Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Калоджеро, Новая модель золотой рыбки, *ТМФ*,
2011, том 167, номер 3, 364–376

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6647>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 10:03:30

© 2011 г.

Ф. Калоджеро*

НОВАЯ МОДЕЛЬ ЗОЛОТОЙ РЫБКИ

Определена новая интегрируемая (в действительности решаемая) модель типа модели золотой рыбки и рассмотрены некоторые ее свойства. Соответствующие ей уравнения движения Ньютона имеют вид

$$\ddot{z}_n = \frac{\beta \dot{z}_n (\dot{z}_n + \eta)}{1 + \beta z_n} + \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{(\dot{z}_n - \beta \eta z_n)(\dot{z}_m - \beta \eta z_m)[2 + \beta(z_n + z_m)]}{(z_n - z_m)(1 + \beta z_m)},$$

где $z_n \equiv z_n(t)$ – N зависимых переменных, t – независимая переменная (“время”), точками обозначено дифференцирование по времени, а β , η – две произвольные постоянные.

Ключевые слова: интегрируемые динамические системы, решаемые динамические системы, интегрируемые ньютоновские задачи многих тел.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основная динамическая система золотой рыбки [1], интерпретируемая также как простейший пример интегрируемой динамической системы, принадлежащей к классу Руджинарса–Шнайдера [2], определяется уравнениями движения Ньютона

$$\ddot{z}_n = i\omega \dot{z}_n + \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{2\dot{z}_n \dot{z}_m}{z_n - z_m}. \quad (1)$$

Обозначения. Здесь и далее N – произвольное целое число ($N \geq 2$), ω – произвольная постоянная (случай вещественной ω представляет особый интерес, см. ниже), индексы n , m , k пробегает значения от 1 до N , если не указано другое, t – независимая (вещественная) переменная (“время”), N координат z_n – зависимые переменные, $z_n \equiv z_n(t)$, а точки над величинами обозначают дифференцирование по времени. Удобно считать, что зависимые переменные z_n являются комплексными числами, задающими положения N точек, движущихся в комплексной z -плоскости. Вводя вещественную и мнимую части $z_n = x_n + iy_n$, можно также определить вещественные 2-векторы $\vec{r}_n \equiv (x_n, y_n)$ с декартовыми координатами x_n , y_n и таким

*Physics Department, University of Rome “La Sapienza”; Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma, Roma, Italy.
E-mail: francesco.calogero@roma1.infn.it, francesco.calogero@uniroma1.it

образом считать, что движение происходит в *вещественной* xu -плоскости; тогда уравнения движения (1) можно записать в ковариантном (т.е. инвариантном относительно вращений) виде. Такой прием можно также использовать для более “реалистичной” интерпретации (подходящих вариантов) всех моделей типа модели золотой рыбки, включая модели (их подходящие варианты), которые будут упомянуты и будут рассматриваться ниже в качестве моделей, характеризующих задачи многих тел в “физической” плоскости (см., например, главу 4 в монографии [3]). Ниже мы не будем касаться этой интерпретации, ограничив рассмотрение *комплексными* вариантами рассматриваемых моделей, но будем, тем не менее, время от времени говорить о них как о “задачах многих тел” с N -точечными частицами с единичной массой, движение которых в плоскости определяется уравнениями Ньютона с зависящими от скорости унарными и бинарными силами.

Замечательным свойством задачи многих тел (1) является ее *решаемость*, определяемая следующим четким предписанием: N значений N зависимых переменных $z_n(t)$ в момент времени t представляют собой N корней алгебраического уравнения для неизвестного $z \equiv z(t)$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{\dot{z}_n(0)}{z - z_n(0)} = \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega}, \quad (2)$$

где $\dot{z}_n(0)$ и $z_n(0)$ – соответственно *начальные* скорости и положения N точечных движущихся частиц [1], [3], [4]. Заметим, что после умножения на многочлен N -й степени $\prod_{m=1}^N [z - z_m(0)]$ это уравнение становится (зависящим от времени) полиномиальным уравнением N -й степени для неизвестной z , таким образом демонстрируя, что оно действительно дает N значений $z_n \equiv z_n(t)$, являющихся его решениями. Отметим также, что если ω является вещественным и ненулевым (скажем, *положительным*, $\omega > 0$), то зависящий от времени многочлен, нули которого задают зависимые переменные $z_n(t)$, является *периодическим* по t с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (3)$$

а потому соответствующая модель золотой рыбки является *изохронной*: ее решения являются периодическими с периодом T (не зависящим от начальных данных, см. (3)) или с (как правило, малым) *целым кратным* T (это связано с тем, что нули зависящего от времени многочлена меняются ролями в ходе движения; для обсуждения этой феноменологии, включая обоснование условия о “как правило, малом”, см. [5]). Такая феноменология характеризует все решения модели золотой рыбки (1), кроме случая *специального* (не в общем положении) подмножества сингулярных решений, соответствующих начальным данным, принадлежащим области фазового пространства (комплексной) *единичной* коразмерности, которое приводит к столкновениям движущихся точек. Формула (2) для решения применима также в случае, когда ω обращается в нуль, $\omega = 0$, если взять очевидный предел в правой части: при этом решение ведет себя замечательным образом (см. раздел 4.2.4 книги [3], который называется “Простейшая модель: явное решение (игра “один лишний” со стульями), гамильтонова структура”).

Прототип другого, более общего семейства моделей золотой рыбки (также *решаемых*, см. [3]) имеет вид

$$\ddot{\zeta}_n = \sum_{m=1, m \neq n}^N 2\alpha \dot{\zeta}_n \dot{\zeta}_m \operatorname{cth}[\alpha(\zeta_n - \zeta_m)], \quad (4)$$

где α – произвольная постоянная (при $\alpha = 0$ эта модель сводится к (1) при $\omega = 0$).

С течением времени были предложены еще несколько моделей N тел типа модели золотой рыбки, характерные признаки которых состоят в наличии в правой части характеризующих их уравнений Ньютона, помимо других вкладов, члена, тождественного тому, который имеется в правой части (1) или (4). Все эти модели обладают одним общим замечательным свойством – они *решаемые*, а именно они допускают решение соответствующей задачи с начальными значениями с помощью алгебраических операций, как правило, путем нахождения N собственных значений явно заданной зависящей от времени $(N \times N)$ -матрицы, или, эквивалентным образом, как в описанном выше случае (см. (2)), путем нахождения N корней зависящего от времени многочлена степени N (см. [3] и особенно раздел 4.2.2 книги [4], который называется “Ловля золотых рыбок”). Недавно в работе [6] были предложены два дополнения к этому списку задач многих тел типа модели золотой рыбки. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы представить еще одну *решаемую* задачу многих тел типа модели золотой рыбки; замечательно, что эта новая модель выделяется с помощью взятия предела *непрерывного времени* в недавно открытой [7] модели типа модели золотой рыбки с *дискретным временем*. Вполне возможно, что со временем будут найдены новые примеры: мы считаем такие исследования целесообразными, а любые такие полученные результаты – замечательными.

Модель и ее решение описываются в разделе 2, а соответствующие доказательства представлены в разделе 3 (некоторые вычисления заключены в приложении).

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Новая модель определяется уравнениями движения Ньютона

$$\ddot{z}_n = \frac{\beta \dot{z}_n(\dot{z}_n + \eta)}{1 + \beta z_n} + \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{(\dot{z}_n - \beta \eta z_n)(\dot{z}_m - \beta \eta z_m)[2 + \beta(z_n + z_m)]}{(z_n - z_m)(1 + \beta z_m)}, \quad (5)$$

содержащими произвольные постоянные β, η . Первую, β , из этих двух постоянных можно удалить с помощью масштабного преобразования, т. е. заменить на единицу, одновременно заменяя зависимые переменные z_n на βz_n ; мы предпочитаем не делать этого с целью подчеркнуть тот факт, что когда этот параметр полагается равным нулю, $\beta = 0$, новая модель (5) сводится к стандартной модели золотой рыбки (1) с $\omega = 0$. Заметим также, что эквивалентный вариант новой модели (5) получается посредством следующей замены зависимых переменных (и удобного переименования постоянной β):

$$1 + \beta z_n = e^{2\alpha \zeta_n}, \quad \beta = 2\alpha, \quad (6)$$

что приводит к следующему варианту уравнений движения Ньютона:

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}_n &= \eta \dot{\zeta}_n e^{-2\alpha \zeta_n} + \sum_{m=1, m \neq n}^N 2\alpha \operatorname{ctg}[\alpha(\zeta_n - \zeta_m)] \times \\ &\times [\dot{\zeta}_n - \eta(1 - e^{-2\alpha \zeta_n})][\dot{\zeta}_m - \eta(1 - e^{-2\alpha \zeta_m})], \end{aligned} \quad (7)$$

куда теперь входят две произвольные постоянные α, η . При $\alpha = 0$ ньютоновские обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) (7) снова сводятся к модели золотой рыбки (1) (при $\eta = i\omega$), тогда как при $\alpha \neq 0$ и $\eta = 0$ они сводятся к

модели золотой рыбки (4). Однако эта модель типа модели золотой рыбки является, насколько известно автору, *новой*, если обе постоянные, входящие в любую из версий (5) или (7) уравнений движения Ньютона, *ненулевые*.

Подчеркнем, что мы не считаем различными уравнения движения, которые получаются из записанных выше уравнений посредством тривиальных замен, таких как масштабные преобразования с постоянным множителем, трансляция зависимых переменных или постоянное изменение масштаба по времени.

Продemonстрируем решение задачи с начальными значениями для новой модели золотой рыбки, обратившись для удобства к варианту (5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Решениями $z_n(t)$ новой модели золотой рыбки (5) являются N собственных значений $(N \times N)$ -матрицы

$$U(t) = \text{diag}[z_n(0)]e^{\beta\eta t} \left[1 + \frac{e^{\beta\lambda t} - 1}{\lambda} B \right] + \frac{e^{\beta(\eta+\lambda)t} - 1}{\beta(\eta + \lambda)} B, \quad (8a)$$

где диадическая $(N \times N)$ -матрица B определяется в терминах начальных данных покомпонентно следующим образом:

$$B_{nm} = b_n b_m, \quad (8б)$$

где

$$b_n = \left[\frac{\dot{z}_n(0) - \beta\eta z_n(0)}{1 + \beta z_n(0)} \right]^{1/2}, \quad (8в)$$

а

$$\lambda = \sum_{n=1}^N (b_n b_n) = \sum_{n=1}^N \frac{\dot{z}_n(0) - \beta\eta z_n(0)}{1 + \beta z_n(0)} \quad (8г)$$

– единственное ненулевое собственное значение этой матрицы B .

Теперь обсудим поведение решений для этого варианта (5) новой модели золотой рыбки, везде полагая, что обе постоянные β , η являются *ненулевыми*. Такое поведение, по существу, определяется двумя параметрами $\beta\eta$ и $\beta\lambda$ (сумма которых также для простоты считается *ненулевой*, $\eta + \lambda \neq 0$, что действительно имеет место для случая начальных данных *общего положения*). Подчеркнем, что параметр η не зависит от начальных данных, в то время как λ зависит от них (см. (8г)).

Наиболее интересен случай, когда параметр $\beta\eta$ является *мнимым*:

$$\beta\eta = \frac{2\pi i}{\tau}, \quad \text{Re } \tau \neq 0, \quad \text{Im } \tau = 0. \quad (9a)$$

В этом случае рассмотрим такую *открытую* область фазового пространства, что для всех начальных данных в ней *вещественная* часть величины $\beta\lambda$ (см. (8г)) *отрицательна*:

$$\text{Re}(\beta\lambda) \equiv -\gamma, \quad \gamma > 0. \quad (9б)$$

Отсюда следует, что соответствующая матрица $U(t)$ является *асимптотически изолированной*, а именно в отдаленном будущем

$$U(t) = U_{\text{asy}}(t) + O[e^{-\gamma t}], \quad (9в)$$

$$U_{\text{asy}}(t) = \text{diag}[z_n(0)]e^{2\pi i t/\tau} \left(1 - \frac{B}{\lambda} \right) - \frac{B}{\beta(\eta + \lambda)}, \quad (9г)$$

где матрица $U_{\text{asy}}(t)$, очевидно, *изохронна*, т. е. периодична с периодом τ , не зависящим от начальных данных:

$$U_{\text{asy}}(t \pm \tau) = U_{\text{asy}}(t). \quad (9\text{д})$$

Следовательно, *неупорядоченный набор* N собственных значений $z_n(t)$ матрицы $U(t)$ также является *асимптотически периодическим* с тем же периодом (т. е. периодическим с точностью до экспоненциально обращающихся в нуль поправок, $O[e^{-\gamma t}]$), поэтому каждая координата $z_n(t)$ также является *асимптотически периодической*, хотя и с периодом, который может быть целым кратным (обычно малым) τ , поскольку возможно, что собственные значения матрицы $U(t)$ обмениваются ролями в процессе движения (обсуждение этой феноменологии см. в работе [5]). С другой стороны, имеется также такая область фазового пространства (*единичной* коразмерности в контексте *вещественного* фазового пространства размерности $4N$), что в случае, когда начальные данные лежат в ней, параметр $\beta\lambda$ является *мнимым*:

$$\beta\lambda = \frac{2\pi i}{\theta}, \quad \operatorname{Re} \theta \neq 0, \quad \operatorname{Im} \theta = 0. \quad (10)$$

Тогда все решения, возникающие из этой области, являются *кратно-периодическими*, поскольку представляют собой нелинейную суперпозицию функций, периодических с двумя периодами τ и θ ; и если эти два периода оказываются *конгруэнтными*, то движения являются, конечно, *периодическими*.

Аналогичные рассуждения позволяют найти из соотношений (8) асимптотическое поведение решений $z_n(t)$, когда параметр $\beta\eta$ не является чисто *мнимым* и/или начальные данные лежат в областях фазового пространства, а это означает, что параметр $\beta\lambda$ принимает значения, отличные от тех, которые мы рассмотрели выше (см. (9б) и (10)). Этот анализ можно оставить заинтересованному читателю.

Завершая данный раздел, отметим следующие результаты, касающиеся равновесия в новой модели золотой рыбки (5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2а. Система (5) имеет равновесную конфигурацию

$$\bar{z}_n = \frac{x_n - 1}{2\beta}, \quad (11\text{а})$$

где или N чисел x_n являются N нулями многочлена Якоби $P_N^{(a,b)}(x)$ (см., например, [8]) с параметрами $a = 1 - N$, $b = -2$,

$$P_N^{(1-N,-2)}(x_n) = 0, \quad (11\text{б})$$

или одно из значений $\bar{z}_n$ обращается в нуль, скажем, $\bar{z}_N = 0$, а остальные $N - 1$ значений $\bar{z}_n$ задаются предыдущим предписанием (11б) с заменой N на $N - 1$.

Заметим, однако, что для многочленов Якоби эти параметры a , b довольно специальные. Эти параметры не только лежат за пределами области, для которой эти многочлены ортогональны, но и они таковы, что эти многочлены являются исключительными: в отличие от того, что, как правило, происходит в случае классических многочленов, все решения стандартного ОДУ второго порядка, характеризующие их (см., например, [8]), являются многочленами по x . Поэтому многочлены Якоби не

определяются единственным образом (с точностью до нормировочной постоянной) этим ОДУ (что представляет собой существенный элемент для отождествления их в нашем контексте, см. ниже). Они зависят от второй произвольной постоянной интегрирования. Поэтому более точно, и также более явно, определение равновесной конфигурации новой системы золотой рыбки (5) дается следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 26. Система (5) имеет равновесную конфигурацию

$$\bar{z}_n = \frac{y_n}{\beta}, \quad (12a)$$

где или N чисел y_n являются N нулями полиномиального уравнения (степени N) по переменной y :

$$y^N + \frac{N}{N-1}y^{N-1} = C, \quad (12б)$$

или одно из них обращается в нуль, а другие $N-1$ являются $N-1$ нулями того же полиномиального уравнения, в котором N заменено на $N-1$,

$$y^{N-1} + \frac{N-1}{N-2}y^{N-2} = C. \quad (12в)$$

В формулах (12а), (12б) C является произвольной постоянной, за исключением того условия, что следует избегать обращения одного из корней этих уравнений в нуль, а потому $C \neq 0$, и, более того, следует также избегать совпадения любых двух нулей, откуда в случае (12б) $C \neq (-1)^{N-1}/(N-1)$, а в случае (12в) $C \neq (-1)^N/(N-2)$.

Доказательство этой находки отнесено в приложение.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Исходной точкой доказательства предложения 1 является следующее линейное эволюционное уравнение первого порядка для $(N \times N)$ -матрицы $U \equiv U(t)$:

$$\dot{U} = \beta U(\eta I + B) + B, \quad (13a)$$

где B – постоянная $(N \times N)$ -матрица, β, η – две произвольные скалярные постоянные, а I здесь и ниже – единичная $(N \times N)$ -матрица (которую также можно опустить). Ясно, что решение соответствующей задачи с начальными значениями имеет вид

$$U(t) = U(0)e^{\beta(\eta I + B)t} + B[\beta(\eta I + B)]^{-1}\{e^{\beta(\eta I + B)t} - 1\}. \quad (13б)$$

Теперь диагонализуем матрицу $U(t)$, используя при этом обозначения $z_n(t)$ для ее N собственных значений (такое название обосновывается ниже) и $R(t)$ для диагонализующей матрицы:

$$U(t) = R(t)Z(t)[R(t)]^{-1}, \quad Z(t) \equiv \text{diag}[z_n(t)]. \quad (14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из этих формул следует, что матрица $R(t)$ определена с точностью до правого умножения на некоторую произвольную диагональную матрицу $D(t)$.

Более того, будем предполагать, что матрица U *исходно* является диагональной:

$$U(0) = Z(0) \equiv \text{diag}[z_n(0)], \quad (15a)$$

откуда

$$R(0) = I. \quad (15б)$$

Теперь введем две матрицы $M(t)$ и $V(t)$, определяемые следующим образом:

$$M(t) = [R(t)]^{-1} \dot{R}(t), \quad (16a)$$

$$B = R(t)V(t)[R(t)]^{-1}. \quad (16б)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из наличия элемента произвола в определении матрицы $R(t)$ (см. замечание 1) следует, что матрица $M(t)$ определена с точностью до “калибровочного преобразования”

$$M(t) \Rightarrow \widetilde{M}(t) = [D(t)]^{-1} M(t) D(t) + [D(t)]^{-1} \dot{D}(t),$$

получающегося путем замены матрицы $R(t)$ в определении (16a) на матрицу $R(t)D(t)$ (и $\dot{R}(t)$ на $\dot{R}(t)D(t) + R(t)\dot{D}(t)$): таким образом, в силу *произвольной* природы *диагональной* матрицы $D(t)$ из N^2 элементов $(N \times N)$ -матрицы $M(t)$ существенными являются только $N^2 - N$ недиагональных элементов, а N диагональным элементам

$$\mu_n(t) \equiv M_{nn}(t) \quad (17)$$

можно назначить *произвольные значения*.

Теперь ясно, что из определений (14) и (16a) следует формула

$$\dot{U} = R\{\dot{Z} + [M, Z]\}R^{-1}, \quad (18)$$

а потому матричное эволюционное ОДУ (13a) принимает вид

$$\dot{Z} + [M, Z] = \beta Z(\eta + V) + V. \quad (19a)$$

Аналогично из независимости матрицы B от времени следует матричное ОДУ

$$\dot{V} + [M, V] = 0. \quad (19б)$$

Здесь и ниже $[A, B]$ обозначает коммутатор двух матриц A, B :

$$[A, B] \equiv AB - BA. \quad (20)$$

Теперь рассмотрим диагональные и внедиагональные элементы двух матричных ОДУ (19) по отдельности.

Диагональная часть (19a) имеет вид¹⁾

$$\dot{z}_n = \beta z_n(\eta + v_n) + v_n, \quad (21a)$$

¹⁾Напомним, что матрица Z является диагональной (см. (14)), и обозначим через v_n диагональные элементы матрицы V , $v_n = V_{nn}$.

откуда следует, что

$$v_n = \frac{\dot{z}_n - \beta\eta z_n}{1 + \beta z_n}. \quad (216)$$

Внедиагональная часть (19a) имеет покомпонентный вид

$$M_{nm}(z_m - z_n) = (1 + \beta z_n)V_{nm}, \quad n \neq m, \quad (22a)$$

откуда

$$M_{nm} = -\frac{1 + \beta z_n}{z_n - z_m} V_{nm}, \quad n \neq m. \quad (226)$$

Диагональная часть (196) имеет вид

$$\dot{v}_n = \sum_{m=1, m \neq n}^N (V_{nm}M_{mn} - M_{nm}V_{mn}), \quad (23a)$$

и, таким образом, с учетом (226) имеем

$$\dot{v}_n = \sum_{m=1, m \neq n}^N V_{nm}V_{mn} \frac{2 + \beta(z_n + z_m)}{z_n - z_m}. \quad (236)$$

Прежде чем рассматривать внедиагональную часть (196), теперь продифференцируем (21a), а используя (216) и (236), получим следующий набор ОДУ второго порядка:

$$\ddot{z}_n = \beta\eta\dot{z}_n + \beta\dot{z}_n \frac{\dot{z}_n - \beta\eta z_n}{1 + \beta z_n} + (1 + \beta z_n) \sum_{m=1, m \neq n}^N V_{nm}V_{mn} \frac{2 + \beta(z_n + z_m)}{z_n - z_m}. \quad (24)$$

Как обычно в таком подходе, хочется интерпретировать этот набор ОДУ как уравнения движения Ньютона для координат z_n , входящих в их правые части унарных и бинарных зависящих от скорости сил, характеризующихся двумя произвольными постоянными β , η , а также $N(N-1)$ “константами взаимодействия” $V_{nm}V_{mn}$. Но кавычки здесь подчеркивают тот факт, что величины $V_{nm}V_{mn}$ не являются независимыми от времени; действительно, эволюция $V_{nm}(t)$ во времени определяется остающейся системой $N(N-1)$ ОДУ, соответствующих внедиагональной части (196), имеющей вид

$$\dot{V}_{nm} = \sum_{k=1}^N [V_{nk}M_{km} - M_{nk}V_{km}], \quad n \neq m. \quad (25a)$$

С учетом (17), (216) и (226) эти $N(N-1)$ ОДУ принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\dot{V}_{nm}}{V_{nm}} = & -\mu_n + \mu_m - \left(\frac{\dot{z}_n - \beta\eta z_n}{1 + \beta z_n} - \frac{\dot{z}_m - \beta\eta z_m}{1 + \beta z_m} \right) \frac{1 + \beta z_n}{z_n - z_m} + \\ & + \sum_{k=1, k \neq n, m}^N \frac{V_{nk}V_{km}}{V_{nm}} \left(\frac{1 + \beta z_n}{z_n - z_k} + \frac{1 + \beta z_k}{z_m - z_k} \right), \quad n \neq m. \end{aligned} \quad (256)$$

Наша следующая задача – постараться избавиться от $N(N-1)$ величин V_{nm} . Стандартный прием для этого заключается в том, чтобы выразить, если это возможно, величины V_{nm} в терминах N координат z_n и N скоростей $\dot{z}_n$, удовлетворяющих $N(N-1)$ ОДУ (256), возможно, в силу уравнений движения для координат z_n

(см. (24)), следующих из самого анзаца, и с использованием свободы выбора значений N величин $\mu_n(t)$ (см. замечание 2).

Обоснованная гипотеза в отношении этого анзаца имеет следующий вид:

$$V_{nm} = \left[\frac{\dot{z}_n - \beta\eta z_n}{1 + \beta z_n} \frac{\dot{z}_m - \beta\eta z_m}{1 + \beta z_m} \right]^{1/2}, \quad n \neq m. \quad (26)$$

Тогда N ОДУ (24) принимают вид

$$\ddot{z}_n = \beta\eta\dot{z}_n + \beta\dot{z}_n \frac{\dot{z}_n - \beta\eta z_n}{1 + \beta z_n} + (\dot{z}_n - \beta\eta z_n) \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{\dot{z}_m - \beta\eta z_m}{1 + \beta z_m} \frac{2 + \beta(z_n + z_m)}{z_n - z_m}, \quad (27)$$

что, как нетрудно видеть, совпадает с (5). С учетом того же самого выбора значений можно преобразовать выражение (136) для матрицы $U(t)$ к виду (8); для этого требуется выполнить некоторое количество стандартных вычислений из матричной алгебры, которые вынесены в приложение.

Этим фактически завершается доказательство предложения 1, надо только еще проверить, что путем использования ОДУ (27) и последующего простого приписывания значений (см. замечание 2) величинам $\mu_n(t)$,

$$\mu_n(t) = 0, \quad (28)$$

из анзаца (26) следует, что $N(N-1)$ ОДУ (256) действительно удовлетворяются. Эти вычисления, по существу, элементарны, но требуют некоторой изобретательности, они также вынесены в приложение.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Усердный читатель может захотеть проверить, что повторение приведенного выше рассмотрения, но с начальным матричным эволюционным уравнением

$$\dot{U} = aBU + bUB + cU + dB + fI, \quad (29)$$

для которого задача с начальными значениями также явно решается и которое является более общим, чем (13a) (сводясь к последнему при $a = 0$, $b = \beta$, $c = \beta\eta$, $d = 1$, $f = 0$), не должно приводить к более общей модели золотой рыбки, чем модель (5). Действительно, нетрудно видеть, что это матричное ОДУ можно свести к уравнению (13a) путем последовательности относительно тривиальных преобразований, таких как масштабные преобразования и трансляции (с постоянными скалярными параметрами) матриц U и B , а также выполнения для $U(t)$ преобразования подобия вида $e^{aBt}U(t)e^{-aBt}$, которое не меняет собственные значения матрицы U .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Мы отложили в данное приложение три задачи.

1. Первая задача – нахождение равновесной конфигурации $\bar{z}_n$ уравнений движения (5). Она, очевидно, характеризуется следующим набором N алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{\bar{z}_n \bar{z}_m [2 + \beta(\bar{z}_n + \bar{z}_m)]}{(\bar{z}_n - \bar{z}_m)(1 + \beta \bar{z}_m)} = 0. \quad (30a)$$

Понятно, что все N значений $\bar{z}_n$ должны быть различными, $\bar{z}_n \neq \bar{z}_m$, если $n \neq m$, и мы предполагаем здесь и далее, что так оно и есть. Имеются две возможности. Первая состоит в том, что N координат $\bar{z}_n$ являются решениями набора N алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{\bar{z}_m [2 + \beta(\bar{z}_n + \bar{z}_m)]}{(\bar{z}_n - \bar{z}_m)(1 + \beta\bar{z}_m)} = 0, \quad (306)$$

при этом ни одна из них не обращается в нуль, $\bar{z}_n \neq 0$. Вторая возможность состоит в том, что одна из координат $\bar{z}_n$ обращается в нуль, например $\bar{z}_N = 0$, а оставшиеся $N - 1$ являются решениями этого уравнения, в котором N заменено на $N - 1$, а индекс n пробегает значения от 1 до $N - 1$, и имеется дополнительное условие, что ни одна из этих $N - 1$ координат $\bar{z}_n$ не обращается в нуль.

Чтобы доказать предложение 2а, удобно положить $\beta\bar{z}_n = (x_n - 1)/2$ (см. (11а)), откуда вместо (306) получаем следующие N уравнений:

$$\sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{(1 - x_m)(2 + x_n + x_m)}{(x_n - x_m)(1 + x_m)} = 0, \quad (31a)$$

или, эквивалентно,

$$\sum_{m=1, m \neq n}^N \left[\frac{2(1 - x_m)}{x_n - x_m} + \frac{1 - x_m}{1 + x_m} \right] = 0, \quad (316)$$

а именно

$$2 \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{1 - x_m}{x_n - x_m} = \frac{1 - x_n}{1 + x_n} - K, \quad (31b)$$

$$K = \sum_{k=1}^N \frac{1 - x_k}{1 + x_k}. \quad (31r)$$

Суммируя последнюю формулу по n от 1 до N , получаем

$$N(N - 1) = (1 - N)K, \quad (32a)$$

откуда

$$K = -N. \quad (326)$$

С другой стороны, заменяя x_m на $x_n - (x_n - x_m)$, очевидно, получаем

$$\sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{1 - x_m}{x_n - x_m} = \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{1 - x_n}{x_n - x_m} + N - 1. \quad (33)$$

Таким образом, из (31b) и (326) получаем

$$2 \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{1 - x_n}{x_n - x_m} = \frac{1 - x_n}{1 + x_n} - N + 2, \quad (34a)$$

а именно

$$2 \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{1 - x_n^2}{x_n - x_m} = 3 - N + (1 - N)x_n. \quad (346)$$

С учетом уравнения (5.2а) из работы [9], которое имеет вид

$$2 \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{1 - x_n^2}{x_n - x_m} = a - b + (a + b + 2)x_n, \quad (34\text{в})$$

это подтверждает, что N чисел x_n являются N нулями многочлена Якоби $P_N^{(a,b)}(x)$, где $a = 1 - N$, $b = -2$. Это завершает доказательство предложения 2а. Заметим, что решающим моментом для получения этого результата является ОДУ, которому удовлетворяют многочлены Якоби (см. [9] и при необходимости приложение А работы [4]).

Для доказательства предложения 2б заметим, что ОДУ, характеризующее многочлен Якоби $P_N^{(a,b)}(x)$, имеет вид

$$(1 - x^2)p_N''(x) + [b - a - (a + b + 2)x]p_N'(x) + N(N + a + b + 1)p_N(x) = 0. \quad (35\text{а})$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование функции по ее аргументу.

При $a = 1 - N$, $b = -2$ уравнение принимает специальный вид

$$(1 - x^2)p_N''(x) + [N - 3 + (N - 1)x]p_N'(x) = 0, \quad (35\text{б})$$

или, эквивалентно, с учетом замены переменных в соответствии с (11а) и (12а) получаем

$$x = 1 + 2y, \quad p_N(x) = P_N(y), \quad (36\text{а})$$

$$y(y + 1)P_N''(y) + [N - 2 + (N - 1)y]P_N'(y) = 0. \quad (36\text{б})$$

Это ОДУ легко интегрируется. Его *общее* решение имеет вид

$$P_N(y) = C_1 + C_2 \left(y^N + \frac{N}{N-1} y^{N-1} \right), \quad (36\text{в})$$

где C_1 и C_2 – две *произвольные* постоянные интегрирования. Это приводит к уравнению (12б), и остающиеся для завершения доказательства предложения 2б выкладки совсем простые (напомним, что нуль второго порядка требует одновременного обращения в нуль и функции, и ее производной). Это завершает первую задачу.

2. Вторая задача состоит в том, чтобы показать, что выражение (13б) для матрицы $U(t)$ можно преобразовать в более простое выражение (8). Для этого на первом шаге используем (15). Формула (15а) позволяет заменить $U(0)$ на диагональную матрицу $\text{diag}[z_n(0)]$, из формулы (15б) с учетом (16б), (21б) и (26) следует, что постоянная матрица $B = V(0)$ является диадической матрицей, $B_{nm} = b_n b_m$ (см. (8б)), где b_n определяется выражением (8в).

Далее используем следующую лемму, доказательство которой достаточно стандартно, чтобы не требовалось явное представление.

ЛЕММА. Пусть $f(x)$ – аналитическая (скалярная) функция (скалярной) переменной x . Определим $(N \times N)$ -матрицу F следующим образом:

$$F = f(Bt), \quad (37\text{а})$$

где $(N \times N)$ -матрица B является диадической, $B_{nm} = b_n b_m$, поэтому ее единственное ненулевое собственное значение есть $\lambda = \sum_{n=1}^N (b_n b_n)$. Тогда

$$F = f(0)I + \frac{f(\lambda t) - f(0)}{\lambda} B. \quad (376)$$

С учетом этой леммы мы немедленно получаем две формулы:

$$e^{Bt} = I + \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} B, \quad (38a)$$

$$B[\beta(\eta + B)]^{-1} \{e^{\beta(\eta+B)t} - 1\} = \frac{e^{\beta(\eta+\lambda)t} - 1}{\beta(\eta + \lambda)} B. \quad (386)$$

Подстановка этих формул в (136) дает (8a). Этим завершается вторая задача.

3. Третья задача состоит в том, чтобы проверить, что из анзаца (26) с учетом уравнений движения (27), которые следуют из (28), вытекает, что выполнены $N(N-1)$ ОДУ (256). Действительно, с учетом (26) и (28) эта система ОДУ принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}_n - \beta \eta \dot{z}_n}{\dot{z}_n - \beta \eta z_n} - \frac{1}{2} \frac{\beta \dot{z}_n}{1 + \beta z_n} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}_m - \beta \eta \dot{z}_m}{\dot{z}_m - \beta \eta z_m} - \frac{1}{2} \frac{\beta \dot{z}_m}{1 + \beta z_m} = \\ & = - \left(\frac{\dot{z}_n - \beta \eta z_n}{1 + \beta z_n} - \frac{\dot{z}_m - \beta \eta z_m}{1 + \beta z_m} \right) \frac{1 + \beta z_n}{z_n - z_m} + \\ & + \sum_{k=1, k \neq n, m}^N \frac{\dot{z}_k - \beta \eta z_k}{1 + \beta z_k} \left(\frac{1 + \beta z_n}{z_n - z_k} + \frac{1 + \beta z_k}{z_m - z_k} \right), \quad n \neq m. \end{aligned} \quad (39a)$$

Теперь в сумме по k прибавляем и вычитаем слагаемое с $k = m$ и аналогично прибавляем и вычитаем слагаемое с $k = n$, таким образом после некоторых сокращений получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}_n - \beta \eta \dot{z}_n}{\dot{z}_n - \beta \eta z_n} - \frac{1}{2} \frac{\beta \dot{z}_n}{1 + \beta z_n} - \sum_{k=1, k \neq n}^N \left[\frac{\dot{z}_k - \beta \eta z_k}{1 + \beta z_k} \frac{1 + \beta z_n}{z_n - z_k} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}_m - \beta \eta \dot{z}_m}{\dot{z}_m - \beta \eta z_m} - \frac{1}{2} \frac{\beta \dot{z}_m}{1 + \beta z_m} - \sum_{k=1, k \neq m}^N \frac{\dot{z}_k - \beta \eta z_k}{1 + \beta z_k} \frac{1 + \beta z_k}{z_m - z_k} = 0, \quad n \neq m. \end{aligned} \quad (396)$$

Теперь нетрудно видеть, что с учетом уравнений движения (27) эти $N(N-1)$ уравнений принимают вид

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{2} \sum_{k=1, k \neq n}^N \frac{\dot{z}_k - \beta \eta z_k}{1 + \beta z_k} \frac{z_n - z_k}{z_n - z_k} + \\ & + \frac{\beta}{2} \sum_{k=1, k \neq m}^N \frac{\dot{z}_k - \beta \eta z_k}{1 + \beta z_k} \frac{z_k - z_m}{z_m - z_k} = 0, \quad n \neq m, \end{aligned} \quad (39b)$$

и потому удовлетворяются тождественно. Тем самым наша последняя задача завершена.

Список литературы

- [1] F. Calogero, *Physica D*, **152–153** (2001), 78–84.
- [2] S. N. M. Ruijsenaars, H. Schneider, *Ann. Phys.*, **170**:2 (1986), 370–405.
- [3] F. Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments*, Lecture Notes Phys. Monogr., **66**, Springer, Berlin, 2001.
- [4] F. Calogero, *Isochronous Systems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2008.
- [5] D. Gómez-Ullate, M. Sommacal, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**, Suppl. 1 (2005), 351–362.
- [6] F. Calogero, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **17**:3 (2010), 397–414.
- [7] F. Calogero, “Discrete-time goldfishing”, *SIGMA* (submitted 4 May 2011; in press).
- [8] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2: *Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1974.
- [9] S. Ahmed, M. Bruschi, F. Calogero, M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Nuovo Cimento B*, **49**:2 (1979), 173–199.