Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Дубровский, А. В. Топовский, М. Ю. Басалаев, Новые точные решения двумерных интегрируемых уравнений, полученные с помощью метода $\bar{\partial}$ -одевания, *ТМФ*, 2011, том 167, номер 3, 377–393

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6648>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:14:37

© 2011 г. В. Г. Дубровский*, А. В. Топовский*,
М. Ю. Басалаев*

НОВЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА $\bar{\partial}$ -ОДЕВАНИЯ

Дан обзор новых классов точных решений с функциональными параметрами с постоянными асимптотическими значениями на бесконечности уравнения Нижника–Веселова–Новикова и новых классов точных решений с функциональными параметрами двумерных обобщений уравнений Каупа–Купершмидта и Савада–Котера, построенных методом $\bar{\partial}$ -одевания Захарова–Манакова. Приведены подклассы многосолитонных и периодических решений для указанных уравнений. Представлены примеры линейной суперпозиции точных решений уравнения Нижника–Веселова–Новикова.

Ключевые слова: уравнение Нижника–Веселова–Новикова, двумерные обобщения уравнений Каупа–Купершмидта и Савада–Котера, решения с функциональными параметрами, двумерное стационарное уравнение Шредингера, солитоны, прозрачные потенциалы.

1. ВВЕДЕНИЕ

За последние тридцать лет метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) был обобщен и успешно применен к различным $(2+1)$ -мерным нелинейным эволюционным уравнениям таким, как уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП), Деви–Стюартсона, Нижника–Веселова–Новикова (НВН), система Захарова–Манакова, уравнение Ишимори, двумерное обобщение уравнения синус–Гордон и другим уравнениям (см. книги [1]–[4] и библиографию в них). В настоящее время нелокальная проблема Римана–Гильберта [5], $\bar{\partial}$ -проблема [6] и более общий метод $\bar{\partial}$ -одевания Захарова–Манакова [7]–[10] являются основными инструментами для построения точных решений $(2+1)$ -мерных интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений.

В настоящей статье представлен обзор недавно полученных результатов по применению метода $\bar{\partial}$ -одевания к построению классов точных решений с функциональными параметрами и их частных подклассов, многосолитонных и периодических

*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия.
E-mail: dubrovsky@ngs.ru

решений, таких известных $(2+1)$ -мерных интегрируемых уравнений, как уравнение НВН [11], [12]

$$u_t + \kappa_1 u_{\xi\xi\xi} + \kappa_2 u_{\eta\eta\eta} + 3\kappa_1(u\partial_\eta^{-1}u_\xi)_\xi + 3\kappa_2(u\partial_\xi^{-1}u_\eta)_\eta = 0, \quad (1.1)$$

где $u(\xi, \eta, t)$ – скалярная функция, κ_1, κ_2 – произвольные константы, $\xi = x + \sigma y$, $\eta = x - \sigma y$, $\sigma^2 = \pm 1$ (гиперболическая версия НВН с $\sigma^2 = 1$ и эллиптическая при $\sigma^2 = -1$), $\partial_\xi \equiv \partial/\partial\xi$, $\partial_\eta \equiv \partial/\partial\eta$ и ∂_ξ^{-1} , ∂_η^{-1} – операторы, обратные к ∂_ξ и ∂_η , $\partial_\xi^{-1}\partial_\xi = \partial_\eta^{-1}\partial_\eta = 1$, а также двумерных интегрируемых обобщений уравнений Каупа–Купершмидта (2DKK) [13]

$$u_t + u_{xxxxx} + \frac{25}{2}u_x u_{xx} + 5u u_{xxx} + 5u^2 u_x + 5u_{xxy} - 5\partial_x^{-1}u_{yy} + 5u u_y + 5u_x \partial_x^{-1}u_y = 0 \quad (1.2)$$

и Савада–Котера (2DCK) [13]

$$u_t + u_{xxxxx} + 5u_x u_{xx} + 5u u_{xxx} + 5u^2 u_x + 5u_{xxy} - 5\partial_x^{-1}u_{yy} + 5u u_y + 5u_x \partial_x^{-1}u_y = 0. \quad (1.3)$$

Представлены специальные примеры точных решений уравнения НВН (1.1) в виде линейной суперпозиции некоторых других точных решений $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$: $u = u^{(1)} + u^{(2)}$.

Следует отметить, что способ построения решений с функциональными параметрами для $(2+1)$ -мерных интегрируемых уравнений был развит в известных работах Захарова и Шабата [14], [15] на примере уравнения КП в рамках их версии метода одевания (см. также книгу [1]).

Заметим также, что изучение и получение периодических решений уравнения НВН с помощью алгебро-геометрических методов было начато Дубровиным, Кричевым и Новиковым в работе [16]. “Конечнозонные по отношению к одному уровню энергии”, двумерные операторы Шредингера и соответствующие точные решения уравнения НВН были построены в работах [12], [16], [17]. Случай убывающих на бесконечности решений был рассмотрен в работах [18]–[24]. В работе [22] получен пример вещественного несингулярного и рационально убывающего на бесконечности решения эллиптической версии уравнения НВН.

Метод $\bar{\partial}$ -одевания Захарова–Манакова позволяет конструировать интегрируемые нелинейные уравнения вместе с соответствующими линейными вспомогательными задачами, вычислять широкие классы точных решений построенных интегрируемых уравнений, получать точные потенциалы и соответствующие волновые функции линейных вспомогательных задач, т.е. этот метод применим также для вычисления переменных коэффициентов линейных дифференциальных уравнений с частными производными.

Схема применения метода $\bar{\partial}$ -одевания для построения решений с функциональными параметрами $(2+1)$ -мерных интегрируемых уравнений включает в себя следующие этапы [3], [4]. Центральным моментом для метода является использование нелокальной $\bar{\partial}$ -проблемы [7]–[9]:

$$\frac{\partial\chi(\lambda, \bar{\lambda})}{\partial\bar{\lambda}} = (\chi * R)(\lambda, \bar{\lambda}) = \iint_C \chi(\mu, \bar{\mu}) R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) d\mu \wedge d\bar{\mu}, \quad (1.4)$$

где для рассматриваемых в настоящей статье двумерных интегрируемых нелинейных уравнений используется скалярная волновая функция χ . Решение $\bar{\partial}$ -проблемы с канонической нормировкой, $\chi \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$, эквивалентно решению следующего сингулярного интегрального уравнения:

$$\chi(\lambda) = 1 + \iint_C \frac{d\lambda' \wedge d\bar{\lambda}'}{2\pi i(\lambda' - \lambda)} \iint_C \chi(\mu, \bar{\mu}) R(\mu, \bar{\mu}; \lambda', \bar{\lambda}') d\mu \wedge d\bar{\mu}. \quad (1.5)$$

Для вычисления точных решений с функциональными параметрами используются функции χ_∞ , χ_0 , χ_{-1} , представляющие собой коэффициенты разложений волновой функции χ вблизи точек $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$: $\chi = \chi_0 + \chi_1\lambda + \chi_2\lambda^2 + \dots$ и $\chi = \chi_\infty + \chi_{-1}/\lambda + \chi_{-2}/\lambda^2 + \dots$. Коэффициенты χ_{-1} и χ_{-2} вследствие формулы (1.5) можно записать как

$$\chi_{-1} = - \iint_C \frac{d\lambda \wedge d\bar{\lambda}}{2\pi i} \iint_C \chi(\mu, \bar{\mu}) R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) d\mu \wedge d\bar{\mu}, \quad (1.6)$$

$$\chi_{-2} = - \iint_C \frac{\lambda d\lambda \wedge d\bar{\lambda}}{2\pi i} \iint_C \chi(\mu, \bar{\mu}) R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) d\mu \wedge d\bar{\mu}. \quad (1.7)$$

Ядро R $\bar{\partial}$ -проблемы в случае уравнения НВН (1.1) дается выражением [4]

$$R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}; \xi, \eta, t) = R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) e^{F(\mu) - F(\lambda)}, \quad (1.8)$$

$$F(\lambda) := i \left[\lambda \xi - \frac{\epsilon}{\lambda} \eta + \kappa_1 \lambda^3 t - \kappa_2 \frac{\epsilon^3}{\lambda^3} t \right].$$

Зависимость ядра R $\bar{\partial}$ -проблемы от пространственных и временной переменных x , y , t для уравнений 2DKK (1.2) и 2DCK (1.3) имеет вид [25]

$$R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}; x, y, t) = R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) e^{F(\mu) - F(\lambda)}, \quad F(\lambda) := i(\lambda x + \lambda^3 y + 9\lambda^5 t). \quad (1.9)$$

Выбор вырожденного ядра R_0 в виде суммы произведений функциональных параметров f_n и g_n в спектральном представлении

$$R_0(\mu, \bar{\mu}, \lambda, \bar{\lambda}) = \pi \sum_{k=1}^N f_k(\mu, \bar{\mu}) g_k(\lambda, \bar{\lambda}) \quad (1.10)$$

приводит к определению функциональных параметров α_n и β_n в координатном представлении:

$$\alpha_l(\xi, \eta, t) = \iint_C f_l(\mu, \bar{\mu}) e^{F(\mu)} d\mu \wedge d\bar{\mu}, \quad \beta_l(\xi, \eta, t) = \iint_C g_l(\lambda, \bar{\lambda}) e^{-F(\lambda)} d\lambda \wedge d\bar{\lambda}. \quad (1.11)$$

Решения уравнения НВН (1.1) с постоянными асимптотическими значениями на бесконечности $u(\xi, \eta, t) = \tilde{u}(\xi, \eta, t) + u_\infty = \tilde{u}(\xi, \eta, t) - \epsilon$, где $\tilde{u}(\xi, \eta, t) \rightarrow 0$ при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$, с функциональными параметрами $\alpha_k(\xi, \eta, t)$, $\beta_k(\xi, \eta, t)$, определенными в (1.11) и (1.8), даются общей детерминантной формулой [26]:

$$u(\xi, \eta, t) = -\epsilon + \partial_{\xi\eta}^2 \ln \det A, \quad A_{lk} := \delta_{lk} + \frac{1}{2} \partial_\xi^{-1} \alpha_l \beta_k, \quad l, k = 1, \dots, N. \quad (1.12)$$

Функциональные параметры в случае уравнения НВН (1.1) вследствие определений (1.8) и (1.11) удовлетворяют линейным уравнениям

$$\begin{aligned}\alpha_n \xi \eta &= \epsilon \alpha_n, & \alpha_{nt} + \kappa_1 \alpha_n \xi \xi \xi + \kappa_2 \alpha_n \eta \eta \eta &= 0, \\ \beta_n \xi \eta &= \epsilon \beta_n, & \beta_{nt} + \kappa_1 \beta_n \xi \xi \xi + \kappa_2 \beta_n \eta \eta \eta &= 0.\end{aligned}\quad (1.13)$$

Легко можно получить общую детерминантную формулу для решений уравнений 2DKK и 2DCK с функциональными параметрами $\alpha_k(x, y, t)$, $\beta_k(x, y, t)$:

$$u(x, y, t) = 3\partial_x^2 \ln \det A, \quad A_{lk} := \delta_{lk} + \frac{1}{2}\partial_x^{-1} \alpha_l \beta_k, \quad l, k = 1, \dots, N. \quad (1.14)$$

Функциональные параметры α_n и β_n для уравнений 2DKK (1.2) и 2DCK (1.3) вследствие определений (1.9) и (1.11) удовлетворяют следующим линейным уравнениям:

$$\alpha_n y + \alpha_n xxx = 0, \quad \alpha_{nt} + \alpha_n xxxxx + 5\alpha_n xxy - 5\partial_x^{-1} \alpha_n yy = 0, \quad (1.15)$$

$$\beta_n y + \beta_n xxx = 0, \quad \beta_{nt} + \beta_n xxxxx + 5\beta_n xxy - 5\partial_x^{-1} \beta_n yy = 0. \quad (1.16)$$

Общие детерминантные формулы (1.12) и (1.14) для точных решений очень просты. Основными проблемами при конструировании точных решений рассматриваемых нелинейных уравнений являются удовлетворение условий вещественности и потенциальности для уравнения НВН (1.1) и удовлетворение условий вещественности и редукции для уравнений 2DKK (1.2) и 2DCK (1.3).

2. НОВЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НВН

С помощью метода $\bar{\partial}$ -одевания можно построить вспомогательные линейные задачи для уравнения НВН. В общем положении эти задачи имеют вид

$$L_1 \psi = (\partial_{\xi\eta}^2 + u_1 \partial_\xi + u_2 \partial_\eta + u) \psi = 0, \quad (2.1)$$

$$L_2 \psi = (\partial_t + \kappa_1 \partial_\xi^3 + \kappa_2 \partial_\eta^3 + v_1 \partial_\xi^2 + v_2 \partial_\eta^2 + v_3 \partial_\xi + v_4 \partial_\eta + v) \psi = 0. \quad (2.2)$$

Интегрируемое нелинейное уравнение НВН (1.1) возникает как условие совместности линейных вспомогательных задач (2.1) и (2.2) в форме триады Манакова [5]:

$$[L_1, L_2] = B L_1, \quad B = 3(\kappa_1 \partial_\eta^{-1} u_{\xi\xi} + \kappa_2 \partial_\xi^{-1} u_{\eta\eta}). \quad (2.3)$$

В настоящей статье будут рассмотрены решения с постоянными асимптотическими значениями на бесконечности, $u(\xi, \eta, t) = \tilde{u}(\xi, \eta, t) - \epsilon$, где $\tilde{u}(\xi, \eta, t) \rightarrow 0$ при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$. Должны быть выполнены важные условия потенциальности ($u_1 = 0$, $u_2 = 0$) и вещественности ($u = \bar{u}$). Первая линейная вспомогательная задача (2.1) с $u_1 = u_2 = 0$, записанная в виде $(\partial_{\xi\eta}^2 + \tilde{u})\psi = \epsilon\psi$, в случае вещественных пространственных переменных $\xi \Rightarrow t - x$, $\eta \Rightarrow t + x$ является возмущенным телеграфным уравнением (при $\epsilon = 0$ – возмущенным уравнением струны), а в случае комплексных пространственных переменных $\xi \Rightarrow x + iy = z$, $\eta \Rightarrow x - iy = \bar{z}$ совпадает с известным двумерным стационарным уравнением Шредингера $(-2\partial_{z\bar{z}}^2 + V_{\text{Schr}})\psi = E\psi$, где $V_{\text{Schr}} = -2\tilde{u}$ и $E = -2\epsilon$. Поэтому конструирование точных решений уравнения НВН

означает одновременное вычисление точных потенциалов соответствующих линейных задач [27]. Формулы реконструкции для потенциалов линейной задачи (2.1) имеют вид [4]

$$u_1 = -\frac{\chi_\infty \eta}{\chi_\infty}, \quad u_2 = -\frac{\chi_0 \xi}{\chi_0}, \quad u = -\epsilon - i\chi_{-1}\eta = -\epsilon + i\epsilon\chi_1\xi, \quad (2.4)$$

где функции χ_∞ , χ_0 , χ_{-1} (1.6), (1.7) являются коэффициентами разложений волновой функции χ вблизи точек $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Благодаря канонической нормировке волновой функции $\chi|_{\lambda \rightarrow \infty} \rightarrow 1 = \chi_\infty = 1$ имеем $u_1 = 0$. Следовательно, условие потенциальности оператора L_1 из (2.1), т.е. $u_1 = u_2 = 0$, удовлетворяется без потери общности требованием $\chi_0 = \text{const} = 1$.

Условие вещественности для u (2.4) и потенциальности для оператора L_1 приводят к некоторым ограничениям на ядро R_0 $\bar{\partial}$ -проблемы. Например, для эллиптической версии ($\sigma = i$, $\kappa_1 = \overline{\kappa_2} = \kappa$), т.е. для уравнения Веселова–Новикова (ВН) с комплексными пространственными переменными $\xi = z$ и $\eta = \bar{z}$, условие вещественности для u в пределе слабых полей ($\chi = 1$ в (1.6)) приводит к следующим ограничениям [23]:

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \frac{\epsilon^3}{|\mu|^2 |\lambda|^2 \bar{\mu} \bar{\lambda}} \overline{R_0\left(-\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, -\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}; -\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, -\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}\right)}. \quad (2.5)$$

Условие потенциальности $\chi_0 = 1$ принимает вид [26]

$$\chi_0 - 1 = \frac{i\pi}{\epsilon} \sum_{k,l=1}^N A_{kl}^{-1} B_{lk} = \frac{i\pi}{\epsilon} (\det(BA^{-1} + 1) - 1) = 0, \quad B_{lk} = \alpha_l \beta_{k\eta}, \quad (2.6)$$

где B и BA^{-1} (матрица A определена в (1.12)) – вырожденные матрицы с рангом, равным единице.

Пример решения с функциональными параметрами. Для того чтобы удовлетворить условию потенциальности ($\chi_0 = 1$), сгруппируем слагаемые в сумме (1.10) для ядра R_0 в пары:

$$R_0(\mu, \bar{\mu}, \lambda, \bar{\lambda}) = \pi \sum_{k=1}^{2N} f_k(\mu, \bar{\mu}) g_k(\lambda, \bar{\lambda}) = \pi \sum_{k=1}^N [p_k(\mu, \bar{\mu}) q_k(\lambda, \bar{\lambda}) + \tilde{p}_k(\mu, \bar{\mu}) \tilde{q}_k(\lambda, \bar{\lambda})]. \quad (2.7)$$

Можно показать, что условие потенциальности может быть удовлетворено следующим выбором функциональных параметров в спектральном представлении [26]:

$$\tilde{p}_k(\mu, \bar{\mu}) = -c_k^{-1} \mu^{-1} q_k(-\mu, -\bar{\mu}), \quad \tilde{q}_k(\lambda, \bar{\lambda}) = -c_k \lambda p_k(-\lambda, -\bar{\lambda}), \quad (2.8)$$

где c_k , $k = 1, \dots, N$, – некоторые константы.

Условие вещественности (2.5) приводит к дополнительным ограничениям на параметры p_k и q_k [26]:

$$q_k(\lambda, \bar{\lambda}) = \epsilon^3 c_k |\lambda|^{-2} (\bar{\lambda})^{-1} \overline{p_k\left(-\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, -\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}\right)}, \quad c_k = ic_{k0}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.9)$$

где c_{k0} – некоторые вещественные константы. Используя определения (1.11), из (2.8), (2.9) можно получить соотношения между различными функциональными параметрами в координатном представлении:

$$\beta_k = -\epsilon c_{k0} \bar{\alpha}_{kz}, \quad \alpha_{N+k} = \epsilon \bar{\alpha}_k, \quad \beta_{N+k} = c_{k0} \alpha_{kz}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.10)$$

Класс решений с функциональными параметрами с постоянным асимптотическим значением $-\epsilon$ на бесконечности уравнения ВН вычисляется с помощью общей детерминантной формулы (1.12). Эти решения вследствие (2.10) выражаются через N комплексных функциональных параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_N$. В простейшем случае $N = 1$ соответствующее решение имеет вид

$$u(z, \bar{z}, t) = -\epsilon + \frac{c_{10}\epsilon}{2\Delta} (|\alpha_{1z}|^2 - |\alpha_{1\bar{z}}|^2) - \frac{c_{10}^2\epsilon^2}{8\Delta^2} |\alpha_1 \bar{\alpha}_{1\bar{z}} - \bar{\alpha}_1 \alpha_{1z}|^2, \quad (2.11)$$

где $\det A = (1 - (c_{10}\epsilon/2)\partial_z^{-1}(\alpha_1 \bar{\alpha}_{1z}) + (c_{10}\epsilon/4)|\alpha_1|^2)^2 = \Delta^2$. Решение (2.11) может быть как сингулярным, так и несингулярным, это зависит от выбора функциональных параметров. Другие примеры точных решений с функциональными параметрами для обеих версий уравнения НВН получены в статье [26].

Примеры многосолитонных решений. Многосолитонные решения представляют собой интересный подкласс точных решений с функциональными параметрами уравнения НВН. Для δ -функциональных параметров p_k и q_k вида

$$p_k(\mu, \bar{\mu}) = \delta(\mu - \mu_k), \quad q_k(\lambda, \bar{\lambda}) = a_k \lambda_k \delta(\lambda - \lambda_k) \quad (2.12)$$

получаем из (1.11) и (2.12) соответствующие функциональные параметры α_k и β_k :

$$\alpha_k = -2ie^{F(\mu_k)}, \quad \beta_k = -2ia_k \lambda_k e^{-F(\lambda_k)}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.13)$$

с комплексными константами a_k . В этом случае общая детерминантная формула (1.12) приводит к многосолитонным решениям. Из формулы (2.7), используя (2.8) и (2.12), получаем ядро R_0 , удовлетворяющее условию потенциальности:

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \pi \sum_{k=1}^N [a_k \lambda_k \delta(\mu - \mu_k) \delta(\lambda - \lambda_k) + a_k \mu_k \delta(\mu + \lambda_k) \delta(\lambda + \mu_k)]. \quad (2.14)$$

Комплексные односолитонные ($N = 1$ в (2.14)) и двухсолитонные ($N = 2$) решения, удовлетворяющие условию потенциальности, вычисляются посредством (1.12) с $\det A$, имеющим следующий вид:

$$\begin{aligned} N = 1: \quad \det A &= (1 + s_1 e^{\Delta F(\mu_1, \lambda_1)})^2, \\ N = 2: \quad \det A &= (1 + s_1 e^{\Delta F(\mu_1, \lambda_1)} + (s_2 + w e^{\Delta F(\mu_1, \lambda_1)}) e^{\Delta F(\mu_2, \lambda_2)})^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь s_k , w и $\Delta F(\mu_k, \lambda_k)$, $k = 1, 2$, даются выражениями

$$s_k = \frac{ia_k(\mu_k + \lambda_k)}{\mu_k - \lambda_k}, \quad \Delta F(\mu_k, \lambda_k) = F(\mu_k) - F(\lambda_k), \quad (2.16)$$

$$w = -s_1 s_2 \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 + \mu_1)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_1 + \mu_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 - \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\lambda_1 - \mu_2)}. \quad (2.17)$$

Условие вещественности (2.9) вследствие (2.12) приводит к следующим ограничениям на параметры μ_k , λ_k , a_k в формулах (2.16) и (2.17):

$$a_k = i\epsilon c_{k0} = ia_{k0}, \quad \epsilon = -\lambda_k \bar{\mu}_k = -\mu_k \bar{\lambda}_k, \quad k = 1, 2; \quad (2.18)$$

кроме того, для несингулярности решений вещественные константы s_k , $k = 1, 2$, должны быть положительными и необходимо выполнение соотношений

$$s_k = -\frac{a_{k0}(\mu_k + \lambda_k)}{\mu_k - \lambda_k} = e^{\phi_{0k}}. \quad (2.19)$$

Таким образом, используя (1.12), (2.15), (2.18) с учетом (2.19), получаем простейшее вещественное односолитонное решение $u_{[N=1]}$, соответствующее вырожденному ядру R_0 (2.14):

$$u_{[N=1]} = -\epsilon + \frac{|\lambda_1 - \mu_1|^2}{2 \operatorname{ch}^2(\varphi_1 + \phi_{01})/2}, \quad \epsilon = -\lambda_1 \bar{\mu}_1, \quad (2.20)$$

где $\varphi_k(z, \bar{z}, t) = i[(\mu_k - \lambda_k)z - (\bar{\mu}_k - \bar{\lambda}_k)\bar{z} + \kappa(\mu_k^3 - \lambda_k^3)t - \bar{\kappa}(\bar{\mu}_k^3 - \bar{\lambda}_k^3)t]$.

Примечательно, что при выборе $w = s_1 s_2$, т.е. при условии

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 + \mu_1)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_1 + \mu_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 - \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\lambda_1 - \mu_2)} = -1, \quad (2.21)$$

или, что эквивалентно, $(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2)(\lambda_1 - \mu_1)(\lambda_2 - \mu_2) = 0$, формула для двухсолитонного решения $u_{[N=2]}$ вследствие (1.12), (2.15), (2.18) и (2.19) упрощается до очень простого выражения (с точностью до $-\epsilon$ является суммой двух односолитонных решений (2.20)) [28]:

$$u_{[N=2]}(z, \bar{z}, t) = -\epsilon + \sum_{k=1}^{k=2} \frac{|\lambda_k - \mu_k|^2}{2 \operatorname{ch}^2(\varphi_k + \phi_{0k})/2}. \quad (2.22)$$

Из соотношения $\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 = 0$ в силу вещественности ϵ ($\lambda_k \bar{\mu}_k = \bar{\lambda}_k \mu_k = -\epsilon$, $k = 1, 2$) получаем следующую параметризацию: $\mu_2 = i\tau \mu_1$, $\lambda_2 = i\tau^{-1} \lambda_1$ с вещественной константой τ .

О линейной суперпозиции точных решений. Существует предел нулевой энергии во всех полученных формулах для двухсолитонных решений: $\epsilon = -E/2 = -\bar{\lambda}_k \mu_k = -\lambda_k \bar{\mu}_k \rightarrow 0$. К этому пределу в соответствии с соотношением $\epsilon = -\mu_k \bar{\lambda}_k$ можно корректно перейти, полагая во всех требуемых формулах $\epsilon \rightarrow 0$ и $\mu_k \rightarrow 0$ в случаях, когда неопределенность отсутствует, но при наличии неопределенности $\epsilon/\mu_k \rightarrow -\bar{\lambda}_k \neq 0$. Двухсолитонное решение (2.22) в рассматриваемом пределе имеет вид [28]

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} = \frac{|\lambda_1|^2}{2 \operatorname{ch}^2(\varphi_1(z, \bar{z}, t) + \phi_{01})/2} + \frac{|\lambda_2|^2}{2 \operatorname{ch}^2(\varphi_2(z, \bar{z}, t) + \phi_{02})/2} \quad (2.23)$$

с фазами $\varphi_k(z, \bar{z}, t)$, заданными выражениями $\varphi_k(z, \bar{z}, t) = -i(\lambda_k z - \bar{\lambda}_k \bar{z} + \kappa \lambda_k^3 t - \bar{\kappa} \bar{\lambda}_k^3 t)$, $k = 1, 2$. Можно проверить непосредственной подстановкой, что уравнению ВН удовлетворяет не только решение $u = u^{(1)} + u^{(2)} = \tilde{u} = -V_{\text{Schr}}/2$, даваемое формулой (2.23), но также и каждое слагаемое $u^{(k)}$, $k = 1, 2$, суммы $u = u^{(1)} + u^{(2)}$. Таким

образом, в рассматриваемом случае справедлив принцип линейной суперпозиции $N[u] = N[u^{(1)}] + N[u^{(2)}] = 0$ для специального типа решений $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, задаваемых формулой (2.23). Используя выражения для фаз $\varphi_k(z, \bar{z}, t)$, можно показать, что линейные солитоны $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ распространяются на плоскости (x, y) в перпендикулярных друг другу направлениях.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ 2DKK И 2DCK

Уравнения 2DKK и 2DCK были открыты в статье Конопельченко и Дубровского [13], они могут быть представлены как условие совместности в форме Лакса $[L_1, L_2] = 0$. Эти уравнения известны также как члены СКР-иерархии (уравнение 2DKK) и ВКР иерархии (уравнение 2DCK). Уравнению 2DKK соответствуют следующие две линейные вспомогательные задачи [13]:

$$\begin{aligned} L_1\psi &= \left(\partial_x^3 + u\partial_x + \frac{1}{2}u_x + \partial_y \right) \psi = 0, \\ L_2\psi &= \left[\partial_t - 9\partial_x^5 - 15u\partial_x^3 - \frac{45}{2}u_x\partial_x^2 - \left(\frac{35}{2}u_{xx} + 5u^2 - 5\partial_x^{-1}u_y \right) \partial_x - \right. \\ &\quad \left. - \left(5uu_x - \frac{5}{2}u_y + 5u_{xxx} \right) \right] \psi = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

а уравнению 2DCK – две другие вспомогательные задачи [13]:

$$\begin{aligned} L_1\psi &= (\partial_x^3 + u\partial_x + \partial_y)\psi = 0, \\ L_2\psi &= [\partial_t - 9\partial_x^5 - 15u\partial_x^3 - 15u_x\partial_x^2 - (10u_{xx} + 5u^2 - 5\partial_x^{-1}u_y)\partial_x] \psi = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В статье [25] метод $\bar{\partial}$ -одевания Захарова–Манакова был впервые применен для построения многосолитонных суперпозиций линейных солитонов решений уравнений 2DKK и 2DCK. Формула реконструкции для решений u указанных уравнений имеет вид [25]

$$u = -3i\chi_{-1x}. \quad (3.3)$$

В рассматриваемых случаях необходимо удовлетворить условию вещественности решения u и некоторым условиям редукции [25]. В терминах коэффициентов χ_{-1} и χ_{-2} разложения волновой функции $\chi(\lambda)$ в ряд в окрестности точки $\lambda = \infty$ условия редукции для уравнений 2DKK и 2DCK могут быть представлены в виде следующих нелинейных соотношений [25]:

$$2DKK: \quad \chi_{-2x} - \frac{i}{2}\chi_{-1xx} - \chi_{-1}\chi_{-1x} = 0, \quad (3.4)$$

$$2DCK: \quad \chi_{-2x} - i\chi_{-1xx} - \chi_{-1}\chi_{-1x} = 0. \quad (3.5)$$

Из формул (1.6) и (3.3) легко получить в пределе слабых полей ограничения на ядро R_0 (1.10) $\bar{\partial}$ -проблемы, обусловленные вещественностью $\bar{u} = u$ решений u [25]:

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \overline{R_0(-\bar{\mu}, -\mu; -\bar{\lambda}, -\lambda)}, \quad R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \overline{R_0(\bar{\lambda}, \lambda; \bar{\mu}, \mu)}. \quad (3.6)$$

Основная проблема в конструировании точных решений уравнений 2DKK и 2DCK заключается в удовлетворении условий редукции (3.4), (3.5) и вещественности (3.6).

Точные решения с функциональными параметрами уравнения 2ДКК.

Можно показать, что условие редукции (3.4) для уравнения 2ДКК выполняется при следующих соотношениях между функциональными параметрами в (1.10) и (1.11):

$$f_k(\mu, \bar{\mu}) = c_k g_k(-\mu, -\bar{\mu}), \quad \alpha_k(x, y, t) = c_k \beta_k(x, y, t), \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.7)$$

Первому и второму условиям вещественности из (3.6) можно удовлетворить, налагая на функциональные параметры дополнительные ограничения:

$$f_k(\mu, \bar{\mu}) = \overline{v_k f_k(-\bar{\mu}, -\mu)}, \quad \frac{v_k}{c_k} = \frac{\overline{v_k}}{c_k}, \quad v_k^2 = \frac{c_k}{\bar{c}_k}, \quad |v_k| = 1, \quad (3.8)$$

где v_k и c_k – некоторые комплексные константы. Смысл такого условия очень прост: каждое слагаемое суммы (1.10) после применения условия вещественности (3.6) не изменяется. Попытка удовлетворить условию вещественности с использованием некоторого числа пар слагаемых в сумме (1.10), когда первое слагаемое каждой пары при наложении условия вещественности (3.6) переходит во второе слагаемое этой пары, приводит к сингулярному решению.

Вследствие определений (1.11) из (3.7) и (3.8) следуют соотношения между различными функциональными параметрами:

$$\alpha_k = -v_k \overline{\alpha_k}, \quad \beta_k = c_k^{-1} \alpha_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.9)$$

Таким образом, благодаря (3.9) оба набора α_k и β_k выражаются через N независимых комплексных функциональных параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$.

Класс точных решений u с функциональными параметрами уравнения 2ДКК вычисляется с помощью детерминантной формулы (1.14) с учетом соотношений (3.9). В простейшем случае $N = 1$ решение u имеет вид

$$u(x, y, t) = -\frac{3v_1}{2c_1(\det A)^2} \left(\det A \cdot |\alpha_1|_x^2 + \frac{v_1}{2c_1} |\alpha_1|^4 \right), \quad (3.10)$$

где $\det A = (1 - (v_1/2c_1)\partial_x^{-1}|\alpha_1|^2)$ и v_1/c_1 вещественно в силу (3.8). В случае $N = 2$ вследствие (3.9) определитель матрицы A (1.14) имеет вид

$$\det A = \left(1 - \frac{v_1}{2c_1} \partial_x^{-1} |\alpha_1|^2 \right) \left(1 - \frac{v_2}{2c_2} \partial_x^{-1} |\alpha_2|^2 \right) - \frac{v_1 v_2}{4c_1 c_2} |\partial_x^{-1} \alpha_1 \alpha_2|^2, \quad (3.11)$$

где отношения v_k/c_k , $k = 1, 2$, в силу (3.8) являются вещественными константами. Соответствующее решение u вычисляется с помощью формулы реконструкции (1.14). Интересно отметить, что рассмотренные простейшие решения с функциональными параметрами $u(x, y, t)$ уравнения 2ДКК в случаях $N = 1, 2$ являются несингулярными при отрицательных значениях констант $v_k/c_k < 0$, $k = 1, 2$; в частности, для $N = 2$ это следует из (3.11) в силу неравенства Коши–Буняковского $(\partial_x^{-1} |\alpha_1|^2)(\partial_x^{-1} |\alpha_2|^2) \geq |\partial_x^{-1} \alpha_1 \alpha_2|^2$.

Для δ -функциональных параметров $f_k(\mu, \bar{\mu}) = A_k \delta(\mu - i\mu_{k0})$, $k = 1, \dots, N$, используя определения (1.11) и удовлетворяя условиям (3.7), (3.8), с помощью (1.14) получаем многосолитонные решения, вычисленные ранее в статье [25].

Можно показать, что условие редукции в случае уравнения 2ДКК удовлетворяется и при другом соотношении между функциональными параметрами. Для этого сгруппируем слагаемые в ядре R_0 в пары:

$$\begin{aligned} R_0(\mu, \bar{\mu}, \lambda, \bar{\lambda}) &= \pi \sum_{k=1}^{2N} f_k(\mu, \bar{\mu}) g_k(\lambda, \bar{\lambda}) = \\ &= \pi \sum_{k=1}^N [p_k(\mu, \bar{\mu}) q_k(\lambda, \bar{\lambda}) + \tilde{p}_k(\mu, \bar{\mu}) \tilde{q}_k(\lambda, \bar{\lambda})]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Для ядра (3.12) условие редукции (3.4) выполняется при выборе $\tilde{p}_k, \tilde{q}_k$ вида

$$\tilde{p}_k(\mu, \bar{\mu}) = c_k q_k(-\mu, -\bar{\mu}), \quad \tilde{q}_k(\mu, \bar{\mu}) = c_k^{-1} p_k(-\mu, -\bar{\mu}), \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.13)$$

Из формул (3.13) и (1.11) следуют соотношения между функциональными параметрами:

$$\alpha_{k+N}(x, y, t) = c_k \beta_k(x, y, t), \quad \beta_{k+N}(x, y, t) = c_k^{-1} \alpha_k(x, y, t), \quad (3.14)$$

где c_k – некоторые комплексные константы. Условию вещественности из (3.6) можно удовлетворить, налагая на функциональные параметры из (3.12) дополнительные ограничения:

$$p_k(\mu, \bar{\mu}) = v_k \overline{p_k(-\bar{\mu}, -\mu)}, \quad q_k(\lambda, \bar{\lambda}) = v_k^{-1} \overline{q_k(-\bar{\lambda}, -\lambda)}, \quad (3.15)$$

где $v_k, k = 1, \dots, N$, – некоторые комплексные константы, или

$$q_k(\mu, \bar{\mu}) = v_k^{-1} \overline{p_k(\bar{\mu}, \mu)}, \quad \bar{v}_k = v_k. \quad (3.16)$$

В случае (3.15) имеют место следующие свойства функциональных параметров α_n и β_n :

$$\alpha_k = -v_k \overline{\alpha_k}, \quad \beta_k = -v_k^{-1} \overline{\beta_k}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.17)$$

Общая детерминантная формула (1.14) в этом случае приводит к другому классу точных решений u с функциональными параметрами уравнения 2ДКК (1.2). По построению в силу (3.14) эти решения зависят от $2N$ комплексных функциональных параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_N)$ со свойствами (3.17). В простейшем случае $N = 1$ соответствующее решение u , вычисленное с помощью (1.14), имеет вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{3}{(\det A)^2} \left((\det A) \left(\frac{1}{2} (\alpha_1^2 \beta_1^2 - |\alpha_1|^2 |\beta_1|^2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\alpha_1 \beta_1)_x \left(1 + \frac{1}{2} \partial_x^{-1} \alpha_1 \beta_1 \right) - \frac{1}{4} (|\alpha_1|_x^2 \partial_x^{-1} |\beta_1|^2 + |\beta_1|_x^2 \partial_x^{-1} |\alpha_1|^2) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\alpha_1 \beta_1 \left(1 + \frac{1}{2} \partial_x^{-1} \alpha_1 \beta_1 \right) - \frac{1}{4} (|\alpha_1|^2 \partial_x^{-1} |\beta_1|^2 + |\beta_1|^2 \partial_x^{-1} |\alpha_1|^2) \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $\det A = (1 + (1/2) \partial_x^{-1} \alpha_1 \beta_1)^2 - (1/4) \partial_x^{-1} |\alpha_1|^2 \partial_x^{-1} |\beta_1|^2$, и вследствие (3.17) $\alpha_1 \beta_1 = \overline{\alpha_1 \beta_1}$. Вычисленное для случая $N = 1$ простейшее решение с функциональными параметрами $u(x, y, t)$ (3.18) уравнения 2ДКК вследствие нулей $\det A$ в знаменателе

может быть как сингулярным, так и несингулярным; это зависит от конкретного выбора функциональных параметров.

В частном случае δ -функциональных параметров $p_k(\mu, \bar{\mu}) = A_k \delta(\mu - i\mu_{k0})$, $q_k(\lambda, \bar{\lambda}) = B_k \delta(\lambda - i\lambda_{k0})$, $k = 1, \dots, N$, удовлетворяющих условиям (3.13) и (3.15), из определений (1.11) с помощью (1.14) получаются многосолитонные решения, вычисленные ранее в статье [25].

В случае (3.16) из (1.11) следуют соотношения между функциональными параметрами

$$\beta_k = -v_k^{-1} \overline{\alpha_k}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.19)$$

Общая детерминантная формула с матрицей A (1.14), соответствующей рассматриваемому случаю, дает класс точных решений u уравнения 2DCK (1.2), зависящих в силу (3.14) и (3.19) от N комплексных функциональных параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. В простейшем случае $N = 1$ соответствующее решение u , вычисленное с помощью (1.14), имеет вид

$$\begin{aligned} u = & \frac{3}{2v_1^2(\det A)^2} \left((\det A) \left(2v_1(\bar{\alpha}_1\alpha_{1x} + \alpha_1\bar{\alpha}_{1x}) \left(1 + \frac{1}{2v_1} \partial_x^{-1} |\alpha_1|^2 \right) - \right. \right. \\ & - \alpha_1\alpha_{1x} \partial_x^{-1} \bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_{1x} \partial_x^{-1} \alpha_1^2 \left. \right) - \frac{1}{8v_1^2} \left(\alpha_1^2 \partial_x^{-1} \bar{\alpha}_1^2 + \bar{\alpha}_1^2 \partial_x^{-1} \alpha_1^2 - \right. \\ & \left. \left. - 4v_1 |\alpha_1|^2 \left(1 + \frac{1}{2v_1} \partial_x^{-1} |\alpha_1|^2 \right) \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

где $\det A = (1 - (1/(2v_1)) \partial_x^{-1} |\alpha_1|^2)^2 - (1/(4v_1^2)) |\partial_x^{-1} \alpha_1^2|^2$ и в силу (3.16) $v_1 = \bar{v}_1$. Интересно отметить, что при $v_1 < 0$ вследствие неравенства Коши–Буняковского $(\partial_x^{-1} |\alpha_1|^2)(\partial_x^{-1} |\alpha_1|^2) \geq |\partial_x^{-1} \alpha_1 \alpha_1|^2$ имеем $\det A \neq 0$, и последнее решение является несингулярным. Для δ -функциональных параметров $p_k(\mu, \bar{\mu}) = A_k \delta(\mu - \mu_k)$, $k = 1, \dots, N$, удовлетворяющих условиям (3.13) и (3.16), из определения (1.11) с помощью (1.14) получаются соответствующие многосолитонные решения.

Точные решения с функциональными параметрами уравнения 2DCK.

В случае уравнения 2DCK (1.3) условия вещественности (3.6) и редукции (3.5) также налагают определенные ограничения на функциональные параметры. Для того чтобы удовлетворить этим условиям, слагаемые в ядре R_0 (1.10) $\bar{\partial}$ -проблемы, как и в (3.12), должны быть сгруппированы в пары. Можно легко показать, что в случае ядра (3.12) с N парами слагаемых условие редукции (3.5) выполняется при следующих соотношениях между функциональными параметрами:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_k(\mu, \bar{\mu}) &= c_k^{-1} \mu^{-1} q_k(-\mu, -\bar{\mu}), & \tilde{q}_k(\lambda, \bar{\lambda}) &= c_k \lambda p_k(-\lambda, -\bar{\lambda}), \\ \alpha_{k+N} &= i c_k^{-1} \partial_x^{-1} \beta_k, & \beta_{k+N} &= i c_k \alpha_{kx}, \quad k = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где c_k – некоторые комплексные константы.

Первое условие вещественности из (3.6) может быть удовлетворено двумя способами:

$$p_k(\mu, \bar{\mu}) = \overline{v_k p_k(-\bar{\mu}, -\mu)}, \quad q_k(\lambda, \bar{\lambda}) = v_k^{-1} \overline{q_k(-\bar{\lambda}, -\lambda)}, \quad |v_k|^2 = 1, \quad (3.22)$$

с некоторыми комплексными константами v_k , $k = 1, \dots, N$, или

$$q_k(\mu, \bar{\mu}) = \frac{\mu}{v_k} \overline{p_k(\bar{\mu}, \mu)}, \quad v_k = \bar{v}_k. \quad (3.23)$$

Легко показать, что второе условие вещественности из (3.6) приводит к противоречию и не может быть удовлетворено.

Случай (3.22) вследствие определений (1.11) приводит к следующим свойствам функциональных параметров в координатном представлении:

$$\alpha_k = -v_k \overline{\alpha_k}, \quad \beta_k = -\bar{v}_k \overline{\beta_k}, \quad |v_k|^2 = 1, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.24)$$

Общая детерминантная формула (1.14) в случае (3.22) в силу (3.21) и (3.24) дает класс точных решений с функциональными параметрами уравнения 2ДСК (1.3). В простейшем случае $N = 1$ точное решение u имеет вид

$$u = \frac{3}{2\Delta^2} \left[\Delta(\alpha_1 \beta_{1x} - \alpha_{1xx} \partial_x^{-1} \beta_1) - \frac{1}{4}(\alpha_1 \beta_1 - \alpha_{1x} \partial_x^{-1} \beta_1)^2 \right], \quad (3.25)$$

где $\det A = (1 - (1/4)\alpha_1 \partial_x^{-1} \beta_1 + (1/2)\partial_x^{-1} \alpha_1 \beta_1)^2 = \Delta^2$. В силу выражения для $\det A$ решение (3.25) несингулярно для функциональных параметров α_1 и β_1 , удовлетворяющих неравенству $-(1/4)\alpha_1 \partial_x^{-1} \beta_1 + (1/2)\partial_x^{-1} \alpha_1 \beta_1 > 0$.

В частном случае δ -функциональных параметров $p_k(\mu, \bar{\mu}) = A_k \delta(\mu - i\mu_{k0})$, $q_k(\lambda, \bar{\lambda}) = B_k \delta(\lambda - i\lambda_{k0})$, $k = 1, \dots, N$, удовлетворяющих условиям (3.21) и (3.22), где в соответствии с (3.22) $A_k = v_k \bar{A}_k$, $B_k = v_k \bar{B}_k$ и λ_{k0} , μ_{k0} — некоторые вещественные параметры, из (1.14) и определений (1.11) получаются точные многосолитонные решения [25].

Случай (3.23) приводит к следующим соотношениям между функциональными параметрами:

$$\beta_k = -iv_k^{-1} \overline{\alpha_k}_x, \quad k = 1, \dots, N, \quad (3.26)$$

с некоторыми вещественными константами v_k . Общая детерминантная формула (1.14) в рассматриваемом случае (3.23) дает другой класс точных решений с функциональными параметрами уравнения 2ДСК (1.3). По построению вследствие (3.21) и (3.26) эти решения зависят от N комплексных функциональных параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. В простейшем случае $N = 1$ получаем следующее решение u уравнения 2ДСК (1.3):

$$u = \frac{3}{2v_1 \Delta^2} \left[i\Delta(\alpha_{1xx} \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 \bar{\alpha}_{1xx}) + \frac{1}{4v_1}(\alpha_{1x} \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 \bar{\alpha}_{1x})^2 \right], \quad (3.27)$$

где $\det A = (1 + (i/(4v_1))\partial_x^{-1}(\alpha_{1x} \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 \bar{\alpha}_{1x}))^2 = \Delta^2$. Вследствие выражения для $\det A$ это решение несингулярно при выборе функционального параметра α_1 , удовлетворяющего неравенству $(i/(4v_1))\partial_x^{-1}(\alpha_{1x} \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 \bar{\alpha}_{1x}) > 0$.

В случае δ -функциональных параметров типа $p_k(\mu, \bar{\mu}) = A_k \delta(\mu + \mu_k)$, $q_k(\mu, \bar{\mu}) = -\bar{A}_k \bar{\mu}_k v_k^{-1} \delta(\mu + \bar{\mu}_k)$, $k = 1, \dots, N$, удовлетворяющих условиям (3.21) и (3.23), из (1.14) и определений (1.11) получаются соответствующие точные многосолитонные решения [25].

4. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА $\bar{\partial}$ -ОДЕВАНИЯ

Периодические решения уравнения ВН. Ограничение (2.5) на ядро R_0 $\bar{\partial}$ -проблемы, которое приводит к вещественным решениям $u = \bar{u}$, например в случае уравнения ВН, было получено с использованием формулы реконструкции (см. (2.4)):

$$u = -\epsilon - i\chi_{-1\bar{z}} = -\epsilon + i\overline{\chi_{-1\bar{z}}} = \bar{u} \quad (4.1)$$

в пределе “слабых” полей, т.е. χ_{-1} в (4.1) вычисляется из точного выражения (1.6) в приближении $\chi \simeq 1$. Эта форма условия вещественности (2.5) работает и приводит к решениям с функциональными параметрами, рассмотренным в разделе 2.

Такое использование условия вещественности успешно применялось в ряде предыдущих работ ([4], [23]–[25]), посвященных построению классов точных решений некоторых (2+1)-мерных интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений методом $\bar{\partial}$ -одевания. Но существует и другая возможность: не использовать предел слабых полей, а наложить условие вещественности $u = \bar{u}$ непосредственно на точное комплексное решение, удовлетворяющее только условию потенциальности [28].

Таким образом, стартуя с ядра общего вида R_0 $\bar{\partial}$ -проблемы, которое удовлетворяет условию потенциальности $\chi_0 - 1 = 0$, вычисляются соответствующие точные комплексные решения. Затем на эти решения налагается условие вещественности, и в результате такая процедура приводит к некоторому интересному расширению ранее полученных результатов. Продемонстрируем это на простом примере. Для простейшего ядра R_0 (2.14) в случае $N = 1$ требование вещественности (4.1), т.е. $\chi_{-1\bar{z}} = -\overline{\chi_{-1\bar{z}}}$, приводит к условию

$$\begin{aligned} & \frac{-2\epsilon a_1(\lambda_1^2 - \mu_1^2)}{\lambda_1\mu_1[e^{-\varphi_1/2} - ia_1e^{\varphi_1/2}(\lambda_1 + \mu_1)/(\lambda_1 - \mu_1)]^2} = \\ & = \frac{2\epsilon\bar{a}_1(\bar{\lambda}_1^2 - \bar{\mu}_1^2)}{\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_1[e^{-\bar{\varphi}_1/2} + i\bar{a}_1e^{\bar{\varphi}_1/2}(\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1)/(\bar{\lambda}_1 - \bar{\mu}_1)]^2}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

которое может быть удовлетворено как для вещественной фазы $\varphi_1 = \bar{\varphi}_1$ (этот случай приводит к многосолитонным решениям), так и для мнимой фазы $\varphi_1 = -\bar{\varphi}_1$. Последняя возможность приводит к периодическим решениям уравнения ВН. Условие мнимости фазы $\varphi_1 = -\bar{\varphi}_1$ в (4.2) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= i \left[(\mu_1 - \lambda_1)z - \left(\frac{\epsilon}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \bar{z} + \kappa(\mu_1^3 - \lambda_1^3)t - \bar{\kappa} \left(\frac{\epsilon^3}{\mu_1^3} - \frac{\epsilon^3}{\lambda_1^3} \right) t \right] = \\ &= i \left[(\bar{\mu}_1 - \bar{\lambda}_1)\bar{z} - \left(\frac{\epsilon}{\bar{\mu}_1} - \frac{\epsilon}{\bar{\lambda}_1} \right) z + \bar{\kappa}(\bar{\mu}_1^3 - \bar{\lambda}_1^3)t - \kappa \left(\frac{\epsilon^3}{\bar{\mu}_1^3} - \frac{\epsilon^3}{\bar{\lambda}_1^3} \right) t \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из него следуют условия для параметров:

$$\epsilon = \bar{\lambda}_1\mu_1 = \lambda_1\bar{\mu}_1, \quad \epsilon = -|\mu_1|^2 = -|\lambda_1|^2. \quad (4.4)$$

Для обоих условий (4.4) чисто мнимая фаза φ_1 , даваемая выражением (4.3), имеет вид

$$\varphi_1(z, \bar{z}, t) = i[(\mu_1 - \lambda_1)z + (\bar{\mu}_1 - \bar{\lambda}_1)\bar{z} + \kappa(\mu_1^3 - \lambda_1^3)t + \bar{\kappa}(\bar{\mu}_1^3 - \bar{\lambda}_1^3)t] := i\phi_1(z, \bar{z}, t). \quad (4.5)$$

Можно показать, что условие вещественности (4.2) для первого случая в (4.4) нетривиально удовлетворяется при следующем выборе a_1 :

$$a_1 = |a_1|e^{i\phi_a} = \left| \frac{\lambda_1 - \mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \right| e^{i\phi_a}, \quad (4.6)$$

где ϕ_a – произвольная вещественная константа. Для этого случая периодическое решение уравнения ВН (1.1) в силу соотношений (2.4), (4.2) и (4.4)–(4.6), например для $(\lambda_1 - \mu_1)/(\lambda_1 + \mu_1) > 0$, имеет вид

$$u = -\epsilon - \frac{|\lambda_1 - \mu_1|^2}{2 \cos^2((\phi_1 + \phi_a - \pi/2)/2)}, \quad \epsilon = \lambda_1 \bar{\mu}_1 = \bar{\lambda}_1 \mu_1. \quad (4.7)$$

Условие вещественности (4.2) может быть удовлетворено также и для второго случая в (4.4) и приводит к другим сингулярным периодическим решениям [28], подобным (4.7).

Аналогично вычислению двухсолитонного решения можно построить двухпериодическое решение, которое также может быть приведено к простому виду, подобному (2.22), при условии $\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 = 0$, что вследствие вещественности ϵ ($\lambda_1 \bar{\mu}_1 = \bar{\lambda}_1 \mu_1 = \lambda_2 \bar{\mu}_2 = \bar{\lambda}_2 \mu_2 = \epsilon$) приводит к следующей параметризации: $\mu_2 = i\tau \mu_1$, $\lambda_2 = i\tau^{-1} \lambda_1$ с вещественным τ . Так же, как и в случае двухсолитонных решений уравнения ВН, можно рассмотреть предел $\epsilon \rightarrow 0$ во всех полученных формулах и получить для периодических решений типа (4.7) аналогичные результаты относительно принципа линейной суперпозиции.

Следуя описанной в конце раздела 2 процедуре вычисления предела $\epsilon \rightarrow 0$, получим двухпериодическое решение [28] уравнения ВН:

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} = -\frac{|\lambda_1|^2}{2 \cos^2((\phi_1 + \phi_{a_1} - \pi/2)/2)} - \frac{|\lambda_2|^2}{2 \cos^2((\phi_2 + \phi_{a_2} - \pi/2)/2)}, \quad (4.8)$$

где фазы $\phi_k(z, \bar{z}, t)$, $k = 1, 2$, вследствие (4.5) имеют в рассматриваемом пределе следующий вид: $\phi_k(z, \bar{z}, t) = -\lambda_k z - \bar{\lambda}_k \bar{z} - \kappa \lambda_k^3 t - \bar{\kappa} \bar{\lambda}_k^3 t$, и ϕ_{a_k} – произвольные вещественные константы. Можно проверить непосредственной подстановкой, что уравнению ВН (1.1) удовлетворяет не только решение $u = \tilde{u}$, даваемое формулой (4.8), но также и каждое слагаемое $u^{(k)}$ суммы (4.8). Таким образом, в рассматриваемом случае справедлив принцип линейной суперпозиции $u = u^{(1)} + u^{(2)}$ для специального типа решений $u^{(1)}, u^{(2)}$ (4.8). Вследствие соотношения $\lambda_2 = i\tau^{-1} \lambda_1$ и выражения для фаз $\phi_k(z, \bar{z}, t)$ периодические решения $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ распространяются на плоскости (x, y) в перпендикулярных друг другу направлениях.

Тем же способом, что и в случае уравнения НВН, могут быть получены периодические решения уравнений 2DKK (1.2) и 2ДСК (1.3).

Периодические решения уравнения 2DKK. Вычислим, используя общую формулу (1.14) и принимая во внимание (3.7), комплексное решение уравнения 2DKK, удовлетворяющее только условию редукции (3.4). Это решение для простейшего случая одного слагаемого в ядре R_0 (1.10) имеет вид

$$u = \frac{3}{c_1} \frac{\alpha_1 \alpha_{1x} (1 + (1/2c_1) \partial_x^{-1} \alpha_1^2) - (1/4c_1) \alpha_1^4}{(1 + (1/2c_1) \partial_x^{-1} \alpha_1^2)^2}, \quad u = \frac{-12A^2 \mu_1 e^\varphi}{(1 + (A^2/\mu_1) e^\varphi)^2}. \quad (4.9)$$

Здесь второе комплексное решение u получено из первого с функциональными параметрами, определенными посредством (1.11) для δ -функционального ядра R_0 с $f_1 = A_1\delta(\mu - \mu_1)$; при таком выборе $2F(\mu_1) = \varphi$, $iA_1^2/c_1 = A^2$. Из требования вещественности $u = \bar{u}$ и мнимости фазы $\varphi = -\bar{\varphi}$ для второго решения из (4.9) следуют условия $\mu_1 = \bar{\mu}_1 = \mu_{10}$ и $A^2 = |\mu_{10}|e^{i\phi_a}$, где ϕ_a – произвольная вещественная константа. Налагая на второе решение из (4.9) сформулированные условия, получаем, например для $\mu_{10} > 0$, следующее сингулярное периодическое решение уравнения 2DKK:

$$u(x, y, t) = -\frac{3\mu_{10}^2}{\cos^2((\phi + \phi_a)/2)}, \quad \phi = 2(\mu_{10}x + \mu_{10}^3y + 9\mu_{10}^5t). \quad (4.10)$$

Другие периодические решения уравнения 2DKK можно вычислить, удовлетворяя условию редукции (3.4) с помощью соотношения (3.13). Сначала непосредственно из (1.14) вычисляем комплексное решение, которое удовлетворяет только условию (3.13). Так, для простейшего случая одной пары слагаемых ($N = 1$) в ядре (3.12) в силу (3.13) определитель матрицы A имеет вид $\det A = (1 + (1/2)\partial_x^{-1}\alpha_1\beta_1)^2 - (1/4)\partial_x^{-1}\alpha_1^2\partial_x^{-1}\beta_1^2$. Для δ -функциональных параметров $f_1 = A_1\delta(\mu - \mu_1)$ и $g_1 = B_1\delta(\lambda - \lambda_1)$, учитывая (1.11), получаем комплексное решение

$$u(x, y, t) = -\frac{12a(\mu_1 - \lambda_1)e^\varphi}{\det A^2} \left[\det A + \frac{a(\mu_1 - \lambda_1)e^\varphi}{\mu_1\lambda_1} \right], \quad \varphi = F(\mu_1) - F(\lambda_1), \quad (4.11)$$

$$\det A = 1 + \frac{4a}{\mu_1 - \lambda_1}e^{\varphi(x, y, t)} + \frac{a^2}{\mu_1\lambda_1} \left(\frac{\mu_1 + \lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} \right)^2 e^{2\varphi(x, y, t)}, \quad a := iA_1B_1.$$

Условие вещественности $u = \bar{u}$ и требование мнимости фазы $\varphi = -\bar{\varphi} = i\phi$ в (4.11) приводит, например, к следующим условиям для параметров:

$$\lambda_1 = -\bar{\mu}_1, \quad a^2 = \pm|\mu_1|^2 \left(\frac{\mu_1 R}{\mu_{1I}} \right)^2. \quad (4.12)$$

Налагая эти ограничения на параметры решения в (4.11), при выборе $a = \pm|\mu_1|(\mu_{1R}/\mu_{1I})$ получаем несингулярное периодическое решение уравнения 2DKK:

$$u(x, y, t) = \mp 12|\mu_1| \frac{\mu_{1R}^2}{\mu_{1I}} \frac{\cos \phi \pm \mu_{1I}/|\mu_1|}{(\cos \phi \pm |\mu_1|/\mu_{1I})^2}, \quad (4.13)$$

$$\phi = (\mu_1 + \bar{\mu}_1)x + (\mu_1^3 + \bar{\mu}_1^3)y + (\mu_1^5 + \bar{\mu}_1^5)t.$$

Периодические решения уравнения 2DCK. Решение u , которое удовлетворяет только условию редукции (3.5), в случае $N = 1$ в (3.12) дается формулой (1.14), где $\det A$ в силу (3.21) имеет вид $\det A = (1 - (1/4)\alpha_1\partial_x^{-1}\beta_1 + (1/2)\partial_x^{-1}\alpha_1\beta_1)^2 = \Delta^2$.

Для δ -функциональных параметров $f_1 = A_1\delta(\mu - \mu_1)$ и $g_1 = B_1\delta(\lambda - \lambda_1)$, вследствие определений (1.11) получаем для u из (1.14)

$$u(x, y, t) = \frac{-6a(\mu_1^2 - \lambda_1^2)}{\lambda_1 \det A} e^{\varphi(x, y, t)}, \quad \det A = \left[1 + a \frac{\mu_1 + \lambda_1}{\lambda_1(\mu_1 - \lambda_1)} e^{\varphi(x, y, t)} \right]^2, \quad (4.14)$$

где $a = iA_1B_1$ и $\varphi = F(\mu_1) - F(\lambda_1)$. Условие вещественности $u = \bar{u}$ и требование мнимости фазы $\varphi = -\bar{\varphi} = i\phi$ приводят к параметрам вида

$$\mu_1 = \bar{\mu}_1 = \mu_{10}, \quad \lambda_1 = \bar{\lambda}_1 = \lambda_{10}, \quad a = |a|e^{i\phi_a} = \left| \frac{\lambda_{10}(\mu_{10} - \lambda_{10})}{\mu_{10} + \lambda_{10}} \right| e^{i\phi_a}. \quad (4.15)$$

Налагая на u в (4.14) эти ограничения, получим сингулярное периодическое решение уравнения 2ДСК (1.3), которое при $\lambda_{10}(\mu_{10} - \lambda_{10})/(\mu_{10} + \lambda_{10}) > 0$ имеет вид

$$u(x, y, t) = -\frac{3(\mu_{10} - \lambda_{10})^2}{2\cos^2((\phi + \phi_a)/2)}, \quad (4.16)$$

где $\phi = (\mu_{10} - \lambda_{10})x + (\mu_{10}^3 - \lambda_{10}^3)y + 9(\mu_{10}^5 - \lambda_{10}^5)t$ и ϕ_a – вещественная константа.

Другая возможность удовлетворить условию вещественности $u = \bar{u}$ и требованию мнимости фазы $\varphi = -\bar{\varphi} = i\phi$ приводит к следующим ограничениям на параметры:

$$\lambda_1 = -\bar{\mu}_1, \quad a = |a|e^{i\phi_a} = \left| \frac{\mu_{1R}}{\mu_{1I}} \right| |\mu_1| e^{i\phi_a}. \quad (4.17)$$

Налагая на параметры u в (4.14) эти ограничения, получим другое периодическое решение уравнения 2ДСК (1.3), которое при $\mu_{1R}/\mu_{1I} > 0$ имеет вид

$$u(x, y, t) = -\frac{6\mu_{1R}^2}{\cos^2((\phi + \phi_a)/2)}, \quad (4.18)$$

где $\phi = (\mu_1 + \bar{\mu}_1)x + (\mu_1^3 + \bar{\mu}_1^3)y + (\mu_1^5 + \bar{\mu}_1^5)t$ и ϕ_a – произвольная вещественная константа.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решения с функциональными параметрами интегрируемых нелинейных уравнений являются важным классом точных решений. Захаров и Шабат в известных работах [14], [15] нашли первые физические применения точных решений с функциональными параметрами уравнения КП.

Метод $\bar{\partial}$ -одевания является мощным инструментом построения точных решений с функциональными параметрами двумерных интегрируемых нелинейных уравнений, позволяющим эффективно удовлетворять дополнительным ограничениям на точные решения таким, как условие вещественности, условия потенциальности и редукции.

Как было замечено Захаровым на конференции “Нелинейная физика: теория и эксперимент. VI” (июнь 2010, Галлиполи, Италия), решения с функциональными параметрами эллиптической версии уравнения НВН, т.е. уравнения ВН, могут найти интересные физические применения в описании нелинейных явлений в плазме.

И последнее. Представляется интересным определение “геометрического” смысла существования линейной суперпозиции $u^{(1)} + u^{(2)}$ решений $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ уравнения НВН. Соответствующий “код” для этого, возможно, содержится в соотношении (2.21).

Благодарности. Работа была поддержана научным грантом по фундаментальным исследованиям Новосибирского государственного технического университета (2010–2011), а также аналитической ведомственной целевой программой Министерства образования и науки РФ “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант 2.1.1./1958) и РФФИ (грант № 09-01-92442-KE_a).

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [2] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **149**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [3] B. G. Konopelchenko, *Introduction to Multidimensional Integrable Equations: The Inverse Spectral Transform in 2 + 1 Dimensions*, Plenum Press, New York, 1992.
- [4] B. G. Konopelchenko, *Solitons in Multidimensions: Inverse Spectral Transform Method*, World Sci., Singapore, 1993.
- [5] S. V. Manakov, *Physica D*, **3**:1–2 (1981), 420–427.
- [6] R. Beals, R. R. Coifman, *Physica D*, **18**:1–3 (1986), 242–249.
- [7] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:2 (1985), 11–25.
- [8] V. E. Zakharov, “Commutating operators and nonlocal $\bar{\partial}$ -problem”, *Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, Proc. III Int. Workshop, v. 1, Naukova Dumka, Kiev, 1988, 152–154.
- [9] L. V. Bogdanov, S. V. Manakov, *J. Phys. A*, **21**:10 (1988), L537–L544.
- [10] A. S. Fokas, V. E. Zakharov, *J. Nonlinear Sci.*, **2**:1 (1992), 109–134.
- [11] Л. П. Нижник, *Докл. АН СССР*, **254**:2 (1980), 332–335.
- [12] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **279**:1 (1984), 20–24.
- [13] B. G. Konopelchenko, V. G. Dubrovsky, *Phys. Lett. A*, **102**:1–2 (1984), 15–17.
- [14] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53.
- [15] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **13**:3 (1979), 13–22.
- [16] А. Б. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **229**:1 (1976), 15–18.
- [17] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **279**:4 (1984), 784–788.
- [18] П. Г. Гриневич, Р. Г. Новиков, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:4 (1985), 32–42.
- [19] П. Г. Гриневич, С. В. Манаков, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:2 (1986), 14–24.
- [20] P. G. Grinevich, S. P. Novikov, “Inverse scattering problem for the two-dimensional Schrödinger operator at a fixed negative energy and generalized analytic functions”, *Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, v. 1, eds. V. G. Bar'yakhtar, V. M. Chernousenko, N. S. Erokhin, A. G. Sitenko, V. E. Zakharov, World Sci., Singapore, 1988, 58–85.
- [21] П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:1 (1988), 23–33.
- [22] П. Г. Гриневич, *ТМФ*, **69**:2 (1986), 307–310.
- [23] V. G. Dubrovsky, I. B. Formusatik, *J. Phys. A*, **34**:9 (2001), 1837–1851.
- [24] V. G. Dubrovsky, I. B. Formusatik, *Phys. Lett. A*, **313**:1–2 (2003), 68–76.
- [25] V. G. Dubrovsky, Ya. V. Lisitsyn, *Phys. Lett. A*, **295**:4 (2002), 198–207.
- [26] В. Г. Дубровский, А. В. Топовский, М. Ю. Басалаев, *ТМФ*, **165**:2 (2010), 272–294.
- [27] V. G. Dubrovsky, A. V. Topovsky, M. Yu. Basalaev, *J. Math. Phys.*, **51**:9 (2010), 092106, 22 pp.
- [28] M. Yu. Basalaev, V. G. Dubrovsky, A. V. Topovsky, *New exact solutions with constant asymptotic values at infinity of the NVN integrable nonlinear evolution equation via $\bar{\partial}$ -dressing method*, arXiv:0912.2155.