Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Богданов, Интерполирующие дифференциальные
редукции многомерных интегрируемых иерархий, *ТМФ*,
2011, том 167, номер 3, 354–363

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6646>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:44:33

© 2011 г.

Л. В. Богданов*

ИНТЕРПОЛИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ РЕДУКЦИИ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ИЕРАРХИЙ

Схема конструирования дифференциальных редукций, предложенная недавно для иерархии Манакова–Сантини, применена к общему многомерному случаю. Более подробно рассмотрен четырехмерный случай, связанный со вторым “небесным” уравнением и его обобщением, предложенным Дунайским. Приведена характеристика дифференциальных редукций в терминах уравнений Лакса–Сато, а также в рамках метода одевания, основанного на нелинейной задаче Римана–Гильберта.

Ключевые слова: многомерные интегрируемые иерархии, дифференциальные редукции, уравнения Плебаньского.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] мы построили класс редукций иерархии, ассоциированной с системой

$$\begin{aligned}u_{xt} &= u_{yy} + (uu_x)_x + v_x u_{xy} - u_{xx} v_y, \\v_{xt} &= v_{yy} + uv_{xx} + v_x v_{xy} - v_{xx} v_y,\end{aligned}\tag{1}$$

введенной в статье [2] (см. также работы [3], [4]). В работе [5] было показано, что простая дифференциальная редукция $\alpha u = v_x$, где $\alpha = \text{const}$, системы Манакова–Сантини (1) соответствует интерполирующей системе, которая была введена в работе [5] как “наиболее общая симметричная редукция второго уравнения heavenly по конформному вектору Киллинга с нулевой автодуальной производной”. Термин “интерполирующая” связан с тем фактом, что система (1) с указанной редукцией осуществляет “интерполяцию” между бездисперсионным уравнением КП, возникающим при $\alpha \rightarrow 0$, и системой, рассмотренной в работе [6] (см. также [7]–[9]), которая возникает при $\alpha \rightarrow \infty$. Используя формулировку иерархии Манакова–Сантини в терминах уравнений Лакса–Сато [10], [11], в работе [1] мы ввели класс редукций, в котором редукция нулевого порядка соответствует бездисперсионной иерархии КП, а редукция первого порядка дает иерархию, связанную с интерполирующей системой. Мы

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: leonid@landau.ac.ru

привели производящее уравнение и форму Лакса–Сато редуцированной иерархии для интерполирующей системы, а также для редукции произвольного порядка. Редукция любого порядка k содержит параметр α и является в каком-то смысле интерполирующей, давая бездисперсионную иерархию КП при $\alpha \rightarrow 0$ и редукцию Гельфанда–Дикого порядка k для иерархии Манакова–Сантини при $\alpha \rightarrow \infty$. Важно заметить, что редукция Гельфанда–Дикого для иерархии Манакова–Сантини не влечет стационарность по высшему времени. Была также дана характеристика редукций в терминах данных одевания.

В настоящей статье мы переносим конструкцию, развитую в работе [1], на случай общей $(N+2)$ -мерной иерархии [10], [11]. Иерархия Манакова–Сантини соответствует $N = 1$, это случай не общего положения, а в общем случае присутствуют некоторые новые черты. Мы уделяем особое внимание случаю $N = 2$, который содержит второе “небесное” уравнение Плебаньского [12] и его обобщение, предложенное Дунайским [13].

Интересно отметить глубокое структурное сходство нашей конструкции с картиной дифференциальных редукций в стандартном (дисперсионном) интегрируемом случае [14]–[17], несмотря на то что технические средства существенно отличаются.

2. ИЕРАРХИЯ

Иерархия Манакова–Сантини представляет собой частный случай, соответствующий $N = 1$, общей $(N+2)$ -мерной иерархии, определяемой производящим соотношением

$$(J_0^{-1} d\Psi^0 \wedge d\Psi^1 \wedge \dots \wedge d\Psi^N)_- = 0, \quad (2)$$

где $\Psi^0, \dots, \Psi^N$ – ряды вида

$$\Psi^0 = \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^0(\mathbf{t}^1, \dots, \mathbf{t}^N) \lambda^{-n}, \quad (3)$$

$$\Psi^k = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^k (\Psi^0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^k(\mathbf{t}^1, \dots, \mathbf{t}^N) (\Psi^0)^{-n}, \quad (4)$$

$1 \leq k \leq N$, $\mathbf{t}^k = (t_0^k, \dots, t_n^k, \dots)$ и $(\cdot)_-$ – проекция на отрицательные степени λ . В соотношении (2) J_0 – детерминант матрицы Якоби J ,

$$J_0 = \det J, \quad J_{ij} = \partial_i \Psi^j, \quad 0 \leq i, j \leq N, \quad (5)$$

где $\partial_0 = \partial/\partial\lambda$, $\partial_k = \partial/\partial x^k$, $x^k = t_0^k$, $1 \leq k \leq N$.

Производящее соотношение (2) эквивалентно набору уравнений Лакса–Сато

$$\partial_n^k \Psi = \sum_{i=0}^N ((J^{-1})_{ki} (\Psi^0)^n)_+ \partial_i \Psi, \quad 0 \leq n \leq \infty, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (6)$$

где $\Psi = (\Psi^0, \dots, \Psi^N)$, $(\cdot)_+$ – проекция на неотрицательные степени λ . Первые потоки иерархии имеют вид

$$\partial_1^k \Psi = \left(\lambda \partial_k - \sum_{p=1}^N (\partial_k u_p) \partial_p - (\partial_k u_0) \partial_\lambda \right) \Psi, \quad 0 < k \leq N, \quad (7)$$

где $u_0 = \Psi_1^0$, $u_k = \Psi_1^k$, $1 \leq k \leq N$. Условие совместности любой пары линейных уравнений (например, с ∂_1^k и ∂_1^q , $k \neq q$) приводит к замкнутой нелинейной $(N+2)$ -мерной системе уравнений в частных производных для функций u_k , u_0 , которая может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \partial_1^k \partial_q \hat{u} - \partial_1^q \partial_k \hat{u} + [\partial_k \hat{u}, \partial_q \hat{u}] &= (\partial_k u_0) \partial_q - (\partial_q u_0) \partial_k, \\ \partial_1^k \partial_q u_0 - \partial_1^q \partial_k u_0 + (\partial_k \hat{u}) \partial_q u_0 - (\partial_q \hat{u}) \partial_k u_0 &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\hat{u}$ – векторное поле, $\hat{u} = \sum_{p=1}^N u_k \partial_k$.

3. ИНТЕРПОЛИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ РЕДУКЦИИ

Из уравнений Лакса–Сато иерархии (6)

$$\partial_n^k \Psi = \hat{V}_n^k \Psi, \quad \hat{V}_n^k = \sum_{i=0}^N V_{ni}^k \partial_i, \quad V_{ni}^k = ((J_0^{-1})_{ki} (\Psi^0)^n)_+, \quad (9)$$

следуют линейные уравнения для якобиана (5):

$$\partial_n^k J_0 = \sum_{i=0}^N \partial_i (V_{ni}^k J_0). \quad (10)$$

Эти уравнения можно рассматривать как формально сопряженные к линейным уравнениям (9), где сопряженный оператор для $u_i \partial_i$ определяется как $-\partial_i u_i$. Интересно заметить, что сопряженные уравнения совпадают с уравнениями (9) только для бездивергентных векторных полей.

Уравнения (10) могут быть записаны также в виде неоднородных линейных уравнений относительно логарифма якобиана:

$$\partial_n^k \ln J_0 = \hat{V}_n^k \ln J_0 + \operatorname{div} \hat{V}_n^k, \quad \operatorname{div} \hat{V}_n^k = \sum_{i=0}^N \partial_i V_{ni}^k. \quad (11)$$

Коэффициенты этих уравнений являются полиномами по λ , функция $\ln J_0 - \alpha(\Psi^0)^k$ есть решение уравнений, следовательно, условие

$$(\ln J_0 - \alpha(\Psi^0)^k)_- = 0 \quad (12)$$

определяет редукцию иерархии (это условие сохраняется в динамике). Подобно случаю иерархии Манакова–Сантини данное условие характеризуется существованием полиномиального решения уравнений (11).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Условие существования полиномиального решения вида

$$f = -\alpha \lambda^k + \sum_{i=0}^{i=k-2} f_i(\mathbf{t}) \lambda^i \quad (13)$$

(где коэффициенты f_i не содержат констант) для уравнений (11),

$$\partial_n^k f = \hat{V}_n^k f + \operatorname{div} \hat{V}_n^k,$$

равносильно условию редукции (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО совершенно аналогично доказательству подобного утверждения для иерархии Манакова–Сантини, приведенному в работе [1]. Во-первых, из условия редукции (12) непосредственно следует, что $f = \ln J_0 - \alpha(\Psi^0)^k$ является полиномиальным решением уравнений (11) требуемого вида, таким образом, существование полиномиального решения необходимо для условия редукции.

Для доказательства достаточности заметим, что $F = \ln J_0 - f$ является решением однородных уравнений (11) (уравнения (9)). Разложим λ по степеням Ψ^0 , обращая ряд (3), и представим F в виде

$$F = \alpha(\Psi^0)^k + \sum_{-\infty}^{i=k-2} F_i(\mathbf{t})(\Psi^0)^i.$$

Нетрудно проверить, что F является решением однородных уравнений (11) тогда и только тогда, когда все коэффициенты $F_i(\mathbf{t})$ постоянны. Предполагая, что коэффициенты f_i полинома f не содержат констант, мы приходим к заключению, что $\ln J_0 - \alpha(\Psi^0)^k = f$, таким образом, $(\ln J_0 - \alpha(\Psi^0)^k)_- = 0$. Предложение доказано.

Еще одна эквивалентная формулировка редукции может быть дана в терминах производящего соотношения (2). Из условия (12) следует, что $J_0 = e^{\alpha(\Psi^0)^k_-}$, и нетрудно доказать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Редуцированная иерархия, определяемая производящим соотношением (2) совместно с условием редукции (12), эквивалентна производящему соотношению*

$$(e^{-\alpha(\Psi^0)^k} d\Psi^0 \wedge d\Psi^1 \wedge \dots \wedge d\Psi^N)_- = 0. \quad (14)$$

Для вычисления редукций в терминах уравнений (8) удобно начать с неоднородных линейных уравнений (11), соответствующих первым потокам иерархии (7), которые имеют вид

$$\partial_1^n f = \left(\lambda \partial_n - \sum_{p=1}^N (\partial_n u_p) \partial_p - (\partial_n u_0) \partial_\lambda \right) f - \partial_n \sum_{p=1}^N \partial_p u_p, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (15)$$

Подставляя f вида (13) в эти уравнения, мы получаем k уравнений на $k-1$ коэффициент f_i , которые выражают f_i через u_0 , u_n и определяют дифференциальную редукцию.

3.1. Случай $k = 0$. Бездивергентные векторные поля. При $k = 0$ из условия редукции (12), с учетом того, что разложение J_0 имеет вид $J_0 = 1 + J_0^1 \lambda^{-1} + \dots$ (так что $(\ln J_0)_+ = 0$), следует, что $J_0 = 1$. Таким образом, неоднородные линейные уравнения имеют нулевое решение; подставляя его в уравнения, получаем $\operatorname{div} \hat{V}_n^k = 0$, таким образом, векторные поля в уравнениях Лакса–Сато (9) являются бездивергентными, и потоки иерархии сохраняют объем. Производящее уравнение (2) для редуцированной иерархии имеет вид

$$(d\Psi^0 \wedge d\Psi^1 \wedge \dots \wedge d\Psi^N)_- = 0.$$

С другой стороны, сохраняющая объем редукция может быть получена из редукции (12) с произвольным k в пределе $\alpha \rightarrow 0$. Таким образом, редукция (12) с произвольным k является интерполирующей между иерархией с сохранением объема и

иерархий, характеризуемой существованием полиномиального решения уравнений Лакса–Сато (6) (редукция Гельфанда–Дикого).

Для вычисления редукции в терминах уравнений (8) подставляем нулевое решение в уравнения (15) и получаем условие

$$\operatorname{div} \hat{u} := \sum_{p=1}^N \partial_p u_p = 0.$$

Таким образом, уравнения (8) редуцируются к бездивергентным векторным полям $\hat{u}$.

3.2. Случай $k = 1$. При $k = 1$ условие редукции (12) записывается как $(\ln J_0 - \alpha \Psi^0)_- = 0$, таким образом, $\ln J_0 - \alpha \Psi^0 = -(\alpha \Psi^0)_+$, и для якобиана получаем $J_0 = e^{\alpha(\Psi^0 - \lambda)}$. Производящее соотношение для редуцированной иерархии имеет вид

$$(e^{-\alpha \Psi^0} d\Psi^0 \wedge d\Psi^1 \wedge \dots \wedge d\Psi^N)_- = 0.$$

Редукция подразумевает существование решения $f = -\alpha \lambda$ неоднородных линейных уравнений (11) и справедливость соотношения $\operatorname{div} \hat{V}_n^k = \alpha V_{n0}^k$. Используя это равенство для первых потоков (15), вычисляем условие редукции для уравнений (8):

$$\operatorname{div} \hat{u} := \sum_{p=1}^N \partial_p u_p = \alpha u_0.$$

С помощью этого условия можно исключить функцию u_0 из системы (8) и получить редуцированную систему в явном виде:

$$\partial_1^k \partial_q \hat{u} - \partial_1^q \partial_k \hat{u} + [\partial_k \hat{u}, \partial_q \hat{u}] = \alpha^{-1} ((\partial_k \operatorname{div} \hat{u}) \partial_q - (\partial_q \operatorname{div} \hat{u}) \partial_k). \quad (16)$$

Предел $\alpha \rightarrow 0$ редуцированной иерархии соответствует случаю сохранения объема ($k = 0$), описанному выше, в то время как предел $\alpha \rightarrow \infty$ соответствует иерархии, характеризуемой соотношением $\Psi^0 = \lambda$ [10], [18]. Для этой иерархии векторные поля в уравнениях Лакса–Сато (6) не содержат производной по спектральной переменной, и u_0 в уравнениях (8) равно нулю,

$$\partial_1^k \partial_q \hat{u} - \partial_1^q \partial_k \hat{u} + [\partial_k \hat{u}, \partial_q \hat{u}] = 0. \quad (17)$$

Эта иерархия является “предшественником” гиперкэлеровых иерархий [19], [20], которые соответствуют гамильтоновым векторным полям как в уравнениях Лакса–Сато (6), так и в уравнениях (8). Таким образом, редукция (12) при $k = 1$ является интерполирующей между сохраняющей объем иерархией, связанной с системой (8) для бездивергентных векторных полей $\hat{u}$, и предгиперкэлеровой иерархией, связанной с системой (17).

3.3. Случай $k = 2$. При $k = 2$ условие (12) имеет вид $(\ln J_0 - \alpha(\Psi^0)^2)_- = 0$, таким образом, $\ln J_0 - \alpha(\Psi^0)^2 = -\alpha(\Psi^0)^2_+$, и для якобиана получаем $J_0 = e^{\alpha(\Psi^0)^2}$. Производящее уравнение для редуцированной иерархии записывается как

$$(e^{-\alpha(\Psi^0)^2} d\Psi^0 \wedge d\Psi^1 \wedge \dots \wedge d\Psi^N)_- = 0.$$

Редукция подразумевает существование полиномиального решения $f = -\alpha\lambda^2 + f_1$ неоднородных линейных уравнений (11). Подставляя это решение в уравнения (15), получаем

$$\partial_1^n f_1 = -(\partial_n \hat{u})f_1 - \partial_n \operatorname{div} \hat{u}, \quad \partial_n f_1 = -2\alpha(\partial_n u_0)$$

или, исключая f_1 ,

$$\partial_1^n u_0 + (\partial_n \hat{u})u_0 + \frac{1}{2\alpha} \partial_n \operatorname{div} \hat{u} = 0.$$

Эти соотношения представляют собой дифференциальную редукцию для системы (8). Нетрудно проверить, что при подстановке этих соотношений во второе уравнение системы (8) оно удовлетворяется тождественно.

Предел $\alpha \rightarrow 0$ редуцированной иерархии соответствует случаю сохранения объема ($k = 0$), в то время как предел $\alpha \rightarrow \infty$ соответствует иерархии, характеризуемой соотношением $(\Psi^0)_-^2 = 0$ или, эквивалентно, $(\Psi^0)^2 = \lambda^2 + 2u_0$ (редукция Гельфанда–Дикого).

3.4. Случай $k = 3$. При $k = 3$ условие (12) таково: $(\ln J_0 - \alpha(\Psi^0)^3)_- = 0$, и для якобиана получаем $J_0 = e^{\alpha(\Psi^0)^3_-}$. Производящее уравнение для редуцированной иерархии имеет вид

$$(e^{-\alpha(\Psi^0)^3} d\Psi^0 \wedge d\Psi^1 \wedge \dots \wedge d\Psi^N)_- = 0.$$

Редукция подразумевает существование полиномиального решения $f = -\alpha\lambda^3 + f_1\lambda + f_2$ неоднородных линейных уравнений (11). Подставляя это решение в уравнения (15), получаем

$$\partial_1^n f_2 = -(\partial_n \hat{u})f_2 + 3\alpha u_0(\partial_n u_0) - \partial_n \operatorname{div} \hat{u}, \quad \partial_n f_2 = -3\alpha(\partial_n \hat{u})u_0$$

или, исключая f_2 ,

$$\partial_1^n ((\partial_n \hat{u})u_0) = -\partial_n \left((\partial_n \hat{u})(\partial_n \hat{u})u_0 + u_0(\partial_n u_0) - \frac{1}{3\alpha} \partial_n \operatorname{div} \hat{u} \right).$$

Это соотношение представляет собой дифференциальную редукцию для системы (8).

Предел $\alpha \rightarrow 0$ редуцированной иерархии соответствует случаю сохранения объема ($k = 0$), в то время как предел $\alpha \rightarrow \infty$ соответствует иерархии, характеризуемой соотношением $(\Psi^0)_-^3 = 0$ (редукция Гельфанда–Дикого).

4. СЛУЧАЙ $N = 2$. СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ СО ВТОРЫМ “НЕБЕСНЫМ” УРАВНЕНИЕМ ПЛЕБАНЬСКОГО

Мы рассмотрим более подробно конструкцию редукций в случае $N = 2$, который содержит второе “небесное” уравнение Плебаньского и его обобщение, предложенное Дунайским [7].

4.1. Случай $k = 0$. Редукция сохранения объема отвечает обобщению [10] второго “небесного” уравнения, предложенному Дунайским. Векторные поля в уравнениях (8) суть гамильтоновы (двумерные бездивергентные) поля, и можно записать редуцированную систему (8) в терминах потенциала Θ так, что $u_1 = \Theta_y$, $u_2 = -\Theta_x$,

$x = x^1$, $y = x^2$. После введения обозначений $z = -t_1^1$, $w = t_1^2$, $\phi = u_0$ получаем систему Дунайского [7]

$$\begin{aligned}\Theta_{wx} + \Theta_{zy} + \Theta_{xx}\Theta_{yy} - \Theta_{xy}^2 &= \phi, \\ \phi_{xw} + \phi_{yz} + \Theta_{yy}\phi_{xx} + \Theta_{xx}\phi_{yy} - 2\Theta_{xy}\phi_{xy} &= 0.\end{aligned}\tag{18}$$

Иерархия, связанная с этой системой, подробно изучалась в работе [10]. Общая система (8) в этих обозначениях имеет вид

$$\begin{aligned}(\partial_{zy} + \partial_{wx})\hat{u} + [\partial_y\hat{u}, \partial_x\hat{u}] &= (\partial_y\phi)\partial_x - (\partial_x\phi)\partial_y, \\ (\partial_{zy} + \partial_{wx} + (\partial_y\hat{u})\partial_x - (\partial_x\hat{u})\partial_y)\phi &= 0,\end{aligned}\tag{19}$$

где $\hat{u} = u_1\partial_x + u_2\partial_y$.

4.2. Случай $k = 1$. Редукция с $k = 1$ характеризуется соотношением $J_0 = e^{\alpha(\Psi^0 - \lambda)}$. Производящее уравнение редуцированной иерархии имеет вид

$$(e^{-\alpha\Psi^0} d\Psi^0 \wedge d\Psi^1 \wedge d\Psi^2)_- = 0.$$

Редукция подразумевает существование у неоднородных линейных уравнений (11) решения $f = -\alpha\lambda$. Условие редукции для уравнений (19) имеет вид

$$\operatorname{div} \hat{u} := \partial_x u_1 + \partial_y u_2 = \alpha\phi.$$

Используя это соотношение, можно исключить функцию u_0 из системы (19) и получить редуцированную систему в явной форме:

$$(\partial_{zy} + \partial_{wx})\hat{u} + [\partial_y\hat{u}, \partial_x\hat{u}] = \alpha^{-1}((\partial_y \operatorname{div} \hat{u})\partial_x - (\partial_x \operatorname{div} \hat{u})\partial_y).$$

Предел редуцированной иерархии $\alpha \rightarrow 0$ соответствует иерархии системы Дунайского, в то время как предел $\alpha \rightarrow \infty$ соответствует иерархии, характеризуемой соотношением $\Psi^0 = \lambda$ [10], [18]. Для этой иерархии векторные поля в уравнениях Лакса–Сато (6) не содержат производной по спектральной переменной, и ϕ в уравнениях (19) равно нулю,

$$(\partial_{zy} + \partial_{wx})\hat{u} + [\partial_y\hat{u}, \partial_x\hat{u}] = 0.\tag{20}$$

Эта иерархия является “предшественником” иерархии второго “небесного” уравнения Плебаньского [18], [19], которое соответствует гамильтоновым векторным полям как в уравнениях Лакса–Сато (6), так и в уравнении (20), сводящемся ко второму “небесному” уравнению Плебаньского

$$\Theta_{wx} + \Theta_{zy} + \Theta_{xx}\Theta_{yy} - \Theta_{xy}^2 = 0.$$

Таким образом, редукция (12) при $k = 1$ является интерполирующей между иерархией, связанной с системой Дунайского (18), и иерархией, связанной с системой (20), которая для гамильтоновых векторных полей сводится ко второму “небесному” уравнению Плебаньского.

4.3. Случай $k = 2$. Редукция при $k = 2$ характеризуется соотношением $J_0 = e^{\alpha(\Psi^0)^2_-}$. Производящее уравнение редуцированной иерархии имеет вид

$$(e^{-\alpha(\Psi^0)^2} d\Psi^0 \wedge d\Psi^1 \wedge d\Psi^2)_- = 0.$$

Условия редукции в терминах системы (19) записываются как

$$\begin{aligned} \partial_z \phi - (\partial_x \hat{u}) \phi - \frac{1}{2\alpha} \partial_x \operatorname{div} \hat{u} &= 0, \\ \partial_w \phi + (\partial_y \hat{u}) \phi + \frac{1}{2\alpha} \partial_y \operatorname{div} \hat{u} &= 0. \end{aligned}$$

Предел $\alpha \rightarrow 0$ соответствует системе Дунайского (18), а предел $\alpha \rightarrow \infty$ – второй редукции Гельфанда–Дикого $(\Psi^0)^2_- = 0$ для системы (20).

4.4. Случай $k = 3$. Редукция при $k = 3$ характеризуется соотношением $J_0 = e^{\alpha(\Psi^0)^3_-}$. Производящее уравнение редуцированной иерархии имеет вид

$$(e^{-\alpha(\Psi^0)^3} d\Psi^0 \wedge d\Psi^1 \wedge d\Psi^2)_- = 0.$$

Условия редукции в терминах системы (19) записываются как

$$\begin{aligned} \partial_z((\partial_x \hat{u}) \phi) &= \partial_x \left((\partial_x \hat{u})(\partial_x \hat{u}) \phi + \phi(\partial_x \phi) - \frac{1}{3\alpha} \partial_x \operatorname{div} \hat{u} \right), \\ \partial_w((\partial_y \hat{u}) \phi) &= -\partial_y \left((\partial_y \hat{u})(\partial_y \hat{u}) \phi + \phi(\partial_y \phi) - \frac{1}{3\alpha} \partial_y \operatorname{div} \hat{u} \right). \end{aligned}$$

Предел $\alpha \rightarrow 0$ соответствует системе Дунайского (18), а предел $\alpha \rightarrow \infty$ – третьей редукции Гельфанда–Дикого для системы (20).

5. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ РЕДУКЦИЙ В ТЕРМИНАХ ДАННЫХ ОДЕВАНИЯ

Схема одевания иерархии (2), (6) может быть сформулирована в терминах $(N+1)$ -компонентной нелинейной задачи Римана–Гильберта на единичной окружности S в плоскости комплексной переменной λ :

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{in}}^0 &= F_0(\Psi_{\text{out}}^0, \Psi_{\text{out}}^1, \dots, \Psi_{\text{out}}^N), \\ \Psi_{\text{in}}^k &= F_k(\Psi_{\text{out}}^0, \Psi_{\text{out}}^1, \dots, \Psi_{\text{out}}^N), \quad 1 \leq k \leq N, \end{aligned} \quad (21)$$

где функции $\Psi_{\text{in}}^0(\lambda, \mathbf{t})$, $\Psi_{\text{in}}^k(\lambda, \mathbf{t})$ аналитичны внутри единичной окружности, функции $\Psi_{\text{out}}^0(\lambda, \mathbf{t})$, $\Psi_{\text{out}}^k(p, \mathbf{t})$ аналитичны вне единичной окружности и имеют разложение вида (3), (4). Предполагается, что функции F_0 , F_k определяют (по крайней мере локально) диффеоморфизм пространства $\mathbb{C}^{N+1}$, $\mathbf{F} \in \operatorname{Diff}(N+1)$, и мы называем их данными одевания. В компактной форме задачу (21) можно записать как

$$\Psi_{\text{in}} = \mathbf{F}(\Psi_{\text{out}}). \quad (22)$$

Можно непосредственно показать, что задача (21) влечет аналитичность дифференциальной формы

$$\Omega_0 = J_0^{-1} d\Psi^0 \wedge d\Psi^1 \wedge \dots \wedge d\Psi^N$$

(где независимые переменные дифференциала включают все времена $\mathbf{t}$ и λ) в комплексной плоскости и производящее соотношение (2), определяя таким образом решение иерархии. Рассматривая редукцию к группе сохраняющих объем диффеоморфизмов $\text{SDiff}(N+1)$, мы получаем редукцию общей иерархии (2) к случаю $J_0 = 1$ (бездивергентные векторные поля),

$$(d\Psi^0 \wedge d\Psi^1 \wedge \dots \wedge d\Psi^N)_- = 0.$$

При $N = 2$ мы имеем иерархию системы Дунайского.

Для построения класса редукций (12) необходимо рассмотреть нечто типа “подкрученного” условия сохранения объема. Пусть функции $G_q(y_0, \dots, y_N)$, $0 \leq q \leq N$, определяют сохраняющий объем диффеоморфизм $\mathbf{G} \in \text{SDiff}(N+1)$,

$$\left| \frac{D(G_0, \dots, G_N)}{D(y_0, \dots, y_N)} \right| = 1,$$

где для якобиана мы используем обозначение

$$\left| \frac{D(y_1, \dots, y_N)}{D(x_1, \dots, x_N)} \right| = \det \frac{D(y_1, \dots, y_N)}{D(x_1, \dots, x_N)} = \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right).$$

Зафиксируем набор аналитических функций $f_q(y_0, \dots, y_N)$ (данные редукции), определяющих диффеоморфизм, и рассмотрим задачу

$$\mathbf{f}(\Psi_{\text{in}}) = \mathbf{G}(\mathbf{f}(\Psi_{\text{out}})), \quad (23)$$

которая соответствует редукции иерархии. Условие редукции в терминах данных одевания для задачи (22) имеет вид

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{F} \circ \mathbf{f}^{-1} \in \text{SDiff}(N+1). \quad (24)$$

Это условие мы и называем “подкрученным” условием сохранения объема. В терминах уравнений иерархии редукция характеризуется соотношением

$$(df_0(\Psi) \wedge \dots \wedge df_N(\Psi))_{\text{in}} = (df_0(\Psi) \wedge \dots \wedge df_N(\Psi))_{\text{out}},$$

таким образом, функция

$$\Omega_{\text{red}} = df_0(\Psi) \wedge \dots \wedge df_N(\Psi)$$

аналитична в комплексной плоскости, и редуцированная иерархия определяется производящим соотношением $(df_0(\Psi) \wedge \dots \wedge df_N(\Psi))_- = 0$ или, эквивалентно,

$$\left(\left| \frac{D(f_0, \dots, f_N)}{D(\Psi^0, \dots, \Psi^N)} \right| d\Psi^0 \wedge d\Psi^1 \wedge \dots \wedge d\Psi^N \right)_- = 0.$$

Диффеоморфизм $\mathbf{f}$ для редуцированной иерархии определен по модулю сохраняющего объем диффеоморфизма. Чтобы получить редуцированную иерархию (14), можно использовать симметричный выбор

$$f_0(\Psi) = \Psi^0, \quad f_n(\Psi) = e^{-\alpha N^{-1}(\Psi^0)^k} \Psi^n, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (25)$$

Таким образом, мы приходим к следующему заключению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. В терминах данных одевания для задачи (22) класс редукций (12) характеризуется условием (24), где $\mathbf{f}$ определяется формулой (25).

Благодарности. Автор благодарен С. В. Манакову за полезные обсуждения. Исследование было частично поддержано РФФИ (гранты № 09-01-92439-КЭ_а, 10-01-00787_а) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4887.2008.2). Участие автора в конференции “Нелинейная физика: теория и эксперимент. VI”, где был представлен доклад, из которого возникла эта статья, стало возможным благодаря РФФИ (грант № 10-01-08122-з) и гостеприимству организаторов.

Список литературы

- [1] L. V. Bogdanov, *J. Phys. A*, **43**:11 (2010), 115206, 11 pp., arXiv:0910.4004.
- [2] S. V. Manakov, P. M. Santini, *Письма в ЖЭТФ*, **83**:10 (2006), 534–538, arXiv: nlin/0604023.
- [3] С. В. Манаков, П. М. Сантини, *ТМФ*, **152**:1 (2007), 147–156.
- [4] S. V. Manakov, P. M. Santini, *J. Phys. A*, **41**:5 (2008), 055204, 23 pp., arXiv:0707.1802.
- [5] M. Dunajski, *J. Phys. A*, **41**:31 (2008), 315202, 9 pp., arXiv:0804.1234.
- [6] M. V. Pavlov, *J. Math. Phys.*, **44**:9 (2003), 4134–4156, arXiv:nlin/0301010.
- [7] M. Dunajski, *J. Geom. Phys.*, **51**:1 (2004), 126–137, arXiv:nlin/0311024.
- [8] L. Martinez Alonso, A. B. Shabat, *Phys. Lett. A*, **300**:1 (2002), 58–64.
- [9] Л. Мартинес Алонсо, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **140**:2 (2004), 216–229, arXiv:nlin/0312043.
- [10] L. V. Bogdanov, V. S. Dryuma, S. V. Manakov, *J. Phys. A*, **40**:48 (2007), 14383–14393, arXiv:0707.1675.
- [11] Л. В. Богданов, *ТМФ*, **160**:1 (2009), 15–22, arXiv:0810.2397.
- [12] J. F. Plebański, *J. Math. Phys.*, **16**:12 (1975), 2395–2402.
- [13] M. Dunajski, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **458**:2021 (2002), 1205–1222, arXiv: math/0102225.
- [14] M. Jimbo, T. Miwa, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **19**:3 (1983), 943–1001.
- [15] V. E. Zakharov, *Duke Math. J.*, **94**:1 (1998), 103–139.
- [16] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, *Докл. РАН*, **360**:3 (1998), 324–327.
- [17] L. V. Bogdanov, E. V. Ferapontov, *J. Geom. Phys.*, **52**:3 (2004), 328–352.
- [18] L. V. Bogdanov, B. G. Konopelchenko, *Phys. Lett. A*, **345**:1–3 (2005), 137–143, arXiv: nlin/0504062.
- [19] K. Takasaki, *J. Math. Phys.*, **30**:7 (1989), 1515–1521.
- [20] K. Takasaki, *J. Math. Phys.*, **31**:8 (1990), 1877–1888.