\infty} |\xi_{m,r}|^2 \right], \quad n, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

В дальнейшем, однако, удобнее работать с системой для величин $\rho_{n,k} = |\xi_{n,k}|^2$, которая после замены $2\tau \rightarrow \tau$ приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{n,k}}{d\tau} = \left(1 - \nu\omega_{n,k} - \frac{9}{4}\rho_{n,k} - 3 \sum_{m \neq k} \rho_{n,m} - 3 \sum_{m \neq n} \rho_{m,k} - 2 \sum_{m \neq n, r \neq k} \rho_{m,r} \right) \rho_{n,k}, \\ n, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим, что хотя система (11) и получена из исходной задачи (5) приближенным способом, тем не менее она содержит определенную информацию об аттракторах последней. Для того чтобы сформулировать строгий результат, будем рассматривать систему (11) как абстрактное параболическое уравнение (см., например, [10]) в пространстве последовательностей $\rho = \{\rho_{n,k}, n, k = 1, 2, \dots\}$ с нормой

$$\|\rho\| = \sum_{n,k=1}^{\infty} \omega_{n,k}^2 |\rho_{n,k}| < \infty.$$

Из структуры входящих в систему (11) нелинейностей и из дифференциальных неравенств

$$\frac{d\rho_{n,k}}{d\tau} \leq (1 - \nu\omega_{n,k})\rho_{n,k}, \quad n, k = 1, 2, \dots,$$

следует, что решение $\rho = \rho(\tau)$ этой системы с произвольным начальным условием $\rho(0) = \rho_0 \in K_+$, где K_+ — конус векторов с неотрицательными координатами, определено на полуоси $\tau \geq 0$ и остается при всех τ в конусе K_+ .

Предположим, что система (11) имеет состояние равновесия с конечным числом ненулевых положительных координат

$$\rho_{n_1, k_1}, \dots, \rho_{n_p, k_p}, \quad p \geq 1. \quad (12)$$

Тогда система (10) имеет, очевидно, автомодельный p -мерный тор вида

$$\xi_{n_j, k_j}(\tau) = \sqrt{\rho_{n_j, k_j}} \exp(i\psi_j \tau), \quad j = 1, \dots, p, \quad \xi_{n, k} = 0 \quad \text{при} \quad (n, k) \neq (n_j, k_j). \quad (13)$$

Справедливо следующее утверждение [8, 11].

ТЕОРЕМА 1. Любому автомодельному тору системы (10) вида (13), экспоненциально орбитально устойчивому или дихотомичному, в краевой задаче (5) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует p -мерный инвариантный тор той же устойчивости, задающийся равенствами

$$u = \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=1}^p [a \exp(i\varphi_j) + \bar{a} \exp(-i\varphi_j)] \sqrt{\rho_{n_j, k_j}} e_{n_j, k_j}(x, y) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_*(\varphi, x, y, \varepsilon), \quad (14)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon \psi + \varepsilon^2 \psi_*(\varphi, \varepsilon).$$

Здесь $\varphi = \text{colon}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$, $\psi = \text{colon}(\psi_1, \dots, \psi_p)$, $\omega = \text{colon}(\omega_{n_1, k_1}, \dots, \omega_{n_p, k_p})$, а 2π -периодические по φ функции u_* и ψ_* ограничены равномерно по ε , φ (вместе с любым фиксированным числом производных по φ) в метрике $W_2^0(\Omega, \mathbb{R}^2)$ и $\mathbb{R}^p$, соответственно.

Итак, вопрос о динамике краевой задачи (5) по параметру ν сводится к аналогичному вопросу для ее квазинормальной формы (11). В связи с этим обратим внимание на две характерные особенности последней.

Во-первых, при любом фиксированном ν за ее аттракторы в инвариантном конусе K_+ отвечает конечномерная система, получающаяся из (11), если положить равными нулю те компоненты $\rho_{n, k}$, для которых $1 - \nu \omega_{n, k} \leq 0$. Действительно, из структуры входящих в (11) уравнений следует, что упомянутые компоненты заведомо стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Очевидно также, что при $\nu \rightarrow 0$ размерность соответствующей конечномерной системы неограниченно растет.

Во-вторых, при $\nu = 0$ любое состояние равновесия системы (11) с конечным числом ненулевых положительных координат (12) экспоненциально неустойчиво, причем бесконечна размерность его неустойчивого многообразия. Для того чтобы убедиться в этом, положим $\eta_j = \rho_{n_j, k_j}$, $j = 1, \dots, p$, и рассмотрим систему для нахождения η_j , имеющую вид

$$\alpha_{j,1}\eta_1 + \alpha_{j,2}\eta_2 + \dots + \alpha_{j,p}\eta_p = 1, \quad j = 1, \dots, p, \quad (15)$$

где $\alpha_{j,j} = 9/4$, $j = 1, \dots, p$, а все остальные коэффициенты $\alpha_{j,k}$, $j \neq k$, равны 2 или 3. Тем самым, заменяя в (15) все $\alpha_{j,k}$ при $j \neq k$ на 2, приходим к серии оценок

$$2\eta_1 + \dots + 2\eta_{j-1} + \frac{9}{4}\eta_j + 2\eta_{j+1} + \dots + 2\eta_p \leq 1, \quad j = 1, \dots, p.$$

Складывая все эти неравенства, убеждаемся, что

$$S \equiv \sum_{j=1}^p \eta_j \leq \frac{4p}{8p+1}. \quad (16)$$

Наконец, рассмотрим систему в вариациях на интересующем нас состоянии равновесия. Если заметить, что любое ее уравнение с индексами (m, r) , для которых $m \neq n_j$ и $r \neq k_j$, $j = 1, \dots, p$, имеет вид $dh_{m,r}/d\tau = (1 - 2S)h_{m,r}$, то из оценки (см. (16))

$$1 - 2S \geq \frac{1}{8p+1} \quad (17)$$

требуемый факт вытекает очевидным образом.

Введем в рассмотрение отвечающую (11) укороченную систему

$$\frac{d\rho_{n,k}}{d\tau} = \left(1 - \nu\omega_{n,k} - \frac{9}{4}\rho_{n,k} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^N \rho_{n,m} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \rho_{m,k} - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, r \neq k}}^N \rho_{m,r} \right) \rho_{n,k},$$

$$n, k = 1, 2, \dots, N, \quad (18)$$

предполагая $N = N(\nu)$ настолько большим, что $1 - \nu\omega_{n,k} \leq 0$ при всех (n, k) , для которых $n \geq N + 1$ или $k \geq N + 1$. Рассмотрим, далее, все экспоненциально устойчивые состояния равновесия (если они существуют) системы (18), лежащие в конусе K_+ , и обозначим их количество через $N_1 = N_1(\nu)$. Кроме того, каждому такому состоянию равновесия поставим в соответствие число $p \geq 0$, равное количеству его ненулевых координат, и положим $N_2(\nu) = \min p$ (минимум берется по всем устойчивым состояниям равновесия из K_+).

ТЕОРЕМА 2. *Имеют место предельные равенства*

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} N_j(\nu) = \infty, \quad j = 1, 2. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обоснование первого из равенств (19) носит конструктивный характер. А именно при каждом достаточно малом $\nu > 0$ будет указан конкретный набор устойчивых состояний равновесия системы (11), количество которых неограниченно возрастает при $\nu \rightarrow 0$.

Рассмотрим числовую последовательность

$$\bar{\nu}_N = 3[\pi^2(a_1^2 + a_2^2)N(16N^2 - 9N - 4)]^{-1}, \quad N = 1, 2, \dots,$$

монотонно стремящуюся к нулю при $N \rightarrow \infty$, и будем считать, что параметр ν удовлетворяет неравенствам

$$\bar{\nu}_{N+1} < \nu < \bar{\nu}_N. \quad (20)$$

Непосредственная проверка показывает, что в этом случае система (11) имеет группу состояний равновесия, у которых ненулевыми являются только координаты

$$\rho_{j,k_j} = \eta_j, \quad \eta_j = 4[1 - 2S - \nu\pi^2(a_1^2 j^2 + a_2^2 k_j^2)] > 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$S = \frac{4N}{8N+1} \left[1 - \frac{\nu\pi^2}{6}(a_1^2 + a_2^2)(N+1)(2N+1) \right], \quad (21)$$

где $(k_1, k_2, \dots, k_N)$ — всевозможные перестановки, получающиеся из целочисленного вектора $(1, 2, \dots, N)$. Количество же таких состояний равновесия равно, очевидно, $N!$.

Покажем теперь, что все положения равновесия (21) экспоненциально устойчивы. С этой целью фиксируем какое-нибудь из них, линеаризуем на нем систему (11) и заметим,

что получившаяся система в вариациях имеет блочно-диагональную структуру. Точнее говоря, она распадается на систему из N уравнений

$$\frac{dh}{d\tau} = -Bh, \quad h = (h_{1,k_1}, \dots, h_{N,k_N}), \quad (22)$$

где элементы $b_{j,r}$ матрицы B задаются равенствами

$$b_{j,j} = \frac{9}{4}\eta_j, \quad j = 1, \dots, N; \quad b_{j,r} = 2\eta_j, \quad j, r = 1, \dots, N, \quad j \neq r,$$

и на серию скалярных уравнений. А именно при $m \leq N$, $l \leq N$, $l \neq k_m$ получаем уравнение

$$\frac{dh_{m,l}}{d\tau} = [1 - 2S - \rho_{m,k_m} - \rho_{l_1,l} - \nu\pi^2(a_1^2 m^2 + a_2^2 l^2)]h_{m,l}, \quad (23)$$

где номер l_1 таков, что $k_{l_1} = l$. При $m \leq N$, $l > N$ получаем уравнение

$$\frac{dh_{m,l}}{d\tau} = [1 - 2S - \rho_{m,k_m} - \nu\pi^2(a_1^2 m^2 + a_2^2 l^2)]h_{m,l}, \quad (24)$$

а при $m > N$, $l \leq N$ — уравнение

$$\frac{dh_{m,l}}{d\tau} = [1 - 2S - \rho_{l_1,l} - \nu\pi^2(a_1^2 m^2 + a_2^2 l^2)]h_{m,l}, \quad (25)$$

где по-прежнему $k_{l_1} = l$. Наконец, при $m \geq N+1$, $l \geq N+1$ имеем уравнение

$$\frac{dh_{m,l}}{d\tau} = [1 - 2S - \nu\pi^2(a_1^2 m^2 + a_2^2 l^2)]h_{m,l}. \quad (26)$$

Анализ свойств устойчивости системы (22) сводится, очевидно, к исследованию корней уравнения

$$\det(\lambda I + B) = 0, \quad (27)$$

где I — единичная матрица. Покажем, что все они вещественны и отрицательны.

Для того чтобы раскрыть определитель в уравнении (27), сначала вычтем его последний столбец из всех предыдущих. Затем добавим к последней строке получившегося определителя все остальные его строки, умноженные соответственно на

$$\frac{\frac{1}{4}\eta_N + \lambda}{\frac{1}{4}\eta_j + \lambda}, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

В итоге уравнение (27) преобразуется к более удобному для последующего анализа виду

$$\left(\frac{1}{4}\eta_1 + \lambda\right) \left(\frac{1}{4}\eta_2 + \lambda\right) \dots \left(\frac{1}{4}\eta_N + \lambda\right) \left[1 + 2 \sum_{j=1}^N \frac{\eta_j}{\frac{1}{4}\eta_j + \lambda}\right] = 0. \quad (28)$$

Рассмотрим сначала случай, когда все фигурирующие в (21) компоненты η_j , $j = 1, \dots, N$, различны. Тогда, как нетрудно заметить, числа $\lambda = -\eta_j/4$, $j = 1, \dots, N$, не являются решениями уравнения (28), а значит, оно эквивалентно уравнению

$$\sum_{j=1}^N \frac{\eta_j}{\frac{1}{4}\eta_j + \lambda} = -\frac{1}{2}. \quad (29)$$

Последнее же имеет на полуоси $\lambda < 0$ ровно N различных корней.

Предположим теперь, что некоторые из компонент η_j совпадают, а точнее говоря, пусть имеется $m < N$ различных чисел η_{j_s} , $s = 1, \dots, m$, каждое из которых повторяется r_s раз, причем $r_1 + \dots + r_m = N$. Тогда уравнение (28) имеет, очевидно, корни $\lambda = -\eta_{j_s}/4$ кратности $r_s - 1$, $s = 1, \dots, m$. Остальные же его корни по-прежнему определяются из уравнения (29), которое в данном случае имеет ровно m различных отрицательных решений.

На следующем этапе обратимся к уравнению (23) и покажем, что

$$1 - 2S - \rho_{m,k_m} - \rho_{l_1,l} - \nu\pi^2(a_1^2 m^2 + a_2^2 l^2) < 0.$$

Учитывая здесь явный вид величин ρ_{m,k_m} и $\rho_{l_1,l}$ (см. (21)), перепишем требуемое неравенство в эквивалентной форме:

$$7(1 - 2S) > [3(a_1^2 m^2 + a_2^2 k_m^2) + 3(a_1^2 l_1^2 + a_2^2 l^2) + a_1^2 l_1^2 + a_2^2 k_m^2] \nu \pi^2. \quad (30)$$

Опираясь затем на неравенство

$$1 - 2S > N^2(a_1^2 + a_2^2) \nu \pi^2, \quad (31)$$

эквивалентное условию $\nu < \bar{\nu}_N$ (см. (20)), и на очевидные оценки

$$\begin{aligned} a_1^2 m^2 + a_2^2 k_m^2 &\leq (a_1^2 + a_2^2) N^2, & a_1^2 l_1^2 + a_2^2 l^2 &\leq (a_1^2 + a_2^2) N^2, \\ a_1^2 l_1^2 + a_2^2 k_m^2 &\leq (a_1^2 + a_2^2) N^2, \end{aligned} \quad (32)$$

убеждаемся, что левая часть (30) действительно строго больше правой.

Рассмотрим, далее, уравнение (24) и убедимся в справедливости соответствующего неравенства

$$1 - 2S - \rho_{m,k_m} - \nu\pi^2(a_1^2 m^2 + a_2^2 l^2) < 0.$$

С этой целью перепишем его в эквивалентном виде

$$3(1 - 2S) > [3(a_1^2 m^2 + a_2^2 k_m^2) + a_2^2 (k_m^2 - l^2)] \nu \pi^2.$$

Учитывая здесь оценку (31), первое неравенство (32) и очевидное неравенство $l > k_m$, получим требуемый факт.

Анализ уравнения (25) идентичен анализу уравнения (24). Действительно, в этом случае неравенство

$$1 - 2S - \rho_{l_1, l} - \nu \pi^2 (a_1^2 m^2 + a_2^2 l^2) < 0$$

эквивалентно неравенству

$$3(1 - 2S) > [3(a_1^2 l_1^2 + a_2^2 l^2) + a_1^2 (l_1^2 - m^2)] \nu \pi^2,$$

справедливость которого следует из (31), второй оценки (32) и неравенства $m > l_1$.

Для завершения доказательства устойчивости состояний равновесия (21) осталось рассмотреть уравнение (26), а точнее, убедиться в справедливости неравенства

$$1 - 2S - \nu \pi^2 (a_1^2 m^2 + a_2^2 l^2) < 0$$

при всех $m \geq N + 1$ и $l \geq N + 1$. В связи с этим обратимся к условию

$$1 - 2S < (N + 1)^2 (a_1^2 + a_2^2) \nu \pi^2,$$

эквивалентному требованию $\nu > \bar{\nu}_{N+1}$, и к очевидной оценке

$$a_1^2 m^2 + a_2^2 l^2 \geq (a_1^2 + a_2^2)(N + 1)^2,$$

из которых нужное неравенство и следует.

Итак, справедливость предельного равенства (19) при $j = 1$ установлена в случае, если $\nu \rightarrow 0$, $\nu \neq \bar{\nu}_N$, $N = 1, 2, \dots$. Если же $\nu = \bar{\nu}_N$, то обращаются в нуль координаты ρ_{N, k_N} у тех состояний равновесия (21), для которых $k_N = N$ (количество таких состояний равновесия равно $(N - 1)!$). Что касается оставшихся $N! - (N - 1)!$ положений равновесия (21), то они сохраняют свою устойчивость и при $\nu = \bar{\nu}_N$. Доказательство этого факта проводится по той же схеме, что и выше. Единственное отличие состоит в том, что хотя теперь неравенство (31) заменяется равенством, зато становятся строгими первые две оценки (32).

Для обоснования второго предельного равенства (19) достаточно показать, что для любого натурального p найдется такое $\nu_0 = \nu_0(p) > 0$, что при всех $0 < \nu \leq \nu_0$ каждое состояние равновесия системы (11) с количеством ненулевых положительных координат, равным p , экспоненциально неустойчиво.

В предположении противного существуют такое натуральное p_0 и такая последовательность $\nu_m > 0$, $\nu_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, что при $\nu = \nu_m$ система (11) имеет хотя бы одно устойчивое положение равновесия с положительными координатами

$$\rho_{n_1, k_1}, \rho_{n_2, k_2}, \dots, \rho_{n_{p_0}, k_{p_0}}. \quad (33)$$

Заметим, что, переходя, если это необходимо, от последовательности ν_m к соответствующей подпоследовательности, всегда можно добиться выполнения для номеров $n_j = n_j(\nu_m)$, $k_j = k_j(\nu_m)$, $j = 1, \dots, p_0$, предельных равенств

$$\lim_{m \rightarrow \infty} n_j = n_j^0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} k_j = k_j^0, \quad j = 1, \dots, p_0, \quad (34)$$

где n_j^0, k_j^0 могут быть как конечными натуральными числами, так и равняться бесконечности.

Положим $N_0 = \max\{n_j^0, k_j^0\}$, где максимум берется только по конечным предельным значениям из (34) (если таковых нет, то полагаем $N_0 = 0$). Линеаризуем затем систему (11) при $\nu = \nu_m$ на состоянии равновесия (33) и выпишем уравнение получившейся системы в вариациях с номерами $(N_0 + 1, N_0 + 1)$. Из способа выбора N_0 следует, что при всех достаточно больших m это уравнение принимает вид

$$\frac{dh_{N_0+1, N_0+1}}{d\tau} = [1 - 2S - (N_0 + 1)^2(a_1^2 + a_2^2)\nu_m \pi^2] h_{N_0+1, N_0+1}, \quad (35)$$

где

$$S = \sum_{j=1}^{p_0} \rho_{n_j, k_j},$$

причем сохраняется (вместе с доказательством) аналогичная (17) оценка $1 - 2S \geq 1/(8p_0 + 1)$. Учитывая в (35) эту оценку, убеждаемся в справедливости при $m \rightarrow \infty$ неравенства

$$1 - 2S - (N_0 + 1)^2(a_1^2 + a_2^2)\nu_m \pi^2 > 0,$$

противоречащего предполагаемой устойчивости состояний равновесия (33). Теорема 2 полностью доказана.

Следует отметить, что семейством (21) заведомо не исчерпываются все устойчивые состояния равновесия системы (11). Действительно, при уменьшении параметра ν и при прохождении его через критическое значение $\bar{\nu}_{N+1}$ у состояний равновесия (21) появляется дополнительная положительная координата $\rho_{N+1, N+1}$, однако при $\bar{\nu}_{N+2} < \nu < \bar{\nu}_{N+1}$ общее число положений равновесия (21) равно уже $(N + 1)!$, а не $N!$. Тем самым, по крайней мере при $0 < \nu - \bar{\nu}_{N+1} \ll 1$, у системы (11) заведомо существует еще не менее $(N + 1)! - N!$ устойчивых состояний равновесия с числом ненулевых координат, равным $N + 1$.

3. СЛУЧАЙ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НЕЙМАНА

Весьма интересно, что то же самое уравнение (1), рассматриваемое в прямоугольнике с условиями Неймана, проявляет иные динамические свойства. Для того чтобы убедиться в этом, применим указанный выше метод квазинормальных форм к краевой задаче

$$u_t = DLu + \varepsilon(u + \nu Lu) + F(u), \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = u_y|_{y=0} = u_y|_{y=1} = 0, \quad (36)$$

получающейся из (5) заменой граничных условий. С этой целью подставим в (36) выражения (7), считая теперь, что в (6) $e_{n,k}(x, y) = 2 \cos(n\pi x) \cos(k\pi y)$, $n, k = 0, 1, \dots$,

и предполагая по-прежнему выполненными условия нерезонансности (9). В итоге после соответствующих вычислений вместо (11) получим систему

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{n,k}}{d\tau} &= \left(1 - \nu\omega_{n,k} - \frac{9}{4}\rho_{n,k} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \rho_{n,m} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \rho_{m,k} - 6\rho_{n,0} - 6\rho_{0,k} - \right. \\
&\quad \left. - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, r \neq k}}^{\infty} \rho_{m,r} - 4 \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{\infty} \rho_{0,r} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \rho_{m,0} - 8\rho_{0,0} \right) \rho_{n,k}, \quad n, k = 1, 2, \dots, \\
\frac{d\rho_{n,0}}{d\tau} &= \left(1 - \nu\omega_{n,0} - 3\rho_{n,0} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \rho_{m,0} - \right. \\
&\quad \left. - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \rho_{0,m} - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \rho_{m,r} - 8\rho_{0,0} \right) \rho_{n,0}, \quad n \geq 1, \\
\frac{d\rho_{0,k}}{d\tau} &= \left(1 - \nu\omega_{0,k} - 3\rho_{0,k} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \rho_{0,m} - \right. \\
&\quad \left. - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \rho_{m,0} - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ r \neq k}}^{\infty} \rho_{m,r} - 8\rho_{0,0} \right) \rho_{0,k}, \quad k \geq 1, \\
\frac{d\rho_{0,0}}{d\tau} &= \left(1 - 4\rho_{0,0} - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \rho_{0,m} - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \rho_{m,0} - 2 \sum_{m,r=1}^{\infty} \rho_{m,r} \right) \rho_{0,0}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Для того чтобы изучить динамику системы (37) при $\nu \rightarrow 0$, рассмотрим сразу предельный случай $\nu = 0$. Отметим, что в отличие от системы (11), которая при $\nu = 0$ не содержит никакой информации об аттракторах исходной задачи (5), здесь ситуация иная: при $\nu = 0$ у системы (37) имеется счетное число экспоненциально устойчивых состояний равновесия с одной ненулевой координатой $\rho_{n,0} = 1/3$, $n = 1, 2, \dots$, $\rho_{0,k} = 1/3$, $k = 1, 2, \dots$, или $\rho_{0,0} = 1/4$ (других устойчивых состояний равновесия у нее в рассматриваемом случае обнаружить не удастся). Таким образом, опираясь на аналог теоремы 1, который здесь по-прежнему справедлив, убеждаемся, что при $\nu \rightarrow 0$ количество устойчивых циклов краевой задачи (36), зависящих только от одной пространственной переменной x или y , неограниченно растет. Добавим еще, что, как показано в статье [12], при $\nu = 0$ данная краевая задача имеет уже счетное число таких циклов, причем в исходной переменной $w = u_1 + iu_2$ все они приобретают автомодельный вид

$$w = w_0(x) \exp(i\alpha_0 t) \quad \text{или} \quad w = w_0(y) \exp(i\alpha_0 t), \quad \alpha_0 = \text{const}.$$

4. СВЯЗЬ С ПРОБЛЕМОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Из теорем 1 и 2 следует, что при некоторой общности положения, связанной с выбором a_1, a_2 , и при $\nu \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ количество устойчивых инвариантных торов вида (14) у задачи (5) неограниченно растет, причем неограниченно увеличиваются и размерности всех этих торов.

В случае $\nu = 0$ никаких строгих утверждений об аттракторах задачи (5) получить не удастся. Ясно только, что все ее бифурцирующие из нуля при $\varepsilon > 0$ циклы и торы заведомо неустойчивы. Однако проделанный анализ, относящийся к случаю $\nu > 0$, позволяет предположить, что в пределе, т.е. при $\nu \rightarrow 0$, установившиеся режимы задачи (5) приобретают турбулентный характер. Последнее означает, что в этом случае стохастическое поведение решений сопровождается ростом их W_2^2 -нормы, в то время как их C -норма остается ограниченной.

Некоторое представление о турбулентных режимах можно получить из приближенных равенств

$$u = \frac{4\sqrt{\varepsilon}}{1 + 8N} \sum_{j=1}^N [a \exp(i\omega_{j,k_j} t) + \bar{a} \exp(-i\omega_{j,k_j} t)] e_{j,k_j}(x, y), \quad N \gg 1, \quad (38)$$

получающихся из (7) с учетом (21) при $\nu = 0$. Действительно, при $N \rightarrow \infty$ и при любом t норма функции (38) в пространстве $\overset{0}{W}_2^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ стремится к бесконечности, а ее норма в пространстве $C(\Omega; \mathbb{R}^2)$ ограничена равномерно по N и $t \in \mathbb{R}$.

Итак, переход в краевой задаче (5) при $\nu \rightarrow 0$ к турбулентности полностью соответствует известному “сценарию Ландау” [13], который связывал данный переход с бифуркацией инвариантных торов все более высоких размерностей. Более того, проделанные выше исследования позволяют дополнить этот “сценарий” следующими двумя характерными аспектами.

А. Буферность. О явлении буферности принято говорить, если в фазовом пространстве некоторой системы при подходящем выборе параметров можно гарантировать существование любого фиксированного числа однотипных аттракторов (циклов, торов и т.д.). В параболических системах типа реакция–диффузия впервые данный феномен был обнаружен по инициативе Ю. С. Колесова [14] при численном анализе одной конкретной математической модели из экологии. Подробное изучение феномена буферности в математических моделях физики и биологии можно найти в статьях [12, 15–17]. В нашем случае буферность имеет место, т.к. при $\nu \rightarrow 0$ количество устойчивых инвариантных торов задачи (5) растет примерно как $[\nu^{-1/3}]!$ ($[\cdot]$ – целая часть). Таким образом, при уменьшении ν возникает все большее количество локальных “очагов” турбулентности, которые при $\nu = 0$ объединяются, по всей видимости, в некий единый мультиаттрактор бесконечной размерности.

Б. Равноправие мод. Другая, причем весьма неожиданная тенденция, наблюдающаяся при $\nu \rightarrow 0$, состоит в том, что происходит постепенное выравнивание амплитуд

колебаний на низких и высоких модах (см. (38)). Тем самым удастся пролить дополнительный свет на природу турбулентных режимов, понимая их как результат равноправного взаимодействия большого числа мод.

5. ПЕРЕХОД К ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ

Из общих соображений ясно, что обнаруженный в краевой задаче (5) способ перехода к турбулентности достаточно универсален, т.к. само уравнение Гинзбурга–Ландау является фундаментальным во многих вопросах математической физики. Однако, что отнюдь не очевидно, область применимости полученных выше результатов не ограничивается только параболическими системами. Как будет показано ниже, система (11) может возникать при исследовании автоколебаний и у некоторого класса нелинейных волновых уравнений в плоской области.

В прямоугольнике $\Omega_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$ рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \nu \frac{\partial}{\partial t} \Delta u + u = \sqrt{\varepsilon} a^2 \Delta u + f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad u|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad (39)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, параметры $a, \nu > 0$ имеют порядок единицы, u – скалярная функция, а тейлоровское разложение функции $f(u, v) \in C^\infty$ в нуле начинается с квадратичных слагаемых.

В качестве фазового пространства краевой задачи (39) возьмем $(u, \frac{\partial u}{\partial t}) \in \overset{0}{W}_2^3(\Omega_0) \times \overset{0}{W}_2^2(\Omega_0)$ (см. раздел 1). Для доказательства локальной однозначной разрешимости в указанном пространстве смешанной задачи, отвечающей задаче (39), положим $v_1 = Bu$, $v_2 = u_t$, где B – арифметический квадратный корень из оператора $I - \sqrt{\varepsilon} a^2 \Delta$; I – единичный оператор.

В итоге в пространстве $E = \overset{0}{W}_2^2(\Omega_0) \times \overset{0}{W}_2^2(\Omega_0)$ получим систему

$$v_t = A_0 Bv + \sqrt{\varepsilon} A_1 (I - B^2)v + \varepsilon A_2 v + F(v), \quad (40)$$

где $v = \text{colon}(v_1, v_2)$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nu/a^2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F(v) = \text{colon}(0, f(B^{-1}v_1, v_2)).$$

Опираясь на метод разложения в ряд Фурье по системе собственных функций оператора Лапласа, убеждаемся, что оператор $A_0 B + \sqrt{\varepsilon} A_1 (I - B^2) + \varepsilon A_2$ порождает в пространстве E сильно непрерывную по $t \geq 0$ полугруппу линейных ограниченных операторов $T(t)$. Дополним систему (40) произвольным начальным условием $v|_{t=0} = v_0 \in E$ и перейдем с помощью полугруппы $T(t)$ от рассматриваемой начальной задачи к интегральному уравнению

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-\tau)F(v(\tau)) d\tau.$$

Учитывая, наконец, что отображение $F(\cdot): E \rightarrow E$ является гладким по Фреше (см., например, [18]), и применяя к данному уравнению принцип сжимающих отображений, получим требуемый факт.

Заметим, что при $\nu = 0$ краевая задача (39) гиперболическая, а при учете слагаемого $-\varepsilon\nu(\Delta u)_t$, характеризующего малое упругое трение, спектр устойчивости ее нулевого решения состоит из корней уравнений

$$\lambda^2 + \varepsilon(\nu\mu_k - 1)\lambda + 1 + \sqrt{\varepsilon}a^2\mu_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где μ_k ($k \geq 1$) – занумерованные в порядке возрастания собственные значения оператора $-\Delta$. Нетрудно видеть, что корни этих уравнений распадаются на две ветви – параболическую ($\operatorname{Re} \lambda_k \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$) и гиперболическую ($\lambda_k \rightarrow -a^2/(\sqrt{\varepsilon}\nu)$ при $k \rightarrow \infty$). Отсюда, в частности, следует бесконечная дифференцируемость решений задачи (39) по t . Гладкость же по пространственным переменным не меняется, оставаясь такой же, как и при $t = 0$.

Для удобства дальнейшего анализа, выполняя в задаче (39) замены $x/l_1 \rightarrow x$, $y/l_2 \rightarrow y$, преобразуем ее к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \nu \frac{\partial}{\partial t} Lu + u = \sqrt{\varepsilon} Lu + f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (41)$$

где, как и в (5),

$$L \equiv a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad a_j = \frac{a}{l_j}, \quad j = 1, 2, \\ \Omega = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}.$$

Построение автоколебаний задачи (41) базируется на уже применявшемся выше методе квазинормальных форм, который в данном случае имеет определенную специфику. А именно подставим в уравнение (41) разложение

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(t, s, \tau, x, y) + \varepsilon u_1(t, s, \tau, x, y) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_2(t, s, \tau, x, y) + \dots, \quad (42)$$

где $s = \sqrt{\varepsilon} t/2$, $\tau = \varepsilon t/2$, все функции 2π -периодические по t и

$$u_0 = \eta_0(s, \tau, x, y) \exp(it) + \bar{\eta}_0(s, \tau, x, y) \exp(-it). \quad (43)$$

Приравнявая коэффициенты при ε , для определения функции u_1 получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = c_0(s, \tau, x, y) + c_1(s, \tau, x, y) \exp(it) + \bar{c}_1(s, \tau, x, y) \exp(-it) + \\ + c_2(s, \tau, x, y) \exp(2it) + \bar{c}_2(s, \tau, x, y) \exp(-2it), \quad (44)$$

в котором переменные s, τ, x, y рассматриваются как параметры.

Анализ уравнения (44) распадается на два этапа. Сначала из условия $c_1 \equiv 0$ его разрешимости в классе 2π -периодических функций для фигурирующей в (43) комплексной амплитуды η_0 приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial s} = -iL\eta_0, \quad \eta_0|_{\partial\Omega} = 0. \quad (45)$$

Комплексная амплитуда η_0 определяется из задачи (45) в виде

$$\eta_0 = \sum_{n,k=1}^{\infty} \xi_{n,k}(\tau) \exp(i\omega_{n,k}s) e_{n,k}(x, y), \quad (46)$$

где $\omega_{n,k}$ и $e_{n,k}(x, y)$ те же, что и в (6), а пока произвольные комплексные амплитуды $\xi_{n,k}$ таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_{n,k}^3 |\xi_{n,k}|^2$ (в этом случае $\eta_0 \in \overset{0}{W}_2^3$ по переменным x, y). Затем из уравнения (44) находим функцию

$$u_1 = u_1^0(t, s, \tau, x, y) + \eta_1(s, \tau, x, y) \exp(it) + \bar{\eta}_1(s, \tau, x, y) \exp(-it),$$

где u_1^0 содержит по t только нулевые и вторые гармоники, а амплитуда η_1 произвольна.

Приравнявая в (41) коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, для функции u_2 получаем аналогичное (44) обыкновенное дифференциальное уравнение, а из условия его разрешимости в требуемом классе функций выводим аналогичную (45) краевую задачу

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial s} = -iL\eta_1 + g(s, \tau, x, y), \quad \eta_1|_{\partial\Omega} = 0. \quad (47)$$

Здесь

$$g \equiv -\frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} + \eta_0 + \nu L\eta_0 - \varkappa \eta_0 |\eta_0|^2,$$

а комплексный параметр $\varkappa$ задается равенством

$$\varkappa = -[\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3) + \beta_2 + 3\beta_4] + \frac{i}{3}[10\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_3) + 4\alpha_3^2 + \alpha_2^2 + 9\beta_1 + 3\beta_3], \quad (48)$$

где α_j, β_j – коэффициенты тейлоровского разложения

$$f(u, v) = \alpha_1 u^2 + \alpha_2 uv + \alpha_3 v^2 + \beta_1 u^3 + \beta_2 u^2 v + \beta_3 uv^2 + \beta_4 v^3 + \dots$$

Предположим для простоты, что отношение a_1^2/a_2^2 иррационально. Тогда функция η_1 может быть найдена из (47) в виде формального тригонометрического ряда в том и только в том случае, если в неоднородности $g(s, \tau, x, y)$ отсутствуют гармоники вида $\exp(i\omega_{n,k}s) e_{n,k}(x, y)$, $n, k = 1, 2, \dots$. Поэтому приравняем коэффициенты при указанных гармониках к нулю. В результате для фигурирующих в (46) амплитуд $\xi_{n,k}$ приходим к системе (10), в которой $\varkappa$ определяется равенством (48).

Обратим внимание, что, поскольку при $\nu > 0$ краевая задача (41) по своим свойствам близка к параболической, для нее остаются в силе построения работы [8]. Поэтому и здесь каждому автомодельному тору (13) системы (10), экспоненциально орбитально устойчивому или дихотомичному, при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ в исходной краевой задаче (41) соответствует инвариантный тор той же устойчивости с асимптотикой (42), (43), (46). Отметим, наконец, что при условии $\operatorname{Re} \varkappa > 0$ для $\rho_{n,k} = |\xi_{n,k}|^2$ получается (после подходящих перенормировок) в точности система (11). Таким образом, описанный выше “сценарий” перехода к турбулентности может наблюдаться при $\nu \rightarrow 0$ и в рамках нелинейного волнового уравнения вида (39).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00157).

Список литературы

- [1] *А. А. Андронов (мл.), А. Л. Фабрикант.* Затухание Ландау, ветровые волны и свисток. В сб.: Нелинейные волны. Ред. А.В. Гапонов-Грехов. М.: Наука, 1979. С. 68–104.
- [2] *Г. Николис, И. Пригожин.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
- [3] *P. S. Nagai.* SIAM J. Appl. Math. 1982. V. 42. № 4. P. 762–786.
- [4] *Б. Н. Белинцев.* УФН. 1983. Т. 141. № 1. С. 55–101.
- [5] *Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский.* О классификации решений систем нелинейных диффузионных уравнений в окрестности точки бифуркации. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 28. Ред. Р.В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1986. С. 207–313.
- [6] *Ю. С. Колесов.* Задача паразит-хозяин. В сб.: Динамика биологических популяций. Ред. И. Н. Блохина и др. Горький: Горьковский гос. ун-т, 1984. С. 28–34.
- [7] *Ю. С. Колесов.* Укр. матем. журн. 1987. Т. 39. № 1. С. 27–34.
- [8] *Ю. С. Колесов.* Матем. сб. 1993. Т. 184. № 3. С. 121–136.
- [9] *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [10] *П. Е. Соболевский.* Тр. Моск. матем. об-ва. 1961. Т. 10. С. 297–350.
- [11] *Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Изд. фирма “Физматлит”, 1995.
- [12] *А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов.* Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. М.: Наука: МАИК “Наука”; Тр. МИАН. 1998. Т. 222.
- [13] *Л. Д. Ландау.* ДАН СССР. 1943. Т. 44. № 8. С. 339–342.
- [14] *А. А. Захаров, Ю. С. Колесов.* Пространственно неоднородные режимы в задаче хищник–жертва. В сб.: Нелинейные колебания и экология. Ред. В.Ш. Бурд и др. Ярославль: Ярославский гос. ун-т, 1984. С. 3–15.
- [15] *В. Ф. Камбулов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов.* Дифф. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 638–645.
- [16] *В. Ф. Камбулов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов.* Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 1999. № 3. С. 23–27.
- [17] *А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов.* Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 5. С. 135–164.
- [18] *Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.

Поступила в редакцию 24.IV.2000 г.