Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. П. Физиев, Д. В. Ширков, Решения уравнения Клейна–Гордона на многообразиях с изменяемой геометрией с использованием размерной редукции, *ТМФ*, 2011, том 167, номер 2, 323–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6643>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 14:07:51

© 2011 г.

П. П. Физиев^{*†}, Д. В. Ширков[†]

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА НА МНОГООБРАЗИЯХ С ИЗМЕНЯЕМОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗМЕРНОЙ РЕДУКЦИИ

Развивается недавнее предложение использовать размерную редукцию от четырехмерного пространства-времени ($D = 1 + 3$) к варианту с меньшим числом пространственных измерений $D = 1 + d$; $d < 3$ на достаточно малых расстояниях для создания перенормируемой квантовой теории поля. Изучается уравнение Клейна–Гордона для ряда игрушечных примеров (“обучающих игрушек”) пространства-времени с варьируемой геометрией пространства, включая переход к размерной редукции. Рассмотренные примеры содержат комбинацию двух областей с простой геометрией (двумерные цилиндрические поверхности разного радиуса), соединенных переходной областью. Полезным оказывается новый прием, переводящий решение уравнения Клейна–Гордона на пространствах с переменной геометрией к решению одномерного стационарного уравнения Шредингера с потенциалом, генерируемым изменением геометрии. Сделаны следующие выводы: (1) Сигнал, связанный со степенью свободы, присутствующей лишь в высокоразмерной части многообразия, не проникает в низкоразмерную его часть. Причиной этого является инерциальная сила, неизбежно возникающая в области перехода (в наших моделях это центробежная сила). (2) Специфический спектр скалярных возбуждений напоминает спектр реальных частиц. Он обусловлен геометрией области перехода и представляет ее “отпечатки пальцев”. (3) Нарушение пространственной четности, обусловленное асимметричным характером построения наших моделей, может быть связано с нарушением СР-инвариантности.

Ключевые слова: размерная редукция, пространства с изменяемой геометрией, уравнение Клейна–Гордона, спектр скалярных возбуждений, нарушение СР-инвариантности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Главная проблема стандартной квантовой гравитации с классическим действием Эйнштейна–Гильберта связана с тем, что постоянная Ньютона G_D обладает отрицательной массовой размерностью $[G_D] = [M^{2-D}]$, где $D = 1 + d$ – размерность

^{*}Sofia University “St. Kliment Ohridski”, Sofia, Bulgaria

[†]Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: fiziev@theor.jinr.ru, shirkovd@theor.jinr.ru

пространства-времени. Квантовая гравитация не перенормируема по теории возмущений в случае $D > 2$. Это справедливо и для электрослабой теории без полей Хиггса. Данное исследование примыкает к работе [1], где было предложено простое паллиативное средство для временной нейтрализации проблемы перенормируемости. Суть его в том, чтобы применить размерную редукцию (см. также [2]) от многообразия с размерностью $(1 + 3) \equiv 4$ к многообразию с меньшей размерностью $(1 + d)$; $d < 3$ при достаточно малых расстояниях (больших переданных импульсах).

Наш подход не предполагает модификации понятия времени. Вместо этого мы подразумеваем некоторую достаточно гладкую редукцию пространственных измерений. В результате физическое пространство является непрерывным, но, возможно, не бесконечно гладким многообразием и состоит из частей с различными топологическими размерностями. Ниже будут использованы некоторые игрушечные модели пространства с переменной геометрией. Для наработки физической интуиции и опыта мы начнем со скалярно-волновых решений уравнения Клейна–Гордона (УКГ).

Рассмотрим УКГ для комплексного скалярного поля $\varphi(x)$ на некотором $(1 + d)$ -мерном пространстве-времени с сигнатурой $\{+, -, \dots, -\}$, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d$, $x = \{x^0, x^1, \dots, x^d\} = \{x^0, \mathbf{x}\}$, где $x^0 = t$ и $d \geq 1$ – целое число измерений пространства. УКГ записывается следующим образом:

$$\square\varphi - M^2\varphi = 0, \quad \square = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu). \quad (1.1)$$

Обычно после квантования [3] (см. также гл. 1 в монографии [4] и книгу [5]) комплексное поле $\varphi(x) \neq \varphi^*(x)$ соответствует заряженным частицам с электрическим зарядом $Q = \pm 1$ и (действительной) массой M с током $j_\mu = i(\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*)$, подчиняющимся уравнению непрерывности, которое дает закон сохранения заряда.

Простейшая возможность для выбора системы отсчета состоит в использовании гауссовых координат, в которых $(1 + d)$ -мерный оператор $\square$ приобретает (по крайней мере, локально) вид

$$\square = -\partial_{tt}^2 + \Delta_d, \quad \Delta_d = \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \partial_m (\sqrt{|\gamma|} \gamma^{mn} \partial_n), \quad m, n = 1, \dots, d, \quad (1.2)$$

с d -мерным лапласианом Δ_d , определенным d -мерной метрикой γ_{mn} стандартным образом. Итак, с самого начала мы работаем в рамках $(1 + d)$ -формализма с глобальным временем, что является обязательным для создания правильной физической картины, особенно для квантовой теории поля. Как следствие, для наших решений частота ω не будет меняться в частях различных размерностей.

2. УКГ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1. УКГ в размерности $(1 + 2)$ с цилиндрической пространственной симметрией. Рассмотрим УКГ

$$\square\varphi - M^2\varphi = -\partial_{tt}^2\varphi + \Delta_2\varphi - M^2\varphi = 0 \quad (2.1)$$

на двумерном многообразии $\mathbb{M}_{\phi z}^2$ с цилиндрической симметрией. В декартовых координатах оно определено функцией профиля $\rho(z)$ как поверхность вращения в трехмерном евклидовом многообразии $\mathbb{R}_{X^1 X^2 X^3}^3$: $X^1 = \rho(z) \cos \phi$, $X^2 = \rho(z) \sin \phi$, $X^3 = z$.

Ограничение на евклидов трехмерный интервал $(dL)^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2$ на двумерном многообразии $\mathbb{M}_{\phi z}^2$ записывается как

$$(dl)^2 = \gamma_{mn} dx^m dx^n = \rho^2 d\phi^2 + (1 + \rho'^2) dz^2, \quad \rho' = \frac{d\rho}{dz}. \quad (2.2)$$

Лапласиан в явной форме

$$\Delta_2 = \frac{1}{\rho^2} \left(\partial_{\phi\phi}^2 + \frac{\rho}{\sqrt{1 + \rho'^2}} \partial_z \frac{\rho}{\sqrt{1 + \rho'^2}} \partial_z \right) \quad (2.3)$$

допускает разделение переменных $\varphi(t, \phi, z) = T(t)\Phi(\phi)Z(z)$, дающее систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Два из них весьма просты: $T'' + \omega^2 T = 0 \Rightarrow T(t) = e^{-i\omega t}$ и $\Phi'' + m^2 \Phi = 0 \Rightarrow \Phi(\phi) = e^{im\phi}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Единственное нетривиальное уравнение – уравнение на функцию $Z(z)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho\sqrt{1 + \rho'^2}} \partial_z \left(\frac{\rho}{\sqrt{1 + \rho'^2}} \partial_z Z \right) + \left(\omega^2 - M^2 - \frac{m^2}{\rho^2(z)} \right) Z &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow Z(z) &= Z(z; \omega, m). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Оно содержит примечательный член $m^2/\rho^2(z)$, имеющий вид потенциальной энергии центробежной силы, действующей при $m \neq 0$. Заметим, что этот член представляет простейший пример инерциальной силы с прозрачным физическим смыслом. Подобные силы неизбежны при движении в искривленном пространстве-времени. Они возникают в переходных областях между частями пространств с разными топологическими измерениями. Поэтому появляется надежда кое-что узнать о возможных физических эффектах инерциальных сил, действующих в описанном выше классе искривленных пространств-времен с переменной размерностью.

2.2. Преобразование задачи к решению ОДУ типа уравнения Шредингера. Полезное математическое свойство для изучения решений уравнения (2.4) состоит в следующем.

ТЕОРЕМА. Уравнение (2.4) может быть преобразовано к ОДУ типа стационарного уравнения Шредингера:

$$U''(u) + (E - V(u))U(u) = 0. \quad (2.5)$$

Следует заметить, что возможность сведения решения УКГ к решению ОДУ типа уравнения Шредингера возникает благодаря разделению переменных в УКГ. Кроме того, используется тот факт, что любая двумерная метрика γ_{mn} является конформно плоской. Выполняя преобразование координаты $z \rightarrow u$ и функции профиля $\rho(z) \rightarrow \varrho(u) = \rho(z(u))$:

$$\begin{aligned} z \mapsto u: u(z) &= \int \sqrt{1 + (\rho'(z))^2} \frac{dz}{\rho(z)}, \\ u \mapsto z: z(u) &= \int \sqrt{\varrho^2(u) - \left(\frac{d\varrho}{du} \right)^2} du, \end{aligned} \quad (2.6)$$

мы получаем лапласиан (2.3) в виде $\Delta_2 = \varrho^{-2}(\partial_{\phi\phi}^2 + \partial_{uu}^2)$, который показывает, что для наших задач функция $\varrho^2(u) = \rho^2(z(u))$ в точности является двумерным конформным фактором. В переменной u уравнение (2.4) приобретает вид (2.5):

$$U''(u) + (-m^2 - (M^2 - \omega^2)\varrho^2(u))U(u) = 0 \quad (2.7)$$

при отождествлении $E = 0$, $V(u) = (M^2 - \omega^2)\varrho^2(u) + m^2$, $Z(z) = U(u(z))$.

Таким образом, изучение УКГ на рассматриваемых искривленных многообразиях сводимо к решениям уравнения типа Шредингера с потенциалом $V(u)$, определенной геометрией. Обширная литература, посвященная свойствам таких уравнений и их решений для конкретных потенциалов $V(u)$ (см., например, [6], [7]) может быть теперь использована для нашей задачи. Заметим также, что в уравнении (2.7) нет спектрального параметра, подобного обычной квантово-механической энергии E в (2.5), которая складывается с членом $E - V$. Вместо этого специфический спектральный параметр ω в нашей задаче входит в фактор $M^2 - \omega^2$ в потенциальной функции $V(u)$. Эта деталь своеобразно изменяет хорошо известные спектры квантовых задач, представленных в литературе. В частности, некоторые решения ниже основного состояния (2.5), не имеющие физического смысла в обычном квантово-механическом случае, здесь как бы “всплывают в физическую область” в контексте УКГ благодаря изменению основного состояния, когда $M^2 - \omega^2$ меняет знак.

Этот результат может быть рассмотрен как реализация старой идеи Герца [8] о геометрическом описании физических сил, но теперь на языке волн. Он может быть использован также в теории волноводов в акустике, оптике, для радиоволн и в других областях волной физики.

2.3. Скалярное волновое уравнение в $(1+1)$ -мерном пространстве-времени. Для одномерного пространства с координатой z и лапласианом $\Delta_1 = \partial_{zz}^2$ волновая функция имеет простую форму:

$$\varphi_1^{Q\pm}(t, z) = \begin{cases} \text{const} \times e^{-i\omega t} e^{\pm i\sqrt{\omega^2 - M^2}z}, & Q = +1 \Rightarrow \text{частицы}, \\ \text{const} \times e^{i\omega^* t} e^{\mp i\sqrt{(\omega^*)^2 - M^2}z}, & Q = -1 \Rightarrow \text{античастицы}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Дополнительный верхний индекс $\pm$ отвечает знаку импульса $p_z = \pm k = \pm\sqrt{\omega^2 - M^2}$ или комплексно-сопряженного импульса $p_z^* = \pm k^* = \pm\sqrt{(\omega^*)^2 - M^2}$. При соглашении $\text{Re } \omega \geq 0$ в решениях для частиц мы получаем стандартную релятивистскую комбинацию $+i(\omega t - p_z z) = +ipx$, а в решениях для античастиц $-i(\omega^* t - p_z^* z) = (+ipx)^*$.

3. НЕКОТОРЫЕ ЯВНЫЕ ПРИМЕРЫ

3.1. Два цилиндра радиусов R и $r < R$, соединенные частью конуса. Обратимся к простому примеру двумерного пространства [1]: поверхности двух цилиндров радиусов R и $r < R$ непрерывно связаны частью конуса (см. рис. 1). Пусть ось симметрии – это горизонтальная ось Oz с началом, расположенным в вершине конуса. Тогда функция профиля $\rho(z)$ (см. рис. 2) имеет вид

$$\rho(z) = \begin{cases} R = \text{const}, & z \in [z_R, +\infty), \\ z \text{ tg } \alpha, & z \in [z_r, z_R], \\ r = \text{const}, & z \in (-\infty, z_r]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Рис. 1. Два цилиндра радиусов R и $r < R$, соединенные непрерывно частью конуса.

Рис. 2. Сечения непрерывного, но не гладкого многообразия, образованного цилиндрами с радиусами $R = 1$ и $r = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$, связанные частью конуса с углом раствора $\alpha = \pi/7$.

Здесь $\alpha \in (0, \pi/2)$ – это половина фиксированного угла при вершине конуса и $z_R = R \operatorname{ctg} \alpha > 0$, $z_r = r \operatorname{ctg} \alpha > 0$. Следующие выражения для функций $z(u)$ и $\varrho(u)$ (см. рис. 3, 4) получены из (2.6):

$$z(u; R, r, \alpha) = \begin{cases} Ru, & u \geq u_R, \\ Ru_R e^{u \sin \alpha - \cos \alpha}, & u \in [u_r, u_R], \\ r \left(u + \frac{\ln(R/r)}{\sin \alpha} \right), & u \leq u_r, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\varrho(u; R, r, \alpha) = \begin{cases} R, & u \geq u_R, \\ R e^{u \sin \alpha - \cos \alpha}, & u \in [u_r, u_R], \\ r, & u \leq u_r, \end{cases} \quad (3.3)$$

где $u_R = \operatorname{ctg} \alpha$ и $u_r = \operatorname{ctg} \alpha - \ln(R/r)/\sin \alpha$.

Рис. 3. Предел $r \rightarrow 0$ функции $z(u; R, r, \alpha)$. Рис. 4. Предел $r \rightarrow 0$ функции $q(u; R, r, \alpha)$.

Для волн на поверхности цилиндра с произвольным постоянным радиусом ρ имеет место следующее дисперсионное соотношение:

$$k_\rho = \sqrt{\omega^2 - M^2 - \frac{m^2}{\rho^2}}. \quad (3.4)$$

При нормировке: $\varphi_{\omega, m}^{Q\pm} = (a/\sqrt{2})e^{-iQ\omega t}e^{im\phi}e^{\pm k_\rho z}$, комплексные решения УКГ с зарядом $Q = \pm 1$ и массой M на цилиндре с радиусом ρ порождают сохраняющийся ток с компонентами

$$j^t = Q|a|^2 \operatorname{Re} \omega, \quad j^\phi = m|a|^2, \quad j^z = \pm |a|^2 \operatorname{Re} k_\rho. \quad (3.5)$$

Как видно, для $m \neq 0$ волна вращается по поверхности цилиндра, так как в (3.5) $J^\phi \neq 0$. Это вращение скалярной волны порождает центробежную силу. Становится ясно, что для $m \neq 0$ в пределе $\rho \rightarrow \rho_{\text{crit}} = |m|/\sqrt{\omega^2 - M^2}$ высота барьера центробежного потенциала возрастает неограниченно и останавливает все физические сигналы. В противоположность этому, такое препятствие отсутствует для не вращательного движения вдоль оси Oz при $m = 0$. Физические сигналы могут распространяться по общей степени свободы двух частей физического пространства с разными топологическими измерениями.

Используя стандартное условие непрерывности функции $Z(z)$ и ее производной $Z'(z)$, для волн, идущих направо от $z = -\infty$ к $z = +\infty$ и отражающихся на соединении, получаем (см. обозначения в приложении A)

$$\begin{aligned} \vec{Z}(z; \omega, m; R, r, \alpha) = & -\Theta_r^+ e^{ik_r z_r} \times \\ & \times \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{2ik_r z_r}{\Delta} e^{ik_R(z-z_R)}, & z \geq z_R, \\ \frac{2ik_r z_r}{\Delta} (Y_R^- J_\nu(k_c z) - J_R^- Y_\nu(k_c z)), & z_r \leq z \leq z_R, \\ -e^{ik_r(z-z_r)} + \frac{\Delta_{11}}{\Delta} e^{-ik_r(z-z_r)}, & z \leq z_r, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

тогда как для волн, идущих налево от $z = +\infty$ к $z = -\infty$, находим

$$\begin{aligned} \overleftarrow{Z}(z; \omega, m; R, r, \alpha) = & -\Theta_R^- e^{-ik_R z_R} \times \\ & \times \begin{cases} -e^{-ik_R(z-z_R)} + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} e^{ik_R(z-z_R)}, & z \geq z_R, \\ \frac{2ik_R z_R}{\Delta} (Y_r^+ J_\nu(k_c z) - J_r^+ Y_\nu(k_c z)), & z_r \leq z \leq z_R, \\ \frac{2}{\pi} \frac{2ik_R z_R}{\Delta} e^{-ik_r(z-z_r)}, & z \leq z_r. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Рассмотрим предел $r \rightarrow +0$, $R = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$ в соотношении (3.1), когда двумерная поверхность цилиндра с радиусом r и $z \leq z_r$ превращается в одномерное многообразие – бесконечно тонкую нитку, натянутую вдоль отрицательной части оси Oz . С геометрической точки зрения это весьма сингулярный предел (см. рис. 3, 4). В этом пределе $z_R = R \text{ctg } \alpha$ не изменяется, $z_r \rightarrow 0$, а третья часть кусочно-гладких функций $z(u; R, r, \alpha)$ (3.2) и $\varrho(u; R, r, \alpha)$ (3.3), заданная на интервале $u \in [-\infty, u_r]$, исчезает, потому что $u_r \rightarrow -\infty$. В результате функция формы $\varrho(u; R, r, \alpha)$ или соответствующий конформный фактор $\varrho^2(u; R, r, \alpha)$ не подходят для описания одномерной части порождающегося непрерывного (но не гладкого) многообразия с изменяющимся измерением, поскольку бесконечный интервал $u \in (-\infty, \infty)$ отображается только на полубесконечный интервал $z \in [0, \infty)$, когда $r = 0$.

3.1.1. Состояния непрерывного спектра. Если $J_R^- \neq 0$, то мы получаем для действительных частот $\omega \geq M$

$$\mathbf{S}(\omega, m; R, \alpha) = \lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{S}(\omega, m; R, r, \alpha) = -\Theta_R^- e^{-2ik_R z_R} \frac{J_R^+}{J_R^-} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Очевидны несколько важных следствий, справедливых в случае $m \neq 0$.

1. В пределе $r \rightarrow +0$ коэффициенты перехода $|S_{12}|^2 = |S_{21}|^2 \equiv 0$. Следовательно, общение посредством волнового сигнала с азимутальным числом $m \neq 0$ между областями с разными измерениями оказывается невозможным.

2. Фактически предел $r \rightarrow +0$ решений, идущих из $z = -\infty$, тривиален для любых $m \neq 0$:

$$\vec{Z}(z; \omega, m; R, \alpha) = \lim_{r \rightarrow 0} \vec{Z}(z; \omega, m; R, r, \alpha) \equiv 0$$

везде, поскольку фактор $\Theta_r^+ = \Theta(\omega - \sqrt{M^2 + m^2/r^2}) \equiv 0$ для $r < \sqrt{\omega^2 - M^2}/|m|$ в (3.6). Кроме того, $S_{11} \rightarrow 0$, $S_{12} \rightarrow 0$.

3. В двумерной области пространства для действительных частот ω модуль коэффициента отражения S_{22} будет $|S_{22}| \equiv 1$, т.е. происходит полное отражение на конусе от волн, идущих от $z = +\infty$, сопровождающееся изменением фазы рассеянной волны в соответствии с уравнением (3.8). Таким образом, мы получаем следующие нетривиальные решения с $m \neq 0$:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{Z}(z; \omega, m; R, \alpha) &= \lim_{r \rightarrow 0} \overleftarrow{Z}(z; \omega, m; R, r, \alpha) = \\ &= -\Theta_R^- e^{-ik_R z_R} \begin{cases} -e^{-ik_R(z-z_R)} + \frac{J_R^+}{J_R^-} e^{ik_R(z-z_R)}, & z \geq z_R, \\ \frac{2ik_R z_R}{J_R^-} J_\nu(k_c z), & 0 \leq z \leq z_R, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases} \quad (3.9) \end{aligned}$$

Нужно отметить следующие особенности этих решений.

1. Они регулярны и конечны везде, включая сингулярную точку $z = 0$, в которой они исчезают.

2. Они не проникают и не распространяются в одномерную часть пространства.

3. Не существует решений с неотрицательными $\omega < \sqrt{M^2 + m^2/R^2}$, потому для них фактор Θ_R^- обращается в нуль. Очевидно, это правильный физический результат, поскольку для $\omega = \sqrt{M^2 + m^2/R^2}$ групповая скорость волн исчезает. К тому же в этом случае длина волн становится бесконечной.

4. Волны, которые распространяются на конусном соединении, обладают комплексным непрерывным спектром импульсов p_z . Он может быть получен преобразованием Фурье решения (3.9) по переменной z . Этот спектр представляет собой своеобразный “отпечаток пальцев”, который характеризует геометрию переходной области (в данном случае – конуса). Можно надеяться, изучая этот спектр, восстановить геометрию соединения, по крайней мере, в какой-то степени. Аналогичная задача впервые была поставлена в акустике в 1877 г. Рэлеем, а затем существенно продвинута Вейлем в 1911 г., а позже и многими другими (см. обзорную статью [9] и ссылки в ней).

3.1.2. Резонансные состояния. До настоящего времени мы работали вдали от полюсов матрицы рассеяния $\mathbf{S}$, определенных как нули знаменателя в соотношениях (3.8) или (3.9). Для некоторого $m \neq 0$ рассмотрим дискретную (бесконечную) последовательность частот $\omega_{n,m}$, $n = 0, 1, \dots$, которые подчиняются условию $J_R^- = 0$. Используя безразмерную переменную $\Omega = k_c z_R$, запишем спектральное условие в виде $\Omega J'_\nu(\Omega)/J_\nu(\Omega) = \cos \alpha \sqrt{\nu^2 - \Omega^2}$. Типичная картина – отсутствие действительных

Рис. 5. Комплексный спектр $\omega_{n,m}^Q$, $n = 0, 1, 2, \dots$, для $m = 10$, $\alpha = \pi/3$, $M = 0$ и $R = \sin \alpha$. Черные точки – частицы, серые точки – античастицы.

Рис. 6. Комплексный спектр $\omega_{n,m}^Q$, $n = 0, 1, 2, \dots$, для $m = 10$, $\alpha = \pi/3$, $M = 28.85$ и $R = \sin \alpha$. Черные точки – частицы, серые точки – античастицы.

корней и некоторая последовательность комплексных корней – показана на рис. 5, 6. Как видно, имеется бесконечное число комплексных резонансных частот

$$\omega_{n,m}^Q = \sqrt{M^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{R^2} (\Omega_{n,m}^Q)^2}, \quad (3.10)$$

которые соответствуют комплексным корням $\Omega_{n,m}$ и зависят в какой-то степени от массы M скалярного поля (см. рис. 5, 6). Спектр $\omega_{n,m}^Q$ характеризует геометрию конической формы соединения и непрерывный, но не гладкий переход между двумя цилиндрами.

Используя асимптотическое разложение функций Бесселя $J_\nu(\Omega)$ для больших $|\Omega| \gg \nu = |m|/\sin \alpha$, получаем асимптотики комплексных корней

$$\Omega_{n,m}^Q \approx \pi \left(n + \frac{|m|}{2 \sin \alpha} - \frac{1}{4} \right) - iQ \operatorname{arctg}(\cos \alpha), \quad (3.11)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Выбор знака мнимой части $\Omega_{n,m}^Q$ в (3.11) обеспечивает экспоненциальное затухание полевых возбуждений, когда $t \rightarrow +\infty$, как для частиц $Q = +1$, так и для античастиц $Q = -1$.

Простая формула (3.11) отражает в какой-то степени влияние геометрии соединения от двумерного к одномерному пространству на физику резонансных возбуждений поля Клейна–Гордона.

Когда угол раствора конуса стремится к верхнему пределу: $\alpha \rightarrow \pi/2$ и $n \gg |m|$, справедливо соотношение

$$\omega_{n,m}^Q \rightarrow \sqrt{M^2 + \frac{\pi^2}{R^2} \left(n + \frac{|m|}{2} - \frac{1}{4} \right)^2}.$$

В этом пределе период полураспада резонансных возбуждений $\tau_{n=0,m} = 1/|\operatorname{Im}(\omega_{n=0,m}^Q)| \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает, т.е. резонансные возбуждения сохраняются очень длительное время.

В противоположном случае, когда угол $\alpha \rightarrow 0$, само приближение (3.11) не действительно, поскольку $|\Omega_{n,m}^Q| \sim \pi\nu \rightarrow \infty$ и условие $|\Omega_{n,m}^Q| \gg \nu$ не выполняется в нужной мере, так как $|\Omega_{n,m}^Q|/\nu \sim \pi > 1$, однако $\pi \not\gg 1$. Соответствующие более аккуратные оценки могут быть найдены в работе [10].

Таким образом, мы наблюдаем, что изменение топологического измерения пространства действительно дает новый физический эффект. В частности, эффективный спектр масс возмущений (3.10) и их времен жизни зависит от геометрии соединения двумерного и одномерного пространств.

Используя простейшую нормировку, запишем два эквивалентных представления для резонансных релятивистских волновых функций:

$$Z_{\text{res}}(z; \omega_{n,m}, m; R, \alpha) = \begin{cases} e^{ik_R(z-z_R)}, & z \geq z_R, \\ Z_{\text{res,c}}(z; \omega_{n,m}, m; R, \alpha), & z_r \leq z \leq z_R, \\ 0, & z \leq z_r, \end{cases} \quad (3.12a)$$

где

$$Z_{\text{res,c}}(z; \omega_{n,m}, m; R, \alpha) = \frac{\pi}{2} Y_R^- J_\nu(k_c z) \equiv \frac{2ik_R z_R}{J_R^+} J_\nu(k_c z), \quad (3.12b)$$

получив попутно некое тождество для функций Бесселя и их производных.

3.2. Коническое соединение с гладким переходом в цилиндр. Рассмотрим специальный случай функции¹⁾ $\varrho(u) = Re^{pu}/(1 + e^{pu})$. В переменных ρ, z

¹⁾ Другие примеры аналитических решений УКГ на двумерных многообразиях с цилиндрической симметрией см. в работе [10].

Рис. 7. Коническое соединение с гладким переходом в цилиндр.

соответствующая функция формы поверхности задана уравнением

$$\frac{z(\rho)}{R} = \frac{1}{p} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - p^2(1 - \rho/R)^2}}{1 - \rho/R} - \frac{1}{p} \sqrt{1 - p^2 \left(1 - \frac{\rho}{R}\right)^2} + \text{const}, \quad (3.13)$$

определяющим неявным образом двумерную поверхность (см. рис. 7).

Возможные формы ее сечений показаны на рис. 8. В вершине у нас по-прежнему коническая поверхность с углом $\alpha = \arctg(p/\sqrt{1 - p^2})$. Поэтому $p = \sin \alpha$.

При $E = 0$ уравнение (2.5) с потенциалом $V(u) = V_0/(1 + e^{-pu})^2 + m^2$, где $V_0 = R^2(M^2 - \omega^2)$, имеет два независимых решения в виде (см. обозначения в приложении Б)

$$U^\pm(u) = A_\pm(u)e^{\pm mu} = \frac{\Gamma(c_\pm)\Gamma(b_\pm - a_\pm)}{\Gamma(b_\pm)\Gamma(c_\pm - a_\pm)} B_\pm(u)e^{-u\sqrt{V_0+m^2}} + \frac{\Gamma(c_\pm)\Gamma(a_\pm - b_\pm)}{\Gamma(a_\pm)\Gamma(c_\pm - b_\pm)} C_\pm(u)e^{+u\sqrt{V_0+m^2}}. \quad (3.14)$$

При этом $A_\pm(u) \rightarrow 1$ для $u \rightarrow -\infty$, а $B_\pm(u), C_\pm(u) \rightarrow 1$ для $u \rightarrow +\infty$.

Если подставить $\overleftarrow{|m|}$ вместо $\pm m$ на всех местах в формуле (3.14), то из нее получаем решения $\overleftarrow{U}(u; \omega, m; R, a)$, являющиеся аналогом (3.9) и также исчезающие на вершине конуса.

Полюсы S -матрицы определены уравнениями $b_+ = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, либо уравнениями $c_+ - a_+ = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. В результате приходим к последовательности частот:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{M^2 + \frac{m^2}{R^2} - \frac{m^2 - p^2/4}{R^2} W^2 \left(\frac{(2n+1)p/2 + |m|}{\sqrt{m^2 - p^2/4}} \right)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Здесь мы использовали функцию Жуковского $W(x) = (x + 1/x)/2$. Можно увидеть, что при $M > 0$ между частотами (3.15) имеется конечное число вещественных – для $n \in [0, n_{\max}]$, где $n_{\max} = [\mathcal{N}]$, т. е. равно целой части числа

$$\mathcal{N} = \sqrt{\left(\frac{MR}{p}\right)^2 + \left(\frac{m}{p}\right)^2 - \frac{|m|}{p}} + \sqrt{\left(\frac{MR}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} > 0,$$

Рис. 8. Части двумерной поверхности $\rho(z)$ для $R = 1$ и $p = \sin \alpha = 0.185$ (кривая 1), 0.23 (кривая 2), 0.30 (кривая 3), 0.43 (кривая 4), 1.00 (кривая 5).

а также бесконечное число чисто мнимых частот – для $n > n_{\max}$. Так как получаемые из (3.15) вещественные частоты по величине меньше $\sqrt{M^2 + m^2/R^2}$, соответствующие им импульсы $\sqrt{\omega_{n,m}^2 - M^2 - m^2/R^2}$ являются чисто мнимыми. Такие решения отвечают сериям связанных состояний с разными n и m , которые затухают экспоненциально на пространственной бесконечности.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщим наши результаты.

1. Доказана полезная теорема, которая соотносит УКГ на пространствах с переменной геометрией уравнению типа Шредингера с эффективным потенциалом, порожденным изменением геометрии. Этот результат основан на разделении переменных в УКГ и на том, что двумерные пространства конформно плоски. Показано, что в случае размерности пространства $d = 2$ конформный фактор метрики входит в эффективный потенциал в уравнении типа Шредингера в силу соответствующих замен переменных. Обобщение для размерностей пространства $d > 2$ изучается в [11].

2. Как следствие мы заключаем, что получаемые спектры возбуждений полей могли бы служить “отпечатками пальцев” формы области соединения $\rho(z)$. Полученные нетривиальные спектры скалярных возбуждений качественно напоминают некоторые реальные спектры резонансов элементарных частиц.

3. Сигналы, относящиеся к степеням свободы, присущим лишь высокоразмерной части пространства, не распространяются свободно сквозь область соединения (в частности, эти сигналы не проникают в область с низшей размерностью). В нашей игрушечной модели причиной является центробежная сила, действующая на решения с ненулевым угловым моментом. В предельном случае размерной редукции эта сила возрастает до бесконечности и блокирует все решения, кроме решения, имеющего азимутальный номер $m = 0$. Можно сказать, что сигналы, которые проникают из высоких измерений в низкие измерения, суть только сигналы, ассоциированные с общими степенями свободы.

Изучение переменной геометрии в более реалистических ($d = 3$) пространствах представляет несомненный интерес для дальнейшей работы. Этот случай более близок к задачам волновой физики (акустика, волноводы и пр.).

Очевидно нарушение четности вследствие асимметрии пространственной геометрии. Следовательно, пространства с изменяемой геометрией, возможно, дают нам простое основание для описания действительной ситуации с С-, Р- и Т-свойствами частиц.

Второй из перечисленных результатов приводит к новой идее: можно попытаться воспроизвести подобие наблюдаемых спектров элементарных частиц, используя подходящую геометрию области соединения между частями пространства-времени с разными топологическими измерениями.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Краткие обозначения для формул раздела 3

В задаче с областью конического соединения используются стандартные обозначения для функций Бесселя $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$. Иногда $J_\nu(x)$ называют функциями Бесселя, а функции $Y_\nu(x)$ – функциями Неймана ($N_\nu(x) \equiv Y_\nu(x)$) [12], [13].

Для волновых чисел волн вдоль оси z на соответствующих цилиндрах приняты обозначения:

$$k_R = \sqrt{\omega^2 - M^2 - m^2/R^2} \quad (\text{Re } k_R \geq 0), \quad k_r = \sqrt{\omega^2 - M^2 - m^2/r^2} \quad (\text{Re } k_r \geq 0).$$

На конусе используется величина $k_c = \sqrt{\omega^2 - M^2}/\cos \alpha$. Заметим, что волновое число одномерных волн $m = 0$, распространяющихся по оси Oz (см. (2.8)), – это просто проекция $k = k_c \cos \alpha = \sqrt{\omega^2 - M^2}$ ($\text{Re } k \geq 0$).

Используются также краткие обозначения:

$$\begin{aligned} J_\nu^\pm(x, \alpha) &= \left(x \frac{d}{dx} \pm i\kappa_\nu(x, \alpha) \right) J_\nu(x), \quad Y_\nu^\pm(x, \alpha) = \left(x \frac{d}{dx} \pm i\kappa_\nu(x, \alpha) \right) Y_\nu(x), \\ \kappa_\nu(x, \alpha) &= \cos \alpha \sqrt{x^2 - \nu^2}, \quad \kappa_R = \kappa_\nu(k_c z_R, \alpha) = k_R z_R, \quad \kappa_r = \kappa_\nu(k_c z_r, \alpha) = k_r z_r, \\ J_R^\pm &= J_\nu^\pm(k_c z_R, \alpha), \quad J_r^\pm = J_\nu^\pm(k_c z_r, \alpha), \quad Y_R^\pm = Y_\nu^\pm(k_c z_R, \alpha), \quad Y_r^\pm = Y_\nu^\pm(k_c z_r, \alpha), \\ \Delta &= J_R^+ Y_r^+ - J_r^+ Y_R^+, \quad \Delta_{11} = J_R^- Y_r^- - J_r^- Y_R^-, \quad \Delta_{22} = J_R^+ Y_r^+ - J_r^+ Y_R^+. \end{aligned}$$

Эти обозначения полезны для компактного описания решений и S -матрицы в формулах (3.6)–(3.9) и (3.12).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Краткие обозначения в формуле (3.14)

В формуле (3.14) использованы следующие сокращения:

$$\begin{aligned} a_\pm &= \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \left(\sqrt{V_0 + m^2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + V_0 \pm m} \right), \\ b_\pm &= \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \left(-\sqrt{V_0 + m^2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + V_0 \pm m} \right), \quad c_\pm = 1 \pm i \frac{2}{p} m, \\ A_\pm(u) &= (1 + e^{pu})^{1/2 - \sqrt{1/4 + V_0/p^2}} {}_2F_1(a_\pm, b_\pm; c_\pm; -e^{pu}), \end{aligned}$$

$$B_{\pm}(u) = (1 + e^{-pu})^{1/2 - \sqrt{1/4 + V_0/p^2}} {}_2F_1(a_{\pm}, a_{\pm} - c_{\pm} + 1; a_{\pm} - b_{\pm} + 1; -e^{-pu}),$$

$$C_{\pm}(u) = (1 + e^{-pu})^{1/2 - \sqrt{1/4 + V_0/p^2}} {}_2F_1(b_{\pm}, b_{\pm} - c_{\pm} + 1; b_{\pm} - a_{\pm} + 1; -e^{-pu}).$$

Благодарности. Авторы благодарны И. Арефьевой и О. Теряеву за полезные обсуждения, а Л. Симеонову за помощь в вычислениях. Д. В. Ширков выражает признательность С. Растопчиной за постоянную поддержку на протяжении последних 60 лет. Настоящая работа частично финансировалась Президентской программой поддержки ведущих научных школ (грант 3810.2010.2) и РФФИ (грант № 08-01-00686, 11-01-00182), а также Болгарским национальным научным фондом (контракты DO-1-872, DO-1-895 и DO-02-136).

Список литературы

- [1] D. V. Shirkov, *Письма в ЭЧАЯ*, **7**:6(162) (2010), 625–631, arXiv: 1004.1510.
- [2] L. Anchordoqui, De Ch. Dai, M. Fairbairn, G. Landsberg, D. Stojkovic, *Vanishing dimensions and planar events at the LHC*, arXiv: 1003.5914.
- [3] W. Pauli, *Rev. Modern Phys.*, **13**:3 (1941), 203–232.
- [4] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М., 1984.
- [5] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Квантовые поля*, Наука, М., 1993.
- [6] В. де Альфаро, Т. Редже, *Потенциальное рассеяние*, Мир, М., 1966.
- [7] З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике*, т. 1, Мир, М., 1965.
- [8] Г. Герц, *Принципы механики, изложенные в новой связи*, Изд. АН СССР, М., 1959.
- [9] W. Arendt, R. Nittka, W. Peter, F. Steiner, “Weyl’s Law: Spectral Properties of the Laplacian in Mathematics and Physics”, *Mathematical Analysis of Evolution, Information, and Complexity*, eds. W. Arendt, W. P. Schleich, Wiley-VCH, Weinheim, 2009, 1–71.
- [10] P. P. Fiziev, D. V. Shirkov, “Amusing properties of Klein–Gordon solutions on manifolds with variable geometry”, The International Workshop “Bogoliubov Readings” (September 22–25, 2010, JINR, Dubna), <http://tcpa.uni-sofia.bg/index.php?n=7>.
- [11] P. P. Fiziev, *Riemannian (1 + d)-Dim Space-Time Manifolds with Nonstandard Topology which Admit Dimensional Reduction to Any Lower Dimension and Transformation of the Klein-Gordon Equation to the 1-Dim Schrodinger Like Equation*, arXiv: 1012.3520.
- [12] М. Абрамовиц, И. Стеган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.
- [13] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, М., 1971.

Поступила в редакцию 19.12.2010