Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. А. Розиков, Г. Т. Мадгозиев, Неединственность меры Гиббса для одной модели на дереве Кэли, *ТМФ*, 2011, том 167, номер 2, 311–322

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6642>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:38:56

© 2011 г.

У. А. Розиков*, Г. Т. Мадгозиев*

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Предложена модель на дереве Кэли и показано, что для нее существует несчетное множество $\hat{G}$ -периодических гиббсовских мер в отличие от ранее изученных моделей.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, НС-модель, мера Гиббса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ – бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребро. Здесь V есть множество вершин Γ^k , L – множество его ребер. Пусть i – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то вершины x и y называются ближайшими соседями и обозначаются через $\langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x, y) = \min\{d|\exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ так, что } \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}.$$

Известно, что дерево Кэли представляется как группа G_k , являющаяся свободным произведением $k + 1$ циклической группы второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ [1].

Пусть Φ – конечное множество. Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$. Множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$. Пусть $A \subset V$. Обозначим через Ω_A пространство конфигураций, определенных на множестве A . Через $|A|$ обозначим число элементов множества A .

Определим обобщенный символ Кронекера как функцию

$$U(\sigma_A): \Omega_A \rightarrow \{|A| - 1, |A| - 2, \dots, |A| - \min\{|A|, |\Phi|\}\}$$

следующим образом:

$$U(\sigma_A) = |A| - |\sigma_A \cap \Phi|, \quad (1.1)$$

где $A \subset V$ и $|\sigma_A \cap \Phi|$ – число различных значений $\sigma_A(x)$, $x \in A$ [2].

*Институт математики и информационных технологий АНРУз, Ташкент, Узбекистан.
E-mail: gmadgoziyev@yandex.ru

В настоящей работе мы рассматриваем случай $\Phi = \{-1, 1\}$ и $|A| = 4$. Обозначим через M множество всех шаров $b(x) = \{y \in V : d(x, y) \leq 1\}$ с радиусом 1.

Гамильтониан определяется следующим образом:

$$H(\sigma) = -J \sum_{b \in M} U(\sigma_b), \quad (1.2)$$

где $J > 0$.

Основной проблемой данного гамильтониана является описание всех отвечающих ему мер Гиббса. Определение меры Гиббса и других понятий, связанных с теорией мер Гиббса, можно найти, например, в работе [3]. Для модели Изинга на дереве Кэли эта задача изучена достаточно полно. Так, например, в работе [4] построено несчетное множество крайних гиббсовских мер, в работе [5] найдено необходимое и достаточное условие крайности неупорядоченной фазы модели Изинга на дереве Кэли.

Цель настоящей работы – изучение меры Гиббса для модели (1.2). Эта модель контурным методом изучена в работе [2], здесь мы преобразуем ее в НС- (hard-core) модель на дереве Кэли и применим метод марковских случайных полей и рекуррентных уравнений этой теории (см., например, работы [1], [3]–[9]).

2. СИСТЕМА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть $x^0 \in V$ – фиксированная точка. Будем писать $x < y$, если путь от x^0 до y проходит через x . Вершина y называется “прямым потомком” x , если $y > x$ и x, y являются соседями.

Обозначим

$$W_n = \{x \in V : d(x^0, x) = n\}, \quad V_n = \{x \in V : d(x^0, x) \leq n\}.$$

Для $x \in G_k$ положим $x_{\downarrow} = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$, где $S(x)$ – множество прямых потомков точки $x \in V$.

В этой работе мы рассмотрим случай $k = 2$. Пусть $b(x) = \{x, xa_1, xa_2, xa_3\}$ и $\sigma_{b(x)} = \{\sigma(x), \sigma(ax_1), \sigma(ax_2), \sigma(ax_3)\}$.

Рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} :

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x), \sigma_{b(x)}}^{\sigma_{b(x_{\downarrow})}} \right\}, \quad (2.1)$$

где $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$,

$$Z_n = \sum_{\bar{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} \exp \left\{ -\beta H(\bar{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x), \bar{\sigma}_{b(x)}}^{\bar{\sigma}_{b(x_{\downarrow})}} \right\}$$

и $h_{b, \sigma}^{\bar{\sigma}} \in R$.

Говорят, что вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ согласованно, если

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \quad (2.2)$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$.

В этом случае существует единственная мера μ на Ω_V такая, что

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$.

Рассмотрим конфигурации $\sigma_0 = \{+, +, +, +\}$, $\sigma_1 = \{+, -, +, +\}$, $\sigma_2 = \{+, +, -, -\}$, $\sigma_3 = \{+, -, -, -\}$, $-\sigma_0 = \{-, -, -, -\}$, $-\sigma_1 = \{-, +, -, -\}$, $-\sigma_2 = \{-, -, +, +\}$, $-\sigma_3 = \{-, +, +, +\}$ на единичном шаре.

Обозначим

$$\begin{aligned} h_{b,\sigma_0}^{\sigma_0} &= h_{b,0}, & h_{b,\sigma_1}^{\sigma_0} &= h_{b,1}, & h_{b,\sigma_2}^{\sigma_0} &= h_{b,2}, & h_{b,-\sigma_1}^{\sigma_1} &= h_{b,3}, \\ h_{b,-\sigma_2}^{\sigma_1} &= h_{b,4}, & h_{b,-\sigma_3}^{\sigma_1} &= h_{b,5}, & h_{b,\sigma_1}^{-\sigma_1} &= h_{b,6}, & h_{b,\sigma_2}^{-\sigma_1} &= h_{b,7}, \\ h_{b,\sigma_3}^{-\sigma_1} &= h_{b,8}, & h_{b,-\sigma_0}^{-\sigma_0} &= h_{b,9}, & h_{b,-\sigma_1}^{-\sigma_0} &= h_{b,10}, & h_{b,-\sigma_2}^{-\sigma_0} &= h_{b,11}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для $a \in M$ через b и c обозначим “прямые потомки” шара a [10]. Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для $h_{b,i}$, при которых выполняется равенство (2.2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $k = 2$. Вероятностное распределение $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, в (2.1) является согласованным тогда и только тогда, когда для любого $a \in M$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} y_{a,0} &= y_{a,6} = \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \\ y_{a,1} &= y_{a,7} = \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \\ y_{a,2} &= y_{a,8} = \frac{y_{b,3} + y_{b,4} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \\ y_{a,3} &= y_{a,9} = \frac{\lambda y_{b,3} + y_{b,4} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \frac{\lambda y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \\ y_{a,4} &= y_{a,10} = \frac{\lambda y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, & y_{a,5} &= 1, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\lambda = e^{J\beta}$, $\beta = 1/T$, $y_{a,i} = e^{h_{a,i} - h_{a,11}}$, $i = \overline{0, 10}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x и y – соседние вершины и на шаре $b(x)$ задана конфигурация $\sigma_{b(x)} \in \{\pm\sigma_0, \pm\sigma_1, \pm\sigma_2, \pm\sigma_3\}$. Тогда конфигурация $\sigma_{b(y)}$ зависит от $\sigma_{b(x)}$. В таблице заданы все возможные значения $\sigma_{b(y)}$ при фиксированной $\sigma_{b(x)}$.

Заметим, что модель (1.2) теперь может быть рассмотрена как НС-модель со значениями “спина”, выбранными из этой таблицы допустимых значений спина на соседних вершинах дерева Кэли.

Обозначим $\overline{M}_n = \{b \in M : d(b, \bar{e}) \leq n\}$, $\overline{W}_n = \{b \in M : d(b, \bar{e}) = n\}$, где $\bar{e}$ – шар радиуса 1 с центром e , где e – единичный элемент группы G_b ; тогда $d(b_1, b_2) = d(c_{b_1}, c_{b_2})$, где c_b обозначает центр шара b .

Пусть $\sigma_n = \{\sigma_b, b \in \overline{M}_n\}$, $\sigma^{(n)} = \{\sigma_b, b \in \overline{W}_n\}$.

В этом случае гамильтониан имеет вид

$$H(\sigma_n) = -J \sum_{b \in \overline{V}_n} U(\sigma_b) = H(\sigma_{n-1}) - J \sum_{b \in \overline{W}_n} U(\sigma_b).$$

$\sigma_{b(x)}$	$\sigma_{b(y)}, \sigma(y) = +1$	$\sigma_{b(y)}, \sigma(y) = -1$
σ_0	$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$	$\emptyset$
σ_1	$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$	$-\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3$
σ_2	$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$	$-\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3$
σ_3	$\emptyset$	$-\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3$
$-\sigma_0$	$\emptyset$	$-\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2$
$-\sigma_1$	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$-\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2$
$-\sigma_2$	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$-\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2$
$-\sigma_3$	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$\emptyset$

Докажем сначала необходимость сформулированных в теореме условий. Из формулы (2.2) получим

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma^{(n)}} \mu_n(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) &= Z_n^{-1} \sum_{\sigma^{(n)}} \exp \left\{ \beta H(\sigma_{n-1}) - J\beta \sum_{b \in \overline{W}_n} U(\sigma_b) + \sum_{b \in \overline{W}_n} h_{b, \sigma_b}^{\sigma_{b \downarrow}} \right\} = \\ &= Z_{n-1}^{-1} \exp \left\{ -\beta H(\sigma_{n-1}) + \sum_{b \in \overline{W}_{n-1}} h_{a, \sigma_a}^{\sigma_{a \downarrow}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отсюда

$$L_n \sum_{\sigma^{(n)}} \prod_{b \in \overline{W}_{n-1}} \prod_{a \in S(b)} \exp \{ -J\beta U(\sigma_a) + h_{a, \sigma_a}^{\sigma_{a \downarrow}} \} = \prod_{b \in \overline{W}_{n-1}} \exp \{ h_{b, \sigma_b}^{\sigma_{b \downarrow}} \},$$

где $L_n = Z_{n-1}/Z_n$. Следовательно,

$$L_n \prod_{b \in \overline{W}_{n-1}} \prod_{a \in S(b)} \sum_{\sigma_a^{(n)}} \exp \{ -J\beta U(\sigma_a) + h_{a, \sigma_a}^{\sigma_{a \downarrow}} \} \mathbf{1}_{\sigma_n \in \Omega} = \prod_{b \in \overline{W}_{n-1}} \exp \{ h_{b, \sigma_b}^{\sigma_{b \downarrow}} \}. \quad (2.6)$$

Отсюда, опираясь на значения, приведенные в таблице, получаем

$$\begin{aligned} e^{h_{a, \sigma_0}^{\sigma_i}} &= L_n (e^{-\beta U(\sigma_0) + h_{b, \sigma_0}^{\sigma_0}} + e^{-\beta U(\sigma_1) + h_{b, \sigma_1}^{\sigma_0}} + e^{-\beta U(\sigma_2) + h_{b, \sigma_2}^{\sigma_0}}) \times \\ &\quad \times (e^{-\beta U(\sigma_0) + h_{c, \sigma_0}^{\sigma_0}} + e^{-\beta U(\sigma_1) + h_{c, \sigma_1}^{\sigma_0}} + e^{-\beta U(\sigma_2) + h_{c, \sigma_2}^{\sigma_0}}), \quad i = 0, 1, 2; \\ e^{h_{a, \sigma_1}^{\sigma_i}} &= L_n (e^{-\beta U(\sigma_0) + h_{b, \sigma_0}^{\sigma_1}} + e^{-\beta U(\sigma_1) + h_{b, \sigma_1}^{\sigma_1}} + e^{-\beta U(\sigma_2) + h_{b, \sigma_2}^{\sigma_1}}) \times \\ &\quad \times (e^{-\beta U(-\sigma_1) + h_{c, -\sigma_1}^{\sigma_1}} + e^{-\beta U(-\sigma_2) + h_{c, -\sigma_2}^{\sigma_1}} + e^{-\beta U(-\sigma_3) + h_{c, -\sigma_3}^{\sigma_1}}), \quad i = 0, 1, 2; \\ e^{h_{a, \sigma_1}^{-\sigma_j}} &= L_n (e^{-\beta U(\sigma_0) + h_{b, \sigma_0}^{\sigma_1}} + e^{-\beta U(\sigma_1) + h_{b, \sigma_1}^{\sigma_1}} + e^{-\beta U(\sigma_2) + h_{b, \sigma_2}^{\sigma_1}}) \times \\ &\quad \times (e^{-\beta U(\sigma_0) + h_{c, \sigma_0}^{\sigma_1}} + e^{-\beta U(\sigma_1) + h_{c, \sigma_1}^{\sigma_1}} + e^{-\beta U(\sigma_2) + h_{c, \sigma_2}^{\sigma_1}}), \quad j = 1, 2, 3; \\ e^{h_{a, \sigma_2}^{\sigma_i}} &= L_n (e^{-\beta U(-\sigma_1) + h_{b, -\sigma_1}^{\sigma_2}} + e^{-\beta U(-\sigma_2) + h_{b, -\sigma_2}^{\sigma_2}} + e^{-\beta U(-\sigma_3) + h_{b, -\sigma_3}^{\sigma_2}}) \times \\ &\quad \times (e^{-\beta U(-\sigma_1) + h_{c, -\sigma_1}^{\sigma_2}} + e^{-\beta U(-\sigma_2) + h_{c, -\sigma_2}^{\sigma_2}} + e^{-\beta U(-\sigma_3) + h_{c, -\sigma_3}^{\sigma_2}}), \quad i = 0, 1, 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^{h_{a,\sigma_2}^{-\sigma_j}} &= L_n(e^{-\beta U(\sigma_0)+h_{c,\sigma_0}^{\sigma_2}} + e^{-\beta U(\sigma_1)+h_{b,\sigma_1}^{\sigma_2}} + e^{-\beta U(\sigma_2)+h_{b,\sigma_2}^{\sigma_2}}) \times \\
 &\quad \times (e^{-\beta U(-\sigma_1)+h_{c,-\sigma_1}^{\sigma_2}} + e^{-\beta U(-\sigma_2)+h_{c,-\sigma_2}^{\sigma_2}} + e^{-\beta U(-\sigma_3)+h_{c,-\sigma_3}^{\sigma_2}}), \quad j = 1, 2, 3; \\
 e^{h_{a,\sigma_3}^{-\sigma_j}} &= L_n(e^{-\beta U(-\sigma_1)+h_{b,-\sigma_1}^{\sigma_3}} + e^{-\beta U(-\sigma_2)+h_{b,-\sigma_2}^{\sigma_3}} + e^{-\beta U(-\sigma_3)+h_{b,-\sigma_3}^{\sigma_3}}) \times \\
 &\quad \times (e^{-\beta U(-\sigma_1)+h_{c,-\sigma_1}^{\sigma_3}} + e^{-\beta U(-\sigma_2)+h_{c,-\sigma_2}^{\sigma_3}} + e^{-\beta U(-\sigma_3)+h_{c,-\sigma_3}^{\sigma_3}}), \quad j = 1, 2, 3; \\
 e^{h_{a,-\sigma_0}^{-\sigma_j}} &= L_n(e^{-\beta U(-\sigma_0)+h_{b,-\sigma_0}^{\sigma_0}} + e^{-\beta U(-\sigma_1)+h_{b,-\sigma_1}^{\sigma_0}} + e^{-\beta U(-\sigma_2)+h_{b,-\sigma_2}^{\sigma_0}}) \times \\
 &\quad \times (e^{-\beta U(-\sigma_0)+h_{c,-\sigma_0}^{\sigma_0}} + e^{-\beta U(-\sigma_1)+h_{c,-\sigma_1}^{\sigma_0}} + e^{-\beta U(-\sigma_2)+h_{c,-\sigma_2}^{\sigma_0}}), \quad j = 0, 1, 2; \\
 e^{h_{a,-\sigma_1}^{\sigma_i}} &= L_n(e^{-\beta U(-\sigma_0)+h_{b,-\sigma_0}^{\sigma_1}} + e^{-\beta U(-\sigma_1)+h_{b,-\sigma_1}^{\sigma_1}} + e^{-\beta U(-\sigma_2)+h_{b,-\sigma_2}^{\sigma_1}}) \times \\
 &\quad \times (e^{-\beta U(-\sigma_0)+h_{c,-\sigma_0}^{\sigma_1}} + e^{-\beta U(-\sigma_1)+h_{c,-\sigma_1}^{\sigma_1}} + e^{-\beta U(-\sigma_2)+h_{c,-\sigma_2}^{\sigma_1}}), \quad i = 1, 2, 3; \\
 e^{h_{a,-\sigma_1}^{-\sigma_j}} &= L_n(e^{-\beta U(\sigma_1)+h_{b,\sigma_1}^{\sigma_1}} + e^{-\beta U(\sigma_2)+h_{b,\sigma_2}^{\sigma_1}} + e^{-\beta U(\sigma_3)+h_{b,\sigma_3}^{\sigma_1}}) \times \\
 &\quad \times (e^{-\beta U(-\sigma_0)+h_{c,-\sigma_0}^{\sigma_1}} + e^{-\beta U(-\sigma_1)+h_{c,-\sigma_1}^{\sigma_1}} + e^{-\beta U(-\sigma_2)+h_{c,-\sigma_2}^{\sigma_1}}), \quad j = 0, 1, 2; \\
 e^{h_{a,-\sigma_2}^{\sigma_i}} &= L_n(e^{-\beta U(\sigma_1)+h_{b,\sigma_1}^{\sigma_2}} + e^{-\beta U(\sigma_2)+h_{b,\sigma_2}^{\sigma_2}} + e^{-\beta U(\sigma_3)+h_{b,\sigma_3}^{\sigma_2}}) \times \\
 &\quad \times (e^{-\beta U(-\sigma_0)+h_{c,-\sigma_0}^{\sigma_2}} + e^{-\beta U(-\sigma_1)+h_{c,-\sigma_1}^{\sigma_2}} + e^{-\beta U(-\sigma_2)+h_{c,-\sigma_2}^{\sigma_2}}), \quad i = 1, 2, 3; \\
 e^{h_{a,-\sigma_2}^{-\sigma_j}} &= L_n(e^{-\beta U(\sigma_1)+h_{b,\sigma_1}^{\sigma_2}} + e^{-\beta U(\sigma_2)+h_{b,\sigma_2}^{\sigma_2}} + e^{-\beta U(\sigma_3)+h_{b,\sigma_3}^{\sigma_2}}) \times \\
 &\quad \times (e^{-\beta U(\sigma_1)+h_{c,\sigma_1}^{\sigma_2}} + e^{-\beta U(\sigma_2)+h_{c,\sigma_2}^{\sigma_2}} + e^{-\beta U(\sigma_3)+h_{c,\sigma_3}^{\sigma_2}}), \quad j = 0, 1, 2; \\
 e^{h_{a,-\sigma_3}^{\sigma_i}} &= L_n(e^{-\beta U(\sigma_1)+h_{b,\sigma_1}^{\sigma_3}} + e^{-\beta U(\sigma_2)+h_{b,\sigma_2}^{\sigma_3}} + e^{-\beta U(\sigma_3)+h_{b,\sigma_3}^{\sigma_3}}) \times \\
 &\quad \times (e^{-\beta U(\sigma_1)+h_{c,\sigma_1}^{\sigma_3}} + e^{-\beta U(\sigma_2)+h_{c,\sigma_2}^{\sigma_3}} + e^{-\beta U(\sigma_3)+h_{c,\sigma_3}^{\sigma_3}}), \quad i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Обозначим $z_{a,i} = e^{h_{a,i}}$. Тогда в силу формул (2.3) имеем

$$\begin{aligned}
 z_{a,0} &= \lambda^4 L_n(\lambda z_{b,0} + z_{b,1} + z_{b,2})(\lambda z_{c,0} + z_{c,1} + z_{c,2}), \\
 z_{a,1} &= \lambda^4 L_n(\lambda z_{b,0} + z_{b,1} + z_{b,2})(z_{c,3} + z_{c,4} + z_{c,5}), \\
 z_{a,2} &= \lambda^4 L_n(z_{b,3} + z_{b,4} + z_{b,5})(z_{c,3} + z_{c,4} + z_{c,5}), \\
 z_{a,3} &= \lambda^4 L_n(\lambda z_{b,9} + z_{b,10} + z_{b,11})(\lambda z_{c,9} + z_{c,10} + z_{c,11}), \\
 z_{a,4} &= \lambda^4 L_n(z_{b,6} + z_{b,7} + z_{b,8})(\lambda z_{c,9} + z_{c,10} + z_{c,11}), \\
 z_{a,5} &= \lambda^4 L_n(z_{b,6} + z_{b,7} + z_{b,8})(z_{c,6} + z_{c,7} + z_{c,8}), \\
 z_{a,6} &= \lambda^4 L_n(\lambda z_{b,0} + z_{b,1} + z_{b,2})(\lambda z_{c,0} + z_{c,1} + z_{c,2}), \\
 z_{a,7} &= \lambda^4 L_n(\lambda z_{b,0} + z_{b,1} + z_{b,2})(z_{c,3} + z_{c,4} + z_{c,5}), \\
 z_{a,8} &= \lambda^4 L_n(z_{b,3} + z_{b,4} + z_{b,5})(z_{c,3} + z_{c,4} + z_{c,5}), \\
 z_{a,9} &= \lambda^4 L_n(\lambda z_{b,9} + z_{b,10} + z_{b,11})(\lambda z_{c,9} + z_{c,10} + z_{c,11}), \\
 z_{a,10} &= \lambda^4 L_n(z_{b,6} + z_{b,7} + z_{b,8})(\lambda z_{c,9} + z_{c,10} + z_{c,11}), \\
 z_{a,11} &= \lambda^4 L_n(z_{b,6} + z_{b,7} + z_{b,8})(z_{c,6} + z_{c,7} + z_{c,8}).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Положим $y_{a,i} = z_{a,i}/z_{a,11}$, $i = 0, 1, \dots, 10$, и получим

$$y_{a,0} = \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,6} + y_{b,7} + y_{b,8}} \frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}{y_{c,6} + y_{c,7} + y_{c,8}},$$

$$\begin{aligned}
y_{a,1} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,6} + y_{b,7} + y_{b,8}} \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + y_{c,5}}{y_{c,6} + y_{c,7} + y_{c,8}}, \\
y_{a,2} &= \frac{y_{b,3} + y_{b,4} + y_{b,5}}{y_{b,6} + y_{b,7} + y_{b,8}} \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + y_{c,5}}{y_{c,6} + y_{c,7} + y_{c,8}}, \\
y_{a,3} &= \frac{\lambda y_{b,9} + y_{b,10} + 1}{y_{b,6} + y_{b,7} + y_{b,8}} \frac{\lambda y_{c,9} + y_{c,10} + 1}{y_{c,6} + y_{c,7} + y_{c,8}}, \\
y_{a,4} &= \frac{\lambda y_{c,9} + y_{c,10} + 1}{y_{c,6} + y_{c,7} + y_{c,8}}, \\
y_{a,5} &= 1, \\
y_{a,6} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,6} + y_{b,7} + y_{b,8}} \frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}{y_{c,6} + y_{c,7} + y_{c,8}}, \\
y_{a,7} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,6} + y_{b,7} + y_{b,8}} \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + y_{c,5}}{y_{c,6} + y_{c,7} + y_{c,8}}, \\
y_{a,8} &= \frac{y_{b,3} + y_{b,4} + y_{b,5}}{y_{b,6} + y_{b,7} + y_{b,8}} \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + y_{c,5}}{y_{c,6} + y_{c,7} + y_{c,8}}, \\
y_{a,9} &= \frac{\lambda y_{b,9} + y_{b,10} + 1}{y_{b,6} + y_{b,7} + y_{b,8}} \frac{\lambda y_{c,9} + y_{c,10} + 1}{y_{c,6} + y_{c,7} + y_{c,8}}, \\
y_{a,10} &= \frac{\lambda y_{c,9} + y_{c,10} + 1}{y_{c,6} + y_{c,7} + y_{c,8}}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$y_{a,0} = y_{a,6}, \quad y_{a,1} = y_{a,7}, \quad y_{a,2} = y_{a,8}, \quad y_{a,3} = y_{a,9}, \quad y_{a,4} = y_{a,10}, \quad y_{a,5} = 1. \quad (2.8)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
y_{a,0} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \\
y_{a,1} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \\
y_{a,2} &= \frac{y_{b,3} + y_{b,4} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \\
y_{a,3} &= \frac{\lambda y_{b,3} + y_{b,4} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \frac{\lambda y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \\
y_{a,4} &= \frac{\lambda y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}.
\end{aligned} \quad (2.9)$$

Для доказательства достаточности получим из системы (2.9) при учете (2.8) формулы (2.5)–(2.7), т.е. (2.2). Теорема доказана.

3. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА

В этом разделе мы рассмотрим трансляционно-инвариантные (ТИ) меры для модели (1.2) на дереве Кэли. Заметим, что ТИ-меры Гиббса соответствуют решениям (2.4) с $y_{a,i} = y_i$ при всех $a \in M$ и $i = 0, 1, 2, 3, 4$. В формулах (2.9) положим

$y_{a,i} = y_i \in R_+$, $a \in M$, и получим

$$\begin{aligned} y_0 &= \left(\frac{\lambda y_0 + y_1 + y_2}{y_0 + y_1 + y_2} \right)^2, \\ y_1 &= \left(\frac{\lambda y_0 + y_1 + y_2}{y_0 + y_1 + y_2} \right) \left(\frac{y_3 + y_4 + 1}{y_0 + y_1 + y_2} \right), \\ y_2 &= \left(\frac{y_3 + y_4 + 1}{y_0 + y_1 + y_2} \right)^2, \\ y_3 &= \left(\frac{\lambda y_3 + y_4 + 1}{y_0 + y_1 + y_2} \right)^2, \\ y_4 &= \frac{\lambda y_3 + y_4 + 1}{y_0 + y_1 + y_2}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\lambda > 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Для модели (1.2) существует $\lambda_{\text{cr}} (\approx 1.8055)$ такое, что при $(11 - \sqrt{21})/8 < \lambda < \lambda_{\text{cr}}$ существует не менее одной ТИ-меры Гиббса, при $\lambda = \lambda_{\text{cr}}$ – не менее двух, а при $\lambda_{\text{cr}} < \lambda < (11 + \sqrt{21})/8$ – не менее трех ТИ-мер Гиббса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из системы (3.1) после несложных вычислений получаем

$$\begin{aligned} y_4 = y &= \{(\lambda y^2 + y + 1)^2 [\lambda y^2 + y + 1 \pm \sqrt{D}]^2 + \\ &+ 2(\lambda - 1)y^2(y^2 + y + 1)(\lambda y^2 + y + 1)[\lambda y^2 + y + 1 \pm \sqrt{D}] + \\ &+ 4(\lambda - 1)^2 y^4(y^2 + y + 1)^2\} / \{4(\lambda - 1)^2(\lambda y^2 + y + 1)^3\} = \varphi_{\pm}(y, \lambda), \end{aligned}$$

где $D = (\lambda y^2 + y + 1)(\lambda y^2 + (5 - 4\lambda)y + 1)$.

Заметим, что из условия $D \geq 0$ следует $(11 - \sqrt{21})/8 \leq \lambda \leq (11 + \sqrt{21})/8$. Легко видеть, что $\varphi_-(1, \lambda) < 0$ и $\varphi_- (+\infty, \lambda) = +\infty$ для любого $\lambda > 0$. Следовательно, $\varphi_-(y, \lambda) = y$ имеет не менее одного решения для любого $\lambda \geq (11 - \sqrt{21})/8 \geq 0$. При $\lambda = 1.86$ видно, что $\varphi_+(0, \lambda) > 0$, $\varphi_+(1, \lambda) < 0$, $\varphi_+(+\infty, \lambda) = +\infty$, т. е. уравнение $y = \varphi_+(y)$ имеет не менее двух решений (на рисунке показан график функции $\varphi_+(y)$ при различных значениях λ). Приблизительное значение $\lambda_{\text{cr}} \approx 1.8055$ получено с помощью компьютера.

Теорема доказана.

Применяя методы, предложенные в работах [4],[6], легко доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *При $\lambda_{\text{cr}} \leq \lambda < (11 + \sqrt{21})/8$ существует континуум нетрансляционно-инвариантных мер Гиббса.*

Предположим, что

$$y_{a,0} = y_{a,3}, \quad y_{a,1} = y_{a,4}, \quad y_{a,2} = 1, \quad a \in M. \quad (3.2)$$

Тогда из системы (2.7) получаем

$$\begin{aligned} y_{a,0} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + 1} \frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + 1}, \\ y_{a,1} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + 1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Докажем следующие леммы.

ЛЕММА 1. 1. Пусть $\lambda > 1$. Если $y_a = (y_{a,0}, y_{a,1})$, $a \in M$, является решением системы (3.3), то $y_i^- \leq y_{a,i} \leq y_i^+$ для любого $i = 0, 1$, $a \in M$, где $(y_0^-, y_0^+, y_1^-, y_1^+)$ – решение системы

$$\begin{aligned}
 y_0^- &= \left(\frac{\lambda y_0^- + y_1^+ + 1}{y_0^- + y_1^+ + 1} \right)^2, \\
 y_0^+ &= \left(\frac{\lambda y_0^+ + y_1^- + 1}{y_0^+ + y_1^- + 1} \right)^2, \\
 y_1^- &= \frac{\lambda y_0^- + y_1^+ + 1}{y_0^- + y_1^+ + 1}, \\
 y_1^+ &= \frac{\lambda y_0^+ + y_1^- + 1}{y_0^+ + y_1^- + 1}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

2. Пусть $\lambda < 1$. Если $y_a = (y_{a,0}, y_{a,1})$, $a \in M$, является решением системы (3.3), то $y_i^- \leq y_{a,i} \leq y_i^+$ для любого $i = 0, 1$, $a \in M$, где $(y_0^-, y_0^+, y_1^-, y_1^+)$ – решение

системы

$$\begin{aligned} y_0^- &= \left(\frac{\lambda y_0^+ + y_1^- + 1}{y_0^+ + y_1^- + 1} \right)^2, \\ y_0^+ &= \left(\frac{\lambda y_0^- + y_1^+ + 1}{y_0^- + y_1^+ + 1} \right)^2, \\ y_1^- &= \frac{\lambda y_0^+ + y_1^- + 1}{y_0^+ + y_1^- + 1}, \\ y_1^+ &= \frac{\lambda y_0^- + y_1^+ + 1}{y_0^- + y_1^+ + 1}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. 1 леммы. Очевидно, что $1 < y_{a,0} < \lambda^2$, $1 < y_{a,1} < \lambda$ для любого $a \in M$.

Рассмотрим функцию

$$f(u, v) = \frac{\lambda u + v + 1}{u + v + 1},$$

где $1 < u < \lambda^2$, $1 < v < \lambda$. Нетрудно видеть, что $(2\lambda + 1)/(\lambda + 2) < f(u, v) < \lambda$. Таким образом, для $y_{a,i}$ мы получаем $((2\lambda + 1)/(\lambda + 2))^2 < y_{a,0} < \lambda^2$, $(2\lambda + 1)/(\lambda + 2) < y_{a,1} < \lambda$. Теперь рассмотрим $f(u, v)$ с условиями $((2\lambda + 1)/(\lambda + 2))^2 < u < \lambda^2$, $(2\lambda + 1)/(\lambda + 2) < v < \lambda$. Итерируя, получаем $y_{i,n}^- \leq y_{a,i} \leq y_{i,n}^+$, $i = 0, 1$. Здесь $y_{i,n}^\pm$, $i = 0, 1$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} y_{0,n+1}^- &= \left(\frac{\lambda y_{0,n}^- + y_{1,n}^+ + 1}{y_{0,n}^- + y_{1,n}^+ + 1} \right)^2, \\ y_{0,n+1}^+ &= \left(\frac{\lambda y_{0,n}^+ + y_{1,n}^- + 1}{y_{0,n}^+ + y_{1,n}^- + 1} \right)^2, \\ y_{1,n+1}^- &= \frac{\lambda y_{0,n}^- + y_{1,n}^+ + 1}{y_{0,n}^- + y_{1,n}^+ + 1}, \\ y_{1,n+1}^+ &= \frac{\lambda y_{0,n}^+ + y_{1,n}^- + 1}{y_{0,n}^+ + y_{1,n}^- + 1}, \end{aligned}$$

где $y_{0,1}^- = 1$, $y_{0,1}^+ = \lambda^2$, $y_{1,1}^- = 1$, $y_{1,1}^+ = \lambda$. Видно, что $y_{i,n}^-$, $i = 0, 1$ ($y_{i,n}^+$, $i = 0, 1$), является возрастающей (убывающей) и ограниченной последовательностью. Поэтому существует $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{i,n}^\pm = y_i^\pm$, $i = 0, 1$. Первый пункт леммы доказан.

Аналогично доказывается второй пункт леммы.

ЛЕММА 2. Если $y = (y_0^-, y_0^+, y_1^-, y_1^+)$ – решение системы (3.4), то $y_0^- = y_0^+$ тогда и только тогда, когда $y_1^- = y_1^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из системы (3.4) имеем

$$\begin{aligned} (y_0^- - y_0^+)(AB - 1 + AB y_1^+) + AB y_0^- (y_1^- - y_1^+) &= 0, \\ (y_0^- - y_0^+)(1 + y_1^+)B + (B y_0^- - 1)(y_1^- - y_1^+) &= 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$A = \frac{\lambda y_0^- + y_1^+ + 1}{y_0^- + y_1^+ + 1} + \frac{\lambda y_0^+ + y_1^- + 1}{y_0^+ + y_1^- + 1} > 0, \quad B = \frac{\lambda - 1}{(y_0^- + y_1^+ + 1)(y_0^+ + y_1^- + 1)} > 0.$$

Если $y_0^- = y_0^+$, то из первого уравнения системы (3.5) имеем $y_1^- = y_1^+$. Если $y_1^- = y_1^+$, то из второго уравнения системы (3.5) имеем $y_0^- = y_0^+$. Лемма доказана.

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА

В настоящем разделе мы рассматриваем периодические меры Гиббса в случае выполнения условия (3.2). Запишем систему (3.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} h_{a,0} &= \ln \left(\frac{\lambda e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + 1}{e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + 1} \frac{\lambda e^{h_{c,0}} + e^{h_{c,1}} + 1}{e^{h_{c,0}} + e^{h_{c,1}} + 1} \right), \\ h_{a,1} &= \ln \frac{\lambda e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + 1}{e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + 1}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $h_{a,i} = \ln y_{a,i}$, $i = 0, 1$, и исследуем ее периодические решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть H_0 – подгруппа группы G_k . Совокупность векторов $h = \{h_a = (h_{a,0}, h_{a,1}) : a \in G_k\}$ называется H_0 -периодической, если $h_{ya,i} = h_{a,i}$ для любых $a \in G_k$ и $y \in H_0$, $i = 0, 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мера Гиббса, соответствующая H_0 -периодической совокупности векторов, называется H_0 -периодической.

Определим $F : h = (h_0, h_1) \rightarrow F(h) \in R$ следующим образом:

$$F(h) = \ln \frac{\lambda e^{h_0} + e^{h_1} + 1}{e^{h_0} + e^{h_1} + 1}.$$

Пусть $G_k^{(2)}$ – подгруппа группы G_k , состоящая из слов четной длины. Очевидно, что $G_k^{(2)}$ является подгруппой индекса 2.

Пусть

$$h_{a,i} = \begin{cases} h_i, & \text{если } c_a \in G_2^{(2)}, \\ h'_i, & \text{если } c_a \in G_2 \setminus G_2^{(2)}, \end{cases} \quad i = 0, 1.$$

Тогда из (4.1) имеем

$$\begin{aligned} h_0 &= 2 \ln \frac{\lambda e^{h'_0} + e^{h'_1} + 1}{e^{h'_0} + e^{h'_1} + 1}, \\ h'_0 &= 2 \ln \frac{\lambda e^{h_0} + e^{h_1} + 1}{e^{h_0} + e^{h_1} + 1}, \\ h_1 &= \ln \frac{\lambda e^{h'_0} + e^{h'_1} + 1}{e^{h'_0} + e^{h'_1} + 1}, \\ h'_1 &= \ln \frac{\lambda e^{h_0} + e^{h_1} + 1}{e^{h_0} + e^{h_1} + 1}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

ТЕОРЕМА 4. Для модели (1.2) при всех $\lambda > 0$ и выполнении условия (3.2) существует единственная $G_2^{(2)}$ -периодическая мера Гиббса. Более того, эта мера совпадает с ТИ-мерой Гиббса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $h_0 = h'_0$, $h_1 = h'_1$. Из системы (4.2) получаем

$$\begin{aligned} h_0 &= 2 \ln \frac{\lambda e^{h_0} + e^{h_1} + 1}{e^{h_0} + e^{h_1} + 1}, \\ h_1 &= \ln \frac{\lambda e^{h_0} + e^{h_1} + 1}{e^{h_0} + e^{h_1} + 1}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Эта система уравнений имеет единственное решение (h_0^*, h_1^*) . Действительно, из (4.3) следует $e^{3h_1} + (1-\lambda)e^{2h_1} - 1 = 0$. Пусть $e^{h_1} = z$, тогда $Q(z) = z^3 + (1-\lambda)z^2 - 1 = 0$.

Известно, что число положительных решений уравнения $z^3 + (1-\lambda)z^2 - 1 = 0$ не превосходит число перемен знаков коэффициентов, т.е. 1, $1-\lambda$, -1 (см. монографию [11], с. 28). Следовательно, $Q(z) = 0$ имеет единственное решение.

Теперь рассмотрим случай $h_0 \neq h'_0$, $h_1 \neq h'_1$. Из системы (4.2) имеем

$$\begin{aligned} h_1 &= \ln \frac{\lambda e^{2h'_1} + e^{h'_1} + 1}{e^{2h'_1} + e^{h'_1} + 1}, \\ h'_1 &= \ln \frac{\lambda e^{2h_1} + e^{h_1} + 1}{e^{2h_1} + e^{h_1} + 1}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

откуда при $z = e^{h_1}$ получаем многочлен

$$\begin{aligned} P(z) &= (\lambda^2 + \lambda + 1)z^5 - (\lambda^3 - 2\lambda - 2)z^4 - (2\lambda^2 - 2\lambda - 3)z^3 - \\ &\quad - (2\lambda^2 + 2\lambda - 1)z^2 - (2\lambda + 1)z - \lambda - 2 = 0, \end{aligned}$$

который легко разложить: $P(z) = Q(z)M(z)$, где $M(z) = (\lambda^2 + \lambda + 1)z^2 + (2\lambda + 1)z + \lambda + 2$.

Так как $Q(z) = 0$ имеет единственное решение и $M(z) = 0$ не имеет решения, то $P(z) = 0$ имеет единственное решение. Теорема доказана.

Число букв a_i , $i = \overline{1, k+1}$, участвующих в несократимой записи слова x , обозначим через $\omega_x(a_i)$.

Пусть $\emptyset = A \subseteq N_2 = \{1, 2, 3\}$ и $H_A = \{x \in G_2 : \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) - \text{четное число}\}$. Очевидно, что H_A является подгруппой индекса 2 [1].

Пусть

$$h_{a,j} = \begin{cases} h_j, & c_a \in H_A, \\ h'_j, & c_a \in G_2 \setminus H_A, \end{cases} \quad j = 0, 1.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} h_0 &= \begin{cases} F(h) + F(h') & \text{или } 2F(h), & \text{если } |A| = 1, \\ 2F(h') & \text{или } F(h) + F(h'), & \text{если } |A| = 2, \end{cases} \\ h'_0 &= \begin{cases} F(h) + F(h') & \text{или } 2F(h'), & \text{если } |A| = 1, \\ 2F(h) & \text{или } F(h) + F(h'), & \text{если } |A| = 2, \end{cases} \\ h_1 &= F(h) \quad \text{или} \quad F(h'), \\ h'_1 &= F(h') \quad \text{или} \quad F(h). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Случай $|A| = 3$ соответствует случаю $H_A = G_2^{(2)}$, рассмотренному выше.

ТЕОРЕМА 5. Для модели (1.2) при условии (3.2) существует несчетное число H_A -периодических мер Гиббса. Более того, эти меры не являются ТИ-мерами и $G_2^{(2)}$ -периодическими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения (4.5) следует, что система имеет решения тогда и только тогда, когда $F(h) = F(h')$.

Отсюда $t_0(s_1 - t_1) + (t_0 - s_0)(t_1 + 1) = 0$, где $t_i = e^{h_i}$, $s_i = e^{h'_i}$, $i = 0, 1$. Обозначим $s_1 - t_1 = \alpha$ и получим $s_1 = t_1 + \alpha$, $s_0 = t_0 + \alpha t_0 / (t_1 + 1)$. Из уравнения (4.5) получаем $t_0 = (1 - t_1^2) / (t_1 - \lambda)$ и $t_1^3 + (1 - \lambda)t_1^2 - 1 = 0$. Это уравнение имеет единственное положительное решение t_1^* . Следовательно, $t_1 = t_1^*$, $t_0 = t_0^* = (1 - (t_1^*)^2) / (t_1^* - \lambda)$, $s_1 = s_1^*(\alpha) = t_1^* + \alpha$, $s_0 = s_0^*(\alpha) = t_0^* + \alpha t_0^* / (t_1^* + 1)$, $\alpha \in R$.

Таким образом, для любого $\alpha \geq 0$ существует решение $(\ln t_0^*, \ln t_1^*, \ln s_0^*(\alpha), \ln s_1^*(\alpha))$ системы (4.5). Более того, эти решения различны при различных α . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что результат теоремы 5 является новым для модели (1.2), так как для ранее изученных моделей (см., например, работы [1], [3]–[9], [12]) не существовало H_A -периодических мер Гиббса при $H_A \neq G_k^{(2)}$. Контурный метод доказательства этого результата приведен в работе [2].

Благодарности. У. А. Розиков благодарит The Abdus Salam International Center for Theoretical Physics (ICTP) (Trieste, Italy) за финансовую поддержку пребывания в ICTP (2010), а также TWAS (TWAS Research Grant 09-009 RG/MATHS/AS_I-UNES-CO FR: 3240230333).

Список литературы

- [1] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.
- [2] U. A. Rozikov, *J. Stat. Phys.*, **130**:4 (2008), 801–813, arXiv: math-ph/0611038.
- [3] Н.-О. Georgii, *Gibbs Measures and Phase Transitions*, De Gruyter Stud. Math., **9**, Walter de Gruyter, Berlin, 1988.
- [4] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев, *ТВП*, **35**:2 (1990), 220–230.
- [5] P. M. Bleher, J. Ruiz, V. A. Zagrebnov, *J. Stat. Phys.*, **79**:1–2 (1995), 473–482.
- [6] У. А. Розиков, *ТМФ*, **118**:1 (1999), 95–104.
- [7] М. М. Рахматуллаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **156**:2 (2008), 292–302.
- [8] N. N. Ganikhodjaev, U. A. Rozikov, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **12**:2 (2009), 141–156.
- [9] J. B. Martin, U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *J. Nonlin. Math. Phys.*, **12**:3 (2005), 432–448.
- [10] U. A. Rozikov, *J. Stat. Phys.*, **122**:2 (2006), 217–235.
- [11] В. В. Прасолов, *Многочлены*, МЦНМО, М., 2003.
- [12] U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **9**:3 (2006), 471–488.

Поступила в редакцию 11.10.2010,
после доработки 29.11.2010