Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Беккариа, Г. Макорини, А. Тирзиу, Квазиклассические короткие струны в $AdS_5 \times S^5$, *ТМФ*, 2011, том 167, номер 3, 342–353

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6645>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:16:18

© 2011 г. М. Беккариа*, Г. Макорини*, А. Тирзиу†

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ КОРОТКИЕ СТРУНЫ В $AdS_5 \times S^5$

Представлены результаты для однопетлевой поправки к энергии струнных решений в пространстве $AdS_5 \times S^5$, принадлежащих некоторому классу, в пределе коротких струн. Вычисления основаны на наблюдении, что, как и для эллиптических решений в случае жесткой спиновой струны, операторы флуктуаций можно представить в одноцелевом виде Ламе. На основании этих расчетов выявлена замечательная универсальность выражения для энергии коротких квазиклассических струн, что может помочь лучше понять структуру разложения сильной связи для аномальных размерностей операторов дуальной калибровочной теории.

Ключевые слова: соответствие АдС/КТП, интегрируемость, анзац Бете.

1. ВВЕДЕНИЕ

Значения энергии состояний суперструны типа II В, распространяющейся в пространстве $AdS_5 \times S^5$, дуальны аномальным размерностям в планарной $\mathcal{N} = 4$ супертеории Янга–Миллса и представляют собой интересные наблюдаемые величины, зависящие от натяжения струны и различных сохраняющихся зарядов. В принципе, их можно рассчитать, используя термодинамический анзац Бете [1], который хорошо поддается контролю вследствие интегрируемости теории. Тем не менее важно найти конкретные ограничения, в рамках которых можно получить явные аналитические результаты.

Один из таких подходов – квазиклассическое разложение, которое разработано в пределе, когда сохраняющиеся заряды имеют масштаб натяжения струны (или константы связи 'т Хофта) $\sqrt{\lambda}/2\pi \gg 1$. Ожидается, что в этом пределе предсказания термодинамического анзаца Бете точно соответствуют однопетлевой струнной поправке к энергиям [2], а частоты флуктуаций, получаемые из подхода, основанного на алгебраической кривой, соответствуют частотам флуктуаций, найденным непосредственно из струнного квадратичного лагранжиана (и те, и другие являются возмущениями решений одних и тех же уравнений), и тогда можно утверждать [3],

*Physics Department, Salento University and INFN, Lecce, Italy.
E-mail: matteo.beccaria@le.infn.it, guido.macorini@le.infn.it

†American Physical Society, Ridge, NY, USA. E-mail: atirziu@aps.org

что результат теории струн, интерпретируемый как сумма частот флуктуаций, извлекаемых из алгебраической кривой, точно соответствует разложению сильной связи для уравнений термодинамического анзаца Бете в том же квазиклассическом пределе. Подробности соответствия между описанием квазиклассических решений в подходе алгебраической кривой и их струнного описания в рамках сигма-модели пока остаются до конца не ясны.

Кроме того, из квазиклассических вычислений можно вывести специальный предел коротких струн, когда струнная конфигурация зондирует область небольшого размера в пространстве $AdS_5 \times S^5$. Это особенно интересно в отношении воспроизведения $PSU(2, 2|4)$ -структуры мультиплета на струнном уровне, включая квантовые поправки.

Строго говоря, помимо рациональных решений в виде жестких струн с лагранжианом флуктуаций, содержащим постоянные коэффициенты [4], вычисление энергий однопетлевых струн методами квантовой теории поля осложнено операторами флуктуаций, смешивающими моды; эти операторы являются матричными двумерными дифференциальными операторами второго порядка с коэффициентами, явно зависящими от координат. В случае струны, сложенной в пространстве AdS_5 и вращающейся вокруг его центра, однопетлевая поправка к энергии связана с функциональным определителем этих операторов. Операторы можно вычислить точно, поскольку возможна редукция к интегрируемым одномерным спектральным задачам Ламе [5]. Существенное упрощение в случае сложенной струны состоит в том, что исходя из физических соображений можно найти такую систему отсчета, в которой флуктуационная задача является статической. Более трудными являются конфигурации так называемых пульсирующих струн. В этом случае имеется, например, струна, вытянутая вдоль параллели сферы S^5 , которая замечает сферу, перемещаясь по широте вверх и вниз относительно одного из полюсов. Флуктуационная задача приобретает существенную зависимость от времени, и для вычисления однопетлевой энергии требуется иной формализм.

В настоящей работе мы представляем основные шаги таких вычислений, следуя общему квазиклассическому методу квантования периодических по времени солитонов [6], [7].

2. ПУЛЬСИРУЮЩАЯ СТРУНА В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R} \times S^2$

Мы будем иметь дело с классическим струнным решением, представляющим пульсирующую струну в $\mathbb{R} \times S^2$. Движение струны показано на рисунке (см. также работы [8]–[10]). Мы будем работать в конформной калибровке и начнем с анзаца для степеней свободы бозонной струны в $\mathbb{R} \times S^2$:

$$\begin{aligned} t &= \kappa\tau, & \psi &= \psi(\tau), & \phi &= m\sigma, & m &= 1, 2, \dots, \\ ds^2 &= -d\tau^2 + d\psi^2 + \sin^2 \psi d\phi^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения движения и условие конформной калибровки (из которого уравнения движения следуют при $\dot{\psi} \neq 0$) имеют вид

$$\ddot{\psi} + m^2 \sin \psi \cos \psi = 0, \quad \dot{\psi}^2 + m^2 \sin^2 \psi = \kappa^2.$$

Качественная картина движения пульсирующей струны.

При $\psi(0) = 0$ решение этих уравнений можно записать в терминах эллиптической функции Якоби (чтобы получить периодическое по времени решение, надо предположить, что $\kappa < m$, и это совместимо с используемым ниже пределом коротких струн) [11]:

$$\sin \psi(\tau) = \frac{\kappa}{m} \operatorname{sn} \left(m\tau \left| \frac{\kappa^2}{m^2} \right. \right), \quad |\sin \psi| \leq \sin \psi_0 = \frac{\kappa}{m}. \quad (2)$$

Энергия и осцилляторное число $\mathcal{N} = (\sqrt{\lambda}/2\pi) \oint d\psi \dot{\psi}$ (которое представляет собой адиабатический инвариант, связанный с ψ) выражаются формулами

$$\mathcal{E}_0 = \frac{E}{\sqrt{\lambda}} = \kappa, \\ \mathcal{N} = \frac{N}{\sqrt{\lambda}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \sqrt{\kappa^2 - m^2 \sin^2 \psi} = \frac{2m}{\pi} \left[\left(\frac{\kappa^2}{m^2} - 1 \right) \mathbb{K} \left(\frac{\kappa^2}{m^2} \right) + \mathbb{E} \left(\frac{\kappa^2}{m^2} \right) \right],$$

где $\sqrt{\lambda}/2\pi$ – натяжение струны, а $\mathbb{K}$ и $\mathbb{E}$ – обычные эллиптические функции [5], [11]. Разложение $\mathcal{N}$ при малых κ дает

$$\mathcal{N} = \frac{\kappa^2}{2m} + \frac{\kappa^4}{16m^3} + \frac{3\kappa^6}{128m^5} + \dots \quad (3)$$

Таким образом, разложение классической энергии в пределе короткой струны (в пределе $\mathcal{N} \rightarrow 0$) имеет вид

$$\mathcal{E}_0(\mathcal{N}) = \sqrt{2m\mathcal{N}} \left(1 - \frac{\mathcal{N}}{8m} - \frac{5\mathcal{N}^2}{128m^2} + \dots \right). \quad (4)$$

2.1. Квадратичные флуктуации вокруг пульсирующего фона. В рамках квазиклассического подхода вычисление однопетлевой поправки к энергии начинается с квадратичных флуктуаций относительно классического решения. Бозонные флуктуации в конформной калибровке описывают две смешанные моды. Их можно расщепить, используя условия связи Вирасоро. Альтернативный эквивалентный подход основан на статической калибровке (см., например, [5]).

В конформной калибровке флуктуации в AdS_5 описывают свободное безмассовое духовое поле и четыре свободных массивных поля с массой κ (здесь $\kappa = 1, 2, 3, 4$; $\partial_a \partial^a = -\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2$). Лагранжиан для пяти S^5 -флуктуаций ξ, η, z_1, z_2, z_3 имеет вид

$$L_S^{(2)} = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 - (\xi')^2 - M_\xi^2 \xi^2) + \frac{1}{2}(\dot{\eta}^2 - (\eta')^2 - M_\eta^2 \eta^2) + m(\xi\eta' - \xi'\eta) \cos \psi + \frac{1}{2}(\dot{z}_i^2 - (z'_i)^2 - M^2 z_i^2) \quad (5)$$

с зависящими от фона массами

$$M^2 = \kappa^2 - 2m^2 \sin^2 \psi, \quad M_\xi^2 = \kappa^2 + m^2 \cos 2\psi, \quad M_\eta^2 = m^2 \cos 2\psi. \quad (6)$$

Можно показать, что взаимодействующая система (ξ, η) эквивалентна расцепленной системе из одной безмассовой моды и массивной моды с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\dot{g}^2 - (g')^2 - \widetilde{M}^2 g^2), \quad \widetilde{M}^2 = \kappa^2 \left(1 - \frac{2}{\sin^2 \psi}\right). \quad (7)$$

Еще одно эквивалентное флуктуационное действие можно получить на основе редукционного подхода Полмайера [12].

Общий лагранжиан фермионных флуктуаций можно найти, например, в работах [5], [13]. Фиксируя κ -симметрию, как обычно, условием $\theta^1 = \theta^2$, после некоторых стандартных процедур получаем (возведенные в квадрат) операторы фермионных флуктуаций для обеих киральностей:

$$\tilde{D}_{F\pm}^2 = \partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2 + M_\pm^2, \quad M_\pm^2 = \psi^2 \pm i\dot{\psi}. \quad (8)$$

Конечность в ультрафиолетовом пределе легко проверить, вычисляя суперслед матрицы квадрата массы. Сумма квадратов масс (с учетом знака) оказывается пропорциональна $\sqrt{-g}R^{(2)}$, т.е. эйлеровой плотности индуцированной метрики, что можно ожидать из общих соображений [14]. После интегрирования по двумерному пространству получаем результат, равный нулю, для цилиндрической топологии, которая подходит для рассматриваемой струнной конфигурации.

2.2. Флуктуационные операторы в виде Ламе. Теперь покажем, что все полученные одномерные спектральные задачи можно представить в стандартном однощелевом виде Ламе (см., например, подробное обсуждение в работе [5]). Это является важным результатом и означает, что все их существенные свойства можно получить точно. Поскольку для решений в виде пульсирующих струн флуктуационные потенциалы не зависят от пространственных координат σ , возьмем разложения Фурье для всех полей: $X(\tau, \sigma) = X(\tau)e^{in\sigma}$, так что

$$-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2 + M^2(\tau) \rightarrow -\partial_\tau^2 + M^2(\tau) - n^2.$$

В зависимости от вида массового члена (т.е. потенциала) $M^2(\tau)$, находим три типа операторов Ламе, которые мы рассмотрим ниже.

Оператор типа I. Оператор, связанный с тремя S^5 -модами z_i из (5) с массой M^2 , заданной в (6), имеет вид

$$\mathcal{O}_I = -\partial_\tau^2 + 2m^2 \sin^2 \psi - \kappa^2 - n^2. \quad (9)$$

Для пульсирующей струны (2) мы можем записать его как

$$\mathcal{O}_I = m^2(-\partial_x^2 + 2k^2 \operatorname{sn}^2(x|k^2) - \Lambda), \quad (10)$$

где

$$x = m\tau, \quad k^2 = \frac{\kappa^2}{m^2}, \quad \Lambda = \frac{\kappa^2 + n^2}{m^2}, \quad (11)$$

т.е. в однощелевой форме Ламе.

Оператор типа II. Теперь рассмотрим S^5 -моду для случая (7) с соответствующей массой $\tilde{M}^2$, имеем оператор

$$\mathcal{O}_{II} = -\partial_\tau^2 + \frac{2\kappa^2}{\sin^2 \psi} - \kappa^2 - n^2 = m^2(-\partial_x^2 + 2\operatorname{ns}^2(x|k^2) - \Lambda), \quad (12)$$

где мы использовали обозначения, введенные в (11). Принимая во внимание тождество $\operatorname{ns}(z|k^2) = k \operatorname{sn}(z + i\mathbb{K}'|k^2)$, получаем (мы ввели стандартное обозначение $\mathbb{K}'(k^2) \equiv \mathbb{K}(1 - k^2)$)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{II} &= m^2(-\partial_x^2 + 2k^2 \operatorname{sn}^2(x|k^2) - \Lambda), \\ x &= m\tau + i\mathbb{K}', \quad k = \frac{\kappa}{m}, \quad \Lambda = \frac{\kappa^2 + n^2}{m^2}, \end{aligned}$$

что опять представляет собой оператор в однощелевой форме Ламе.

Оператор типа III. Оператор фермионных флуктуаций для случая (8) с соответствующей массой $M_\pm^2$ приводит к оператору

$$\mathcal{O}_{III}^\pm = -\partial_\tau^2 - \dot{\psi}^2 \mp i\ddot{\psi} - n^2.$$

После некоторых действий с эллиптическими функциями можно показать, что это выражение записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{III}^\pm &= \bar{m}_\pm^2(-\partial_{\bar{x}}^2 + 2\bar{k}_\pm^2 \operatorname{sn}^2(\bar{x}|\bar{k}_\pm^2) - \Lambda), \\ \bar{x} &= \bar{m}_\pm \tau + \frac{1}{2}\mathbb{K}(\bar{k}_\pm^2), \quad \bar{m}_\pm = \frac{m}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{m^2}} \pm i \frac{\kappa}{m} \right), \\ \bar{k}_\pm^2 &= \pm 4 \frac{i\kappa}{m} \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{m^2}} \left(\sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{m^2}} \pm \frac{i\kappa}{m} \right)^{-2}, \quad \Lambda = \frac{n^2}{\bar{m}_\pm^2 + \bar{k}_\pm^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы снова получили флуктуационный оператор в однощелевой форме Ламе.

3. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим классическую гамильтонову систему на пространстве X , $\dim X = 2n$, с гамильтонианом $H: T^*X \rightarrow \mathbb{R}$. Его квантовый вариант представляет собой самосопряженный оператор $\hat{H}$, который в классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ сводится к H . Классическая интегрируемость требует существования n функций $F_1, \dots, F_n \in C(T^*X)$

таких, что $dF_1 \wedge \cdots \wedge dF_n \neq 0$ почти всюду, $\{F_i, F_j\} = 0$ и $H = H(F_1, \dots, F_n)$. Отсюда следует, что многообразия уровней определяют n -мерные торы (торы Лиувилля), расслаивающие T^*X и инвариантные относительно гамильтонова потока. Это позволяет определить переменные действия I_i , параметризующие базу слоения, и угловые переменные φ_i – координаты тора. Более слабое условие *квазиклассической* интегрируемости требует существования квантовых обобщений $\hat{F}_i$ функций F_i таких, что $\hat{F}_i \rightarrow F_i$ при $\hbar \rightarrow 0$, которые, кроме записанного выше условия $dF_1 \wedge \cdots \wedge dF_n \neq 0$, удовлетворяют условиям

$$[\hat{F}_i, \hat{F}_j] = O(\hbar^3), \quad \hat{H} = H(\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_n) + O(\hbar^2). \quad (13)$$

Заметим, что $\hat{H}$ корректно определен без каких-либо проблем с упорядочением в силу первого из условий (13).

Совместную квазиклассическую задачу диагонализации $\hat{F}_i \psi = f_i \psi + O(\hbar^2)$ можно решить с помощью приближения типа приближения ВКБ, которое требует выполнения условия квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова (БЗМ) [15]

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\gamma_i} p \cdot dq = N_i + \frac{\mu_i}{4} + O(\hbar), \quad i = 1, \dots, n,$$

где целые числа N_i определяют переменные действия, $\{\gamma_i\}$ – базис циклов на торе Лиувилля, а индексы Маслова μ_i учитывают критические точки циклов.

Если классический инвариантный тор имеет только $p < n$ нетривиальных циклов, то условие квантования БЗМ следует модифицировать, чтобы учесть флуктуации, поперечные инвариантному тору коразмерности p . Тогда

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\gamma_k} p \cdot dq = N_k + \frac{\mu_k}{4} + \sum_{\alpha=p+1}^n \left(n_\alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{\nu_\alpha^{(k)}}{2\pi} + O(\hbar), \quad k = 1, \dots, p$$

(здесь $n_\alpha \ll N_k$). *Устойчивые углы* $\nu_\alpha^{(k)}$ можно найти, исследуя устойчивость малых флуктуаций вокруг инвариантного тора (условие $n_\alpha \ll N_k$ необходимо для того, чтобы можно было использовать линеаризованный анализ).

В случае квазиклассического квантования конечных g -щелевых решений в теории струн начинают с классической энергии как функции переменных действия, а затем просто сдвигают их согласно условиям квантования БЗМ [7]:

$$\begin{aligned} E = E_{\text{cl}} \left(N_1 \hbar + \frac{\hbar}{2} + \hbar \sum_{\alpha=g+2}^{\infty} \left(n_\alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{\nu_\alpha^{(1)}}{2\pi}, \quad \dots, \quad N_{g+1} \hbar + \frac{\hbar}{2} + \right. \\ \left. + \hbar \sum_{\alpha=g+2}^{\infty} \left(n_\alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{\nu_\alpha^{(g+1)}}{2\pi} \right) + O(\hbar^2). \end{aligned}$$

В частности, для основного состояния ($n_\alpha = 0$) для однощелевого суперструнного зависящего от времени решения с периодом $\mathcal{T}$, который является обратным к dE/dN , можно записать (здесь $\hbar = 1/\sqrt{\lambda}$, $\mathcal{N} = N/\sqrt{\lambda}$, $\mathcal{E} = E/\sqrt{\lambda}$)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{cl}}(\mathcal{N}) + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{\nu_s > 0} \nu_s + O\left(\frac{1}{(\sqrt{\lambda})^2}\right). \quad (14)$$

Вообще говоря, в интегрируемой системе устойчивые углы можно вычислить, опираясь на задачу эволюции малых возмущений, которая подчиняется принципу нелинейной суперпозиции, связанному с преобразованиями Беклунда. Ту же конструкцию можно интерпретировать как добавление инфинитезимального обрезания к решению соответствующих интегральных уравнений с конечным обрезанием в соответствии с уравнениями Бете. Третья точка зрения заключается в том, чтобы рассмотреть алгебраическую кривую рода $g + 1$ инфинитезимально близко к ее точке вырождения в кривую рода g . В случае пульсирующей струны это замысловатое рассуждение просто сводится к хорошим спектральным свойствам уравнения Ламе.

4. ОДНОПЕТЛЕВАЯ ПОПРАВКА К ЭНЕРГИИ

Вообще говоря, одномерная спектральная задача с периодическим потенциалом,

$$[-\partial_x^2 + V(x)]f(x) = \Lambda f(x), \quad V(x + T) = V(x),$$

имеет два независимых решения $f_{\pm}(x) = e^{\pm ip(\Lambda)x} \chi_{\pm}(x)$ и $\chi_{\pm}(x + T) = \chi_{\pm}(x)$, удовлетворяющих равенству

$$f_{\pm}(x + T) = e^{\pm i\nu} f_{\pm}(x), \quad \nu = pT,$$

где ν – “устойчивый угол”, а p – “квазиимпульс” (вообще говоря, p является функцией от Λ , T и функционалом от V).

Для пульсирующей струны в $\mathbb{R} \times S^2$ период равен $T = 4\mathbb{K}/m$. Предел короткой струны представляет собой предел малых κ , в котором параметр квазиклассических осцилляций $\mathcal{N}$ является малым. Ниже мы рассмотрим положительный из двух возможных устойчивых углов, различающихся знаком [16]. Поскольку в случае пространства AdS время t и двумерное время τ связаны, как в (1), т.е. $t = \kappa\tau$, будет иметь место аналогичная пропорциональность периодов, а пространственно-временная энергия и двумерная энергия будут связаны соотношением

$$E_{\text{space-time}} = \frac{1}{\kappa} E_{2d}. \quad (15)$$

Устойчивые углы. Четыре безмассовые AdS_5 -флуктуации имеют устойчивый угол

$$\nu_{AdS_5} = 4\mathbb{K} \sqrt{k^2 + \frac{n^2}{m^2}}, \quad k \equiv \frac{\kappa}{m}.$$

Мы показали, что бозонные S^5 -флуктуации (и типа I (9), и типа II (12)) ассоциированы со стандартным уравнением Ламе, поэтому устойчивый угол имеет вид

$$\nu_{S^5} = \pm 4\mathbb{K} \left(i\mathbb{Z}(\alpha|k^2) + \frac{\pi}{2\mathbb{K}} \right) \equiv \pm 4i\mathbb{K}\mathbb{Z}(\alpha|k^2), \quad (16)$$

где

$$\text{sn}(\alpha|k^2) = \sqrt{\frac{1 + k^2 - \Lambda}{k^2}} = \frac{1}{k} \sqrt{1 - \frac{n^2}{m^2}}.$$

Мы фиксируем знак в (16) с помощью условия $\nu > 0$. Наконец, в случае оператора фермионных флуктуаций выражение для устойчивого угла принимает вид

$$\nu_F = \pm 4i\mathbb{K} \left[\frac{1}{2} \mathbb{Z}(\alpha(\beta)|k^2) + i\sqrt{\beta} \sqrt{1 + \frac{16\beta k^2}{(1-4\beta)^2}} \right],$$

где

$$\alpha(\beta) = \operatorname{cn}^{-1} \left(-\frac{1+4\beta}{1-4\beta} \middle| k^2 \right), \quad \beta = \frac{n^2}{m^2}.$$

Теперь соберем вместе выписанные выше устойчивые углы, разложенные по степеням $\kappa = km$, с должными кратностями и знаками, с которыми они должны появляться в однопетлевой поправке к энергии в (14):

$$\begin{aligned} \nu_n &= 4(\nu_{AdS_5} + \nu_{S^5}) - 8\nu_F = \\ &= \frac{4\pi\kappa^2 m}{n(m^2 - 4n^2)} - \frac{\pi\kappa^4(2m^8 - 28m^6n^2 + 133m^4n^4 - 128m^2n^6 + 48n^8)}{2mn^3(m^2 - 4n^2)^3(m^2 - n^2)} + \\ &\quad + \frac{\pi\kappa^6}{16m^3(m^2 - n^2)^2(m^2n - 4n^3)^5} \times \\ &\quad \times (8m^{16} - 180m^{14}n^2 + 1705m^{12}n^4 - 8772m^{10}n^6 + 25883m^8n^8 - \\ &\quad - 35456m^6n^{10} + 25824m^4n^{12} - 13824m^2n^{14} + 3840n^{16}) + \dots \end{aligned}$$

Для проверки заметим, что сумма этих выражений по n сходится при больших n . Полагая $m = 1$ и суммируя все вклады, получаем из (14) следующее выражение для однопетлевой поправки к струнной энергии (учитывая соотношение (15), справедливое в статической калибровке $t = \kappa\tau$):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \frac{1}{2T\kappa} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu_n = 2 + \kappa(1 - 4\ln 2) + \frac{1}{8}\kappa^3(3\zeta_3 + 1 + 4\ln 2) + \\ &\quad + \frac{1}{4}\kappa^5 \left(-\frac{63\zeta_3}{16} - \frac{15\zeta_5}{16} + \frac{7}{32} + \ln 2 \right) + O(\kappa^7). \end{aligned} \quad (17)$$

Вообще говоря, можно выписать разложение энергии в пределе коротких струн в виде

$$\begin{aligned} E &= E \left(\frac{N}{\sqrt{\lambda}}, \sqrt{\lambda} \right) = \sqrt{\lambda} \mathcal{E}_0(\mathcal{N}) + \mathcal{E}_1(\mathcal{N}) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \mathcal{E}_2(\mathcal{N}) + \dots, \\ \mathcal{E}_k &= \sqrt{2\mathcal{N}}(a_{0k} + a_{1k}\mathcal{N} + a_{2k}\mathcal{N}^2 + \dots) + c_{0k} + c_{1k}\mathcal{N} + \dots, \end{aligned}$$

где c_{nk} – коэффициенты при “неаналитических” членах [17]. Используя соотношения (3), (4) и (17), найдем, что для пульсирующей струны в $\mathbb{R} \times S^2$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \sqrt{2\mathcal{N}} \left(1 - \frac{1}{8}\mathcal{N} - \frac{5}{128}\mathcal{N}^2 + \dots \right), \\ E_1 \equiv \mathcal{E}_1 &= 2 + \sqrt{2\mathcal{N}} \left[1 - 4\ln 2 + \left(\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}\zeta_3 + \frac{1}{8} \right) \mathcal{N} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{25}{32}\ln 2 - \frac{135}{32}\zeta_3 - \frac{15}{16}\zeta_5 + \frac{11}{128} \right) \mathcal{N}^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Поэтому энергию можно переписать в терминах N и натяжения струны следующим образом:

$$E = \sqrt{2N\sqrt{\lambda}} \left(a_{00} + \frac{a_{10}N + a_{01}}{\sqrt{\lambda}} + \dots \right) + c_{01} + \dots,$$

где

$$a_{00} = 1, \quad a_{10} = -\frac{1}{8}, \quad a_{01} = 1 - 4 \ln 2, \quad c_{01} = 2, \dots$$

5. ОБОБЩЕНИЯ И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы продолжили начатые в работе [5] исследования точных структур для однопетлевых поправок к энергии классических струнных решений в пространстве $AdS_5 \times S^5$, выраженных в терминах эллиптических функций. Эллиптическое решение, рассмотренное в работе [5], представляет собой сложенную спиновую струну в AdS_5 , для которой было показано, что операторы квадратичных флуктуаций можно задать в стандартном одноцелевом виде Ламе. Это важное свойство, позволяющее точно вычислить однопетлевую поправку к энергии струны для любого значения параметра квазиклассического спина $\mathcal{S}$. В настоящей работе мы продолжили вычисления для пульсирующей струны в $\mathbb{R} \times S^2$. Дополнительные подробности, а также обобщение на случай пульсирующей струны в AdS_3 и сложенной спиновой струны в $\mathbb{R} \times S^2$ можно найти в работе [18].

Во всех случаях, когда кроме энергии имеется только один зарядовый/адиабатический инвариант, а именно осцилляторное число или спин (в S^5 или AdS_5), флуктуационные операторы можно расцепить и привести к операторам в одноцелевой форме Ламе.

Мы сосредоточились на разложении однопетлевых энергий в пределе малых значений квазиклассических параметров, соответствующих малому размеру струны. В этом пределе струна зондирует только небольшую область пространства $AdS_5 \times S^5$, поэтому ее энергия должна исходно иметь стандартный вид, характерный для плоского пространства, плюс поправки, возникающие вследствие кривизны. Этот предел может дать дальнейшее глубокое понимание структуры возникающих в результате сильного взаимодействия поправок к размерности “коротких” операторов дуальной калибровочной теории, для которых важными являются вклады обертывания [17], [19].

Квазиклассическое приближение основано на допущении, что $\sqrt{\lambda} \gg 1$, причем характеризующие различные решения квазиклассические параметры (см. более точные определения в работе [18]) такие, как $\mathcal{S} = S/\sqrt{\lambda}$, $\mathcal{J} = J/\sqrt{\lambda}$ или $\mathcal{N} = N/\sqrt{\lambda}$, фиксированы, так что S , J или N формально велики. Интригующая гипотеза состоит в том, что, взяв предел “коротких струн”, в котором $\mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{N} \rightarrow 0$, можно предположить, что этот предел “коммутирует” с пределом больших $\sqrt{\lambda}$. Если это так, то квазиклассический анализ может пролить свет на вид энергий квантовой струны с фиксированными значениями спинов и осцилляторного числа (S, J, N) . Это только гипотеза, однако изучение предела “коротких струн” дает некоторую качественную информацию о структуре разложения для энергий квантовой струны в пределе большого натяжения или разложения размерности операторов дуальной калибровочной теории в пределе сильной связи.

Ниже мы суммируем результаты для разложения в пределе “коротких струн” (малый спин или малое осцилляторное число) классической энергии E_0 и однопетлевой энергии E_1 для четырех базисных эллиптических решений в $AdS_5 \times S^5$, проанализированных в работе [5] и в настоящей работе: сложенные спиновые струны в $\mathbb{R} \times S^2$ и AdS_3 и пульсирующие круговые струны в $\mathbb{R} \times S^2$ и AdS_3 . Напомним наши обозначения: $E = E_0 + E_1 + \dots$, $E_0 = \sqrt{\lambda} \mathcal{E}_0$, $E_1 = \mathcal{E}_1$. Кроме того, ненулевой спин сложенной струны в S^2 равен $J_2 \equiv J$.

Сложенная спиновая струна в $\mathbb{R} \times S^2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 &= \sqrt{2\mathcal{J}} \left(1 + \frac{1}{8}\mathcal{J} + \frac{3}{128}\mathcal{J}^2 + \dots \right), \\ E_1 &= 2 + \sqrt{2\mathcal{J}} \left[2 - 4\ln 2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}\zeta_3 \right) \mathcal{J} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{64} - \frac{15}{32}\ln 2 + \frac{51}{32}\zeta_3 - \frac{15}{16}\zeta_5 \right) \mathcal{J}^2 + \dots \right], \\ E &= \sqrt{2J\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{J/8 + 2 - 4\ln 2}{\sqrt{\lambda}} + \dots \right) + 2 + \dots.\end{aligned}$$

Сложенная спиновая струна в AdS_3 :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 &= \sqrt{2\mathcal{S}} \left(1 + \frac{3}{8}\mathcal{S} - \frac{21}{128}\mathcal{S}^2 + \dots \right), \\ E_1 &= 1 + \sqrt{2\mathcal{S}} \left[\frac{3}{2} - 4\ln 2 + \left(-\frac{23}{16} + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}\zeta_3 \right) \mathcal{S} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{689}{256} - \frac{63}{32}\ln 2 - \frac{15}{32}\zeta_3 - \frac{15}{16}\zeta_5 \right) \mathcal{S}^2 + \dots \right], \\ E &= \sqrt{2S\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{3S/8 + 3/2 - 4\ln 2}{\sqrt{\lambda}} + \dots \right) + 1 + \dots.\end{aligned}$$

Пульсирующая струна в $\mathbb{R} \times S^2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 &= \sqrt{2\mathcal{N}} \left(1 - \frac{1}{8}\mathcal{N} - \frac{5}{128}\mathcal{N}^2 + \dots \right), \\ E_1 &= 2 + \sqrt{2\mathcal{N}} \left[1 - 4\ln 2 + \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}\zeta_3 \right) \mathcal{N} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{11}{128} + \frac{25}{32}\ln 2 - \frac{135}{32}\zeta_3 - \frac{15}{16}\zeta_5 \right) \mathcal{N}^2 + \dots \right], \\ E &= \sqrt{2N\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{-N/8 + 1 - 4\ln 2}{\sqrt{\lambda}} + \dots \right) + 2 + \dots.\end{aligned}$$

Пульсирующая струна в AdS_3 :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 &= \sqrt{2\mathcal{N}} \left(1 + \frac{5}{8}\mathcal{N} - \frac{77}{128}\mathcal{N}^2 + \dots \right), \\ E_1 &= 1 + \sqrt{2\mathcal{N}} \left[\frac{5}{2} - 4\ln 2 + \left(-\frac{37}{8} + \frac{5}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}\zeta_3 \right) \mathcal{N} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3915}{256} - \frac{231}{32}\ln 2 - \frac{117}{32}\zeta_3 - \frac{15}{16}\zeta_5 \right) \mathcal{N}^2 + \dots \right], \\ E &= \sqrt{2N\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{5N/8 + 5/2 - 4\ln 2}{\sqrt{\lambda}} + \dots \right) + 1 + \dots.\end{aligned}$$

Мы заметили замечательную универсальность разложения энергии по малому заряду для всех четырех эллиптических решений: оказывается, что главные члены с трансцендентными коэффициентами $(\ln 2, \zeta_3, \zeta_5, \dots)$ принимают один и тот же вид.

Струны с самыми низкими нетривиальными значениями зарядов должны соответствовать струнным состояниям на первом возбужденном уровне. Поскольку они должны быть дуальны членам мультиплета Кониши, у них должна быть та же аномальная размерность [17]. Остается прояснить связь между этой интригующей универсальностью, $PSU(2, 2|4)$ -структурой мультиплета Кониши и справедливостью приведенных выше предположений.

Благодарности. Авторы выражают благодарность А. А. Цейтлину и Г. Данну за сотрудничество, а также В. Форини, Н. Громову, М. Круженски, Р. Ройбану и Б. Вичедо за многочисленные полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] D. Serban, *J. Phys. A*, **44**:12 (2011), 124001, 83 pp., arXiv:1003.4214.
- [2] N. Gromov, *JHEP*, **01** (2010), 112, 31 pp., arXiv:0910.3608.
- [3] N. Gromov, P. Vieira, *JHEP*, **04** (2008), 046, 49 pp., arXiv:0709.3487; N. Gromov, S. Schäfer-Nameki, P. Vieira, *JHEP*, **12** (2008), 013, 32 pp., arXiv:0807.4752; N. Gromov, *J. Phys. A*, **42**:25 (2009), 254004, 106 pp.
- [4] S. Frolov, A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B*, **668**:1–2 (2003), 77–110, arXiv:hep-th/0304255.
- [5] M. Beccaria, G. V. Dunne, V. Forini, M. Pawellek, A. A. Tseytlin, *J. Phys. A*, **43**:16 (2010), 165402, 43 pp., arXiv:1001.4018.
- [6] R. F. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu, *Phys. Rev. D*, **11**:12 (1975), 3424–3450.
- [7] B. Vicedo, *JHEP*, **06** (2008), 086, 47 pp., arXiv:0803.1605; *J. Phys. A*, **44**:12 (2011), 124002, 183 pp., arXiv:0810.3402.
- [8] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, *Nucl. Phys. B*, **636**:1–2 (2002), 99–114, arXiv:hep-th/0204051.
- [9] J. A. Minahan, *Nucl. Phys. B*, **648**:1–2 (2003), 203–214, arXiv:hep-th/0209047.
- [10] M. Kruczenski, A. A. Tseytlin, *JHEP*, **09** (2004), 038, 48 pp., arXiv:hep-th/0406189.
- [11] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, т. 2, Физматлит, М., 1963.
- [12] Y. Iwashita, *J. Phys. A*, **43**:34 (2010), 345403, 41 pp., arXiv:1005.4386.
- [13] S. Frolov, A. A. Tseytlin, *JHEP*, **06** (2002), 007, 30 pp., arXiv:hep-th/0204226.
- [14] N. Drukker, D. J. Gross, A. A. Tseytlin, *JHEP*, **04** (2000), 021, 57 pp., arXiv:hep-th/0001204.

- [15] A. Voros, “The WKB-Maslov method for nonseparable systems”, *Géométrie symplectique et physique mathématique*, Éditions du C.N.R.S., **237**, Centre Nat. Recherche Sci., Paris, 1975, 277–287; *Ann. Inst. H. Poincaré A*, **24**:1 (1976), 31–90.
- [16] B. Hasslacher, A. Neveu, *Rocky Mountain J. Math.*, **8**:1–2 (1978), 341–370; R. Jackiw, *Rev. Modern Phys.*, **49**:3 (1977), 681–706; S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge Univ. Press, New York, 1985; R. Rajaraman, *Solitons and Instantons. An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [17] R. Roiban, A. A. Tseytlin, *JHEP*, **11** (2009), 013, 34 pp., arXiv:0906.4294.
- [18] M. Beccaria, G. V. Dunne, G. Macorini, A. Tirziu, A. A. Tseytlin, *J. Phys. A*, **44**:1 (2011), 015404, 45 pp., arXiv:1009.2318.
- [19] A. Tirziu, A. A. Tseytlin, *Phys. Rev. D*, **78**:6 (2008), 066002, 13 pp., arXiv:0806.4758.