Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Герджиков, Г. Г. Граховски, А. В. Михайлов,
Т. И. Валчев, Рациональные пучки и рекурсионные опе-
раторы для интегрируемых уравнений на симметрич-
ных пространствах типа **A.III**, *ТМФ*, 2011, том 167, но-
мер 3, 394–406

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6649>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:22:59

© 2011 г.

В. С. Герджиков*, Г. Г. Граховски*[†],
А. В. Михайлов[‡], Т. И. Валчев*

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПУЧКИ И РЕКУРСИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ НА СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА А.III

Проведен анализ и сравнение методов построения рекурсионных операторов для специального класса интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений, связанных с симметричными пространствами типа **A.III** в классификации Картана и имеющих дополнительные редукции.

Ключевые слова: рациональные пучки, интегрируемые уравнения, рекурсионные операторы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рекурсионные операторы $\Lambda_{\pm}$ играют важную роль в теории нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ), интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР). Они были построены и проанализированы для широкого класса операторов Лакса L , и оказалось, что они порождают не только представления Лакса, но также иерархию НЭУ, связанных с данным оператором Лакса L , их законы сохранения и иерархию гамильтоновых структур (см. работы [1]–[4] и многочисленные ссылки в них). Рекурсионный оператор также может рассматриваться как оператор Лакса L , взятый в сопряженном представлении соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Операторы $\Lambda_{\pm}$ для операторов Лакса, явная зависимость которых от спектрального параметра λ является сравнительно простой (скажем, линейной или квадратичной), были построены давно [5]–[8]. Кроме того, крайне важным является свойство полноты набора собственных функций операторов $\Lambda_{\pm}$ (“квадратов решений” оператора L). Полнота “квадратов решений” играет фундаментальную роль в доказательстве того, что МОЗР является фактически нелинейным аналогом преобразования

*Institute of Nuclear Research and Nuclear Energy, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria. E-mail: gerjikov@inrne.bas.bg, valtchev@inrne.bas.bg

[†]School of Mathematical Sciences, Dublin Institute of Technology, Dublin, Ireland. E-mail: grah@inrne.bas.bg

[‡]Applied Mathematics Department, University of Leeds, Leeds, UK. E-mail: a.v.mikhailov@leeds.ac.uk

Фурье, который позволяет линеаризовать НЭУ. На этом пути можно вывести все фундаментальные свойства НЭУ единым образом.

Важным инструментом выделения новых НЭУ из известных многокомпонентных НЭУ является группа редукций, введенная в работах [9]–[12]. Появление этого метода привело к формулировке теорий двумерного поля Тоды [11], [13], а самые последние достижения состоят в открытии новых автоморфных алгебр Ли и их классификации [14]–[16].

При наличии дополнительных редукций проблема получения рекурсионных операторов становится более сложной. Если редукция совместна с линейным или квадратичным по λ оператором L , то построение оператора Λ является сравнительно простой задачей [4]. Альтернативное построение оператора Λ как формального оператора редукции дается в работах [17], [18] (см. также обзоры [19], [20]). В результате $\mathbb{Z}_n$ -редукции, во-первых, соответствующие “квадраты решений” являются аналитическими в секторах комплексной плоскости переменной λ , ограниченных углами π/n ; во-вторых, можно воспользоваться градуировкой алгебры Ли $\mathfrak{g} \equiv \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathfrak{g}^{(k)}$, и, как следствие, рекурсионный оператор разлагается в произведение n сомножителей, $\Lambda = \prod_{k=0}^{n-1} \Lambda_k$, где каждый из сомножителей Λ_k осуществляет отображение $\Lambda_k: \mathfrak{g}^{(k-1)} \rightarrow \mathfrak{g}^{(k)}$.

Ситуация становится более сложной, если дополнительная редукция радикально изменяет зависимость оператора Лакса от λ . В настоящей работе мы рассмотрим эту проблему в одном из простейших случаев, когда оператор Лакса L изменяет полиномиальную зависимость от λ на рациональную. Как было показано ранее, линейный по λ оператор Лакса, задаваемый равенством

$$L_0\psi := i\partial_x\psi + \lambda L_1\psi(x, \lambda) = 0,$$

приводит к интегрируемой системе [17], [21]

$$iu_t = ((1 - \mathbf{u}\mathbf{u}^\dagger)\mathbf{u}_x)_x, \quad \mathbf{u}^\dagger\mathbf{u} = \mathbb{1}, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}$ – комплексная матрица размера $(N - k) \times k$, а $\mathbb{1}$ – единичная матрица размера $k \times k$. Система (1) является $S(U(N - k) \times U(k))$ -инвариантной и в этом смысле изотропной. В частности, если $k = 1$, то систему (1) можно рассматривать как $U(N - 1)$ -инвариантную интегрируемую систему в пространстве $\mathbb{CP}^{N-1}$. Соответствующие рекурсионные операторы были выведены в работе [22].

В работе [21] мы получили новые НЭУ с дополнительной $\mathbb{Z}_2$ -редукцией, которая содержит преобразование $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$ и является одной из простейших нетривиальных редукций (см. [10]–[12], [15], [16]). Благодаря ей соответствующий оператор Лакса приобретает рациональную зависимость от λ ,

$$L\psi := i\partial_x\psi + \left(\lambda L_1 + \frac{1}{\lambda}L_{-1}\right)\psi = 0, \quad (2)$$

а простейшие НЭУ принимают вид

$$\begin{aligned} iu_t &= u_{xx} - (u(u^*u_x + v^*v_x))_x + 8v v^*u, \\ iv_t &= v_{xx} - (v(u^*u_x + v^*v_x))_x - 8u u^*v, \end{aligned} \quad (3)$$

где u и v – комплексные функции от x и t , подчиняющиеся условию $|u^2| + |v^2| = 1$, т. е. вектор с компонентами u, v пробегает трехмерную сферу в $\mathbb{R}^4$. Система (3) может также рассматриваться как анизотропная деформация уравнения (1) при $k = 1$, $N = 3$.

Главная цель настоящей работы – предложить два метода получения рекурсионных операторов, связанных с операторами Лакса, имеющими рациональную зависимость от λ . Результаты настоящей работы являются естественным продолжением наших предыдущих результатов [21], [22] и работы [23]. В разделе 2 мы приводим предварительные сведения, касающиеся спектральных свойств оператора L (2). В разделе 3 мы выводим рекурсионный оператор с использованием метода Гюрсес–Карасу–Соколова (ГКС). В разделе 4 мы используем соотношения Вронского для определения “квадратов решений” оператора L . Затем, используя калибровочно-ковариантный подход [4], [6], мы вводим рекурсионный оператор как оператор, для которого “квадраты решений” являются собственными функциями. Подробности наших расчетов приводятся в приложении.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Сформулируем основные результаты нашей предыдущей работы [21]. В ней мы показали, что уравнения (3), которые естественным образом связаны с симметричным пространством $SU(3)/S(U(1) \times U(2))$ типа **A.III** [24], допускают представление Лакса и могут быть решены с помощью МОЗР. Оператор Лакса задается соотношением (2), а само уравнение является условием совместности оператора L и линейного оператора A , задаваемого равенством

$$A\psi := i\partial_t\psi + \left(A_0 + \lambda A_1 + \frac{1}{\lambda}A_{-1} + \lambda^2 A_2 + \frac{1}{\lambda^2}A_{-2}\right)\psi = \psi f(\lambda). \quad (4)$$

Хорошо известно, что вышеупомянутое симметричное пространство построено с помощью инволютивного автоморфизма Картана [24], который приводит к $\mathbb{Z}_2$ -градуировке в основополагающей алгебре Ли: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{(1)}$, где

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \{Y \in \mathfrak{g} : J_1 Y J_1 = Y\}, \quad \mathfrak{g}^{(1)} = \{X \in \mathfrak{g} : J_1 X J_1 = -X\}, \\ J_1 = \text{diag}(1, -1, -1).$$

Наше представление Лакса таково, что $L_{\pm 1}, A_{\pm 1} \in \mathfrak{g}^{(1)}$ и $A_0, A_{\pm 2} \in \mathfrak{g}^{(0)}$; подробности содержатся в приложении. В частности, для операторов L_1 и A_1 мы имеем выражения

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ u^* & 0 & 0 \\ v^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a^* & 0 & 0 \\ b^* & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которые явно влекут два первых условия редукции

$$L_{\pm 1}^\dagger = L_{\pm 1}, \quad A_{\pm 1}^\dagger = A_{\pm 1}, \quad A_{\pm 2}^\dagger = A_{\pm 2}. \quad (5)$$

Мы налагаем также третью редукцию в виде

$$J_2 L_1 J_2 = L_{-1}, \quad J_2 A_1 J_2 = A_{-1}, \quad J_2 A_2 J_2 = A_{-2}, \quad (6)$$

Непрерывный спектр оператора L в случае граничных условий (76).

где $J_2 = \text{diag}(1, -1, 1)$. Нетрудно проверить, что $|u|^2 + |v|^2$ есть константа, которую мы можем, введя номировку, положить равной единице, $|u|^2 + |v|^2 = 1$, т. е. вектор (u, v) лежит на трехмерной сфере в $\mathbb{R}^4$.

Спектральная теория для оператора Лакса L (2) существенно зависит от граничных условий. У нас есть два естественных способа определить граничные конфигурации, а именно

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x, t) = 0, \quad (7a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x, t) = 1. \quad (7б)$$

Решения Йоста оператора L определяются с использованием асимптотических потенциалов $U_{\pm, \text{as}}(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\lambda L_1 + \lambda^{-1} L_{-1})$, которые могут быть приведены к диагональному виду, $g_0^{-1} U_{\pm, \text{as}}(\lambda) g_0 = J(\lambda)$, для обоих случаев граничных условий: имеем соответственно для (7a) и (7б)

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad J(\lambda) = (\lambda - \lambda^{-1}) \text{diag}(1, 0, -1),$$

и

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J(\lambda) = (\lambda + \lambda^{-1}) \text{diag}(1, 0, -1).$$

Непрерывный спектр оператора L для случая (7a) заполняет действительную ось $\mathbb{R}$, в то время как в случае (7б) он является объединением действительной оси и единичной окружности (см. рисунок).

В работе [21] мы построили фундаментальные аналитические решения (ФАР) для L в обоих случаях. Опуская подробности, мы лишь заметим, что эти ФАР могут рассматриваться как решения задач Римана–Гильберта (ЗРГ):

Решения Йоста оператора L и соответствующая им матрица рассеяния $T(\lambda)$ определяются следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi_{\pm}(x, \lambda) e^{-iJ(\lambda)x} g_0^{-1} = \mathbb{1}, \quad T(\lambda) = \psi_+^{-1}(x, \lambda) \psi_-(x, \lambda).$$

Для случая (7a) ФАР $\chi^{\pm}$ являются решениями следующей ЗРГ:

$$\chi^+(x, \lambda) = \chi^-(x, \lambda) G(\lambda), \quad G(\lambda) = [S^-(\lambda)]^{-1} S^+(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Они удовлетворяют соотношениям симметрии, на которые наложены редукции

$$\begin{aligned} (\chi^+)^{\dagger}(x, \lambda^*) &= \chi^-(x, \lambda), \\ J_1 \chi^+(x, -\lambda) J_1 &= \chi^-(x, \lambda), \quad J_2 \chi^{\pm}(x, \lambda^{-1}) J_2 = \chi^{\pm}(x, \lambda). \end{aligned}$$

В случае (76) мы имеем четыре ФАР $\chi^{(j)}(x, \lambda)$, аналитические в областях Ω_j (см. рисунок), которые удовлетворяют следующей ЗРГ на контуре, показанном на рисунке:

$$\begin{aligned} \chi^{(1)}(x, \lambda) &= \chi^{(2)}(x, \lambda)(\lambda), & \lambda &\in [-1, 1], \\ \chi^{(4)}(x, \lambda) &= \chi^{(3)}(x, \lambda)G(\lambda), & \lambda &\in (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \\ \chi^{(1)}(x, \lambda) &= \chi^{(3)}(x, \lambda)G(\lambda), & \lambda &= e^{i\varphi}, \quad \varphi \in (0, \pi), \\ \chi^{(4)}(x, \lambda) &= \chi^{(2)}(x, \lambda)G(\lambda), & \lambda &= e^{i\varphi}, \quad \varphi \in (\pi, 2\pi), \end{aligned}$$

где $G(\lambda) = (S^-(\lambda))^{-1}S^+(\lambda)$ – сшивающая функция. ФАР подчиняются следующим соотношениям симметрии:

$$\begin{aligned} [\chi^{(1)}(x, \lambda^*)]^{\dagger} &= [\chi^{(2)}(x, \lambda)]^{-1}, & [\chi^{(4)}(x, \lambda^*)]^{\dagger} &= [\chi^{(3)}(x, \lambda)]^{-1}, \\ J_1 \chi^{(1)}(x, -\lambda) J_1 &= \chi^{(2)}(x, \lambda), & J_1 \chi^{(4)}(x, -\lambda) J_1 &= \chi^{(3)}(x, \lambda), \\ J_2 \chi^{(1)}(x, \lambda^{-1}) J_2 &= \chi^{(4)}(x, \lambda), & J_2 \chi^{(2)}(x, \lambda^{-1}) J_2 &= \chi^{(3)}(x, \lambda). \end{aligned} \quad (8)$$

3. РЕКУРСИОННЫЙ ОПЕРАТОР

Этот раздел посвящен построению рекурсионного оператора для НЭУ (3). Мы используем метод ГКС, предложенный в работе [17]. Мы рассматриваем рекурсионный оператор как псевдодифференциальный оператор, который отображает симметрию НЭУ в другую симметрию. Основополагающая идея метода ГКС заключается в том, чтобы установить взаимосвязь между двумя ближайшими потоками $\tilde{A}$ и A с эволюционными переменными τ и t соответственно с помощью равенства [17], [23]

$$\tilde{V} = (\lambda^2 + \lambda^{-2})V + B. \quad (9)$$

Матричнозначные функции $\tilde{V}$ и V задают вторые операторы $\tilde{A}$ и A пары Лакса следующим образом:

$$\tilde{A} = i\partial_{\tau} + \tilde{V}(x, t, \lambda), \quad A = i\partial_t + V(x, t, \lambda).$$

Все приведенные выше величины должны быть инвариантны относительно действия $\mathbb{Z}_2$ -редукций (5) и (6). Это объясняет выбор коэффициента $\lambda^2 + \lambda^{-2}$ перед V в соотношении (9), которое является инвариантным относительно замен $\lambda \rightarrow -\lambda$ и $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$. Матрица B выбирается как рациональная функция переменной λ :

$$B = B_0 + \lambda B_1 + \frac{1}{\lambda} B_{-1} + \lambda^2 B_2 + \frac{1}{\lambda^2} B_{-2},$$

где $B_{-k} = J_2 B_k J_2$, $k = 1, 2$. Матрицы, входящие в B , являются эрмитовыми и имеют блочную структуру:

$$B_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^* & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 \equiv \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad D \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \delta \end{pmatrix}.$$

В начале нашего рассмотрения заметим, что условие нулевой кривизны операторов Лакса L и A можно записать следующим образом:

$$iL_t = [L, V], \quad (10)$$

где $L_t = \lambda L_{1,t} + \lambda^{-1} L_{-1,t}$. После подстановки (9) в равенство, аналогичное (10), в котором эволюционный параметр t заменяется на τ , мы получаем следующее основное уравнение:

$$iL_\tau = i\left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right)L_t + [L, B]. \quad (11)$$

Тогда рекурсионный оператор $\mathcal{R}$ может быть найден из соотношения

$$\begin{pmatrix} u \\ u^* \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} u \\ u^* \end{pmatrix}_t.$$

Так как все матрицы являются бесследовыми, мы имеем $d = -\text{tr } D = -(\alpha + \delta)$. Сравнивая коэффициенты перед разными степенями переменной λ , мы разбиваем уравнение (11) на следующие:

$$iL_{1,t} + [L_1, B_2] = 0 \quad \Rightarrow \quad iu_t + (D^* - d)u = 0, \quad (12)$$

$$iB_{2,x} + [L_1, B_1] = 0 \quad \Rightarrow \quad iD_x + u^* c^T - c^* u^T = 0, \quad id_x + u^T c^* - cu^* = 0, \quad (13)$$

$$iL_{1,\tau} = iL_{-1,t} + iB_{1,x} + [L_1, B_0] + [L_{-1}, B_2], \quad (14)$$

$$iB_{0,x} + [L_1, B_{-1}] + [L_{-1}, B_1] = 0. \quad (15)$$

Остальные соотношения могут быть получены из приведенных выше с помощью умножения каждой величины на J_2 слева и справа.

Система (12) является линейной относительно элементов матрицы D . Ее решение записывается в виде

$$\begin{aligned} \alpha &= i(uu_t^* + v^*v_t) - d(2|v|^2 - |u|^2), \\ \beta &= i(vu_t^* - u^*v_t) + 3du^*v, \\ \delta &= -i(uu_t^* + v^*v_t) - d(2|u|^2 - |v|^2). \end{aligned}$$

Соотношение

$$\alpha_x |v|^2 + \delta_x |u|^2 - \beta_x uv^* - \beta_x^* u^* v = 0 \quad (16)$$

является условием разрешимости этой системы. Можно удостовериться в том, что

$$c = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} u(\delta_x - \alpha_x) - 2v\beta_x^* \\ -v(\delta_x - \alpha_x) - 2u\beta_x \end{pmatrix} + \varkappa \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

является общим решением, где $\varkappa$ – произвольная действительная функция, которую следует найти. Решение может быть записано в следующем матричном виде:

$$\begin{pmatrix} c \\ s \\ c^* \\ s^* \end{pmatrix}_x = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^* \\ (\alpha - \delta)/2 \\ (\alpha + \delta)/2 \end{pmatrix} + \varkappa_x \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^* \\ v^* \end{pmatrix} + \varkappa \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^* \\ v^* \end{pmatrix}_x,$$

$$\mathcal{A} := i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} 0 & -v & -u & 0 \\ -u & 0 & v & 0 \\ v^* & 0 & u^* & 0 \\ 0 & u^* & -v^* & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx}.$$

Наш следующий шаг заключается в том, что мы ищем функцию d , входящую в выражения для α , β и δ . Для этого воспользуемся условием (16), которое приводит к линейному дифференциальному уравнению для d :

$$2d_x - i(u^*u_t + v^*v_t)_x + i[(uu_t^* + v^*v_t)(|v|^2 - |u|^2)_x + (uv_t^* - v^*u_t)(u^*v)_x - (u^*v_t - v^*u_t)(uv^*)_x] = 0.$$

После некоторых простых преобразований мы получаем

$$d = \frac{i}{2}(uu_t^* + vv_t^*) - \frac{i}{2}\partial_x^{-1}(u_tu_x^* + v_tv_x^* - u_t^*u_x - v_t^*v_x), \quad (17)$$

где $\partial_x^{-1}(\cdot) := \int_{\pm\infty}^x (\cdot) dy$.

Из уравнения (15) непосредственно следует, что выполняется следующее равенство:

$$iB_{0,x} = 2 \operatorname{diag}(uc^* - u^*c + v^*s - vs^*, u^*c - uc^*, vs^* - v^*s).$$

Учитывая формулы (13), мы выводим, что $B_0 = \operatorname{diag}(\alpha - \delta, -\alpha, \delta)$. Более того, принимая во внимание структуру уравнения (14), можно легко увидеть, что оператор $\mathcal{R}$ представим в следующем виде: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{D}$, где

$$\mathcal{R}_0 = \pi \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\text{loc}} + \mathcal{B}_{\text{nonl}}) + \mathcal{K},$$

$$\mathcal{B}_{\text{loc}} = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 0 & -4u^* & 2v(3|v|^2 - 1) & -6u^*v^2 \\ 2v^*(1 - 3|v|^2) & 6u(v^*)^2 & 0 & 4u \\ -4u^* & 0 & 3u(|v|^2 - |u|^2) & -v(1 + 6|u|^2) \\ -u^* & -v^* & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_{\text{nonl}} = -\frac{3i}{4} \begin{pmatrix} 2u^*v \\ 2uv^* \\ |u|^2 - |v|^2 \\ -1/3 \end{pmatrix} \partial_x^{-1}[(u_x^*, v_x^*, -u_x, -v_x)],$$

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^* \\ v^* \end{pmatrix}_x \partial_x^{-1}[(u^*, v^*, u, v)\mathcal{A}(\mathcal{B}_{\text{loc}} + \mathcal{B}_{\text{nonl}})],$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 - |u|^2/2 & -uv^*/2 & -u^2/2 & -uv/2 \\ -u^*v/2 & 1 - |v|^2/2 & -uv/2 & -v^2/2 \\ -(u^*)^2/2 & -u^*v^*/2 & 1 - |u|^2/2 & -u^*v/2 \\ -u^*v^*/2 & -(v^*)^2/2 & -uv^*/2 & 1 - |v|^2/2 \end{pmatrix}.$$

Второй оператор $\mathcal{D}$ получается из первого и последних двух членов в [14]:

$$\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2(\mathcal{B}_{\text{loc}} + \mathcal{B}_{\text{nonl}}) + \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^* \\ v^* \end{pmatrix}_x \partial_x^{-1}[(u^*, v^*, u, v)],$$

где

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} -|v|^2 & 0 & u^2 & 0 \\ 0 & |u|^2 & 0 & -v^2 \\ u^{*,2} & 0 & -|v|^2 & 0 \\ o & -v^{*,2} & 0 & |u|^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} u^2 v^* & v|v|^2 & -7u & -5u \\ -u|u|^2 & u^* v^2 & -7v & 5v \\ -v^* |v|^2 & (u^*)^2 v & 7u^* & 5u^* \\ -u(v^*)^2 & u^* |u|^2 & 7v & -5v \end{pmatrix}.$$

Фактически $\mathcal{R}_0$ представляет собой рекурсионный оператор полиномиального пучка [22]:

$$L := i\partial_x + \lambda L_1, \quad A := i\partial_t + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2.$$

4. РЕКУРСИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И “КВАДРАТЫ РЕШЕНИЙ”

Этот подход базируется на соотношениях Вронского, отображающих потенциал оператора Лакса L в данные рассеяния, что позволяет ввести “квадраты решений” для оператора L (см., например, работу [4] и приведенные в ней ссылки).

Соотношения Вронского, выведенные в работе [21], принимают вид

$$\begin{aligned} \langle i\chi^{-1}J_0\chi(x, \lambda) - iJ_0, E_\alpha \rangle \Big|_{x=-\infty}^\infty &= \int_{-\infty}^\infty dx \langle [L_1, J_0], \Phi_1(x, \lambda) \rangle, \\ \langle \chi^{-1}\delta\chi(x, \lambda), E_\alpha \rangle \Big|_{x=-\infty}^\infty &= - \int_{-\infty}^\infty dx \langle \delta L_1, \Phi_1(x, \lambda) \rangle, \end{aligned} \quad (18)$$

где мы ввели квадраты решений

$$\Phi_1(x, \lambda) = \lambda e_\alpha(x, \lambda) + \lambda^{-1} \varphi_0(e_\alpha)(x, \lambda)$$

и

$$e_\alpha(x, \lambda) = \chi E_\alpha \chi^{-1}(x, \lambda),$$

а E_α является одним из генераторов Картана–Вейля.

В рамках подхода из работ [4], [6] подбираются определенные “проекции” “квадратов решений” $K_{1;\alpha}^{\pm, \pm}(x, \lambda)$ (см. уравнения (21) ниже), которые вносят вклад в правые части равенств (18). После этого рекурсионные операторы могут быть введены как операторы, которые имеют $K_{1;\alpha}^{\pm, \pm}(x, \lambda)$ в качестве собственных функций.

Введем матрицы

$$J_1 = \text{diag}(1, -1, -1), \quad K_1 = \text{diag}(1, 0, -1), \quad K_0 = \text{diag}(1, -1, 1)$$

и функции

$$\Phi_{k;\alpha}^{\pm}(x, \lambda) = \lambda^k e_{\alpha}^{\pm}(x, \lambda) + \lambda^{-k} \varphi_0(e_{\alpha}^{\pm}(x, \lambda)),$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Phi_{k;\alpha}}{\partial x} + [L_1, \Phi_{k+1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)] + [L_{-1}, \Phi_{k-1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)] &= 0, \\ \varphi_0(\Phi_{k;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)) &= \Phi_{-k;\alpha}^{\pm}(x, \lambda), \quad \varphi_0(\Phi_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)) = \Phi_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda), \\ i \frac{\partial \Phi_{0;\alpha}}{\partial x} + (\mathbb{1} + \varphi_0)[L_1, \Phi_{1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)] &= 0. \end{aligned}$$

Кроме того, мы имеем

$$(\lambda + \lambda^{-1})\Phi_{k;\alpha}^{\pm}(x, \lambda) = \Phi_{k+1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda) + \Phi_{k-1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda).$$

В дальнейшем мы воспользуемся только уравнениями для $\Phi_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)$ и $\Phi_{1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)$:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Phi_{0;\alpha}}{\partial x} + (\mathbb{1} + \varphi_0)[L_1, \Phi_{1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)] &= 0, \\ i \frac{\partial \Phi_{1;\alpha}}{\partial x} - [L_1 - L_{-1}, \Phi_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)] &= -(\lambda + \lambda^{-1})[L_1, \Phi_{1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)]. \end{aligned}$$

Далее, введем разбиения

$$\Phi_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda) = H_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda) + K_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda), \quad \Phi_{1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda) = H_{1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda) + K_{1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda), \quad (19)$$

где

$$H_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda) = \varphi_0(H_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)), \quad K_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda) = \varphi_0(K_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)),$$

и получим уравнения

$$\begin{aligned} i \frac{\partial H_{0;\alpha}^{\pm}}{\partial x} + (\mathbb{1} + \varphi_0)[L_1, K_{1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)] &= 0, \\ i \frac{\partial K_{0;\alpha}^{\pm}}{\partial x} + (\mathbb{1} + \varphi_0)[L_1, H_{1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)] &= 0, \\ i \frac{\partial H_{1;\alpha}^{\pm}}{\partial x} - [L_1 - L_{-1}, K_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)] &= -(\lambda + \lambda^{-1})[L_1, K_{1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)], \\ i \frac{\partial K_{1;\alpha}^{\pm}}{\partial x} - [L_1 - L_{-1}, H_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)] &= -(\lambda + \lambda^{-1})[L_1, H_{1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Интегрирование первых двух уравнений дает

$$\begin{aligned} H_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda) &= h_{00;\alpha}^{\pm} + i(\mathbb{1} + \varphi_0)\partial_x^{-1}[L_1, K_{1;\alpha}^{\pm, \perp}(x, \lambda)], \\ K_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda) &= k_{00;\alpha}^{\pm} + i(\mathbb{1} + \varphi_0)\partial_x^{-1}[L_1, H_{1;\alpha}^{\pm, \perp}(x, \lambda)], \end{aligned}$$

где $h_{00;\alpha}^{\pm}$ и $k_{00;\alpha}^{\pm}$ являются матричнозначными константами. Таким образом, мы выразили $K_{0;\alpha}^{\pm}$ и $H_{0;\alpha}^{\pm}$ через $K_{1;\alpha}^{\pm,\perp}$ и $H_{1;\alpha}^{\pm,\perp}$, где

$$\begin{aligned} H_{1;\alpha}^{\pm,\perp}(x, \lambda) &= H_{1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda) - \frac{3}{2}L_2\langle H_{1;\alpha}^{\pm}, L_2 \rangle, \\ K_{1;\alpha}^{\pm,\perp}(x, \lambda) &= K_{1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda) - \frac{1}{2}L_1\langle K_{1;\alpha}^{\pm}, L_1 \rangle \end{aligned} \quad (21)$$

и $L_2 = l_1^2 - (2/3)\mathbb{1}$. Теперь мы выведем уравнения для $K_{1;\alpha}^{\pm,\perp}$ и $H_{1;\alpha}^{\pm,\perp}$. Для этого мы подставим выражения (21) в два последних уравнения в (20). Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} i\frac{\partial H_{1;\alpha}^{\pm,\perp}}{\partial x} + \frac{3i}{2}L_{2,x}\langle H_{1;\alpha}^{\pm}, L_2 \rangle + \frac{3i}{2}L_2\frac{\partial \langle H_{1;\alpha}^{\pm}, L_2 \rangle}{\partial x} - [L_1 - L_{-1}, K_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)] &= \\ = -(\lambda + \lambda^{-1})[L_1, K_{1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)], \\ i\frac{\partial K_{1;\alpha}^{\pm,\perp}}{\partial x} + \frac{i}{2}L_{1,x}\langle K_{1;\alpha}^{\pm}, L_1 \rangle + \frac{i}{2}L_1\frac{\partial \langle K_{1;\alpha}^{\pm}, L_1 \rangle}{\partial x} - [L_1 - L_{-1}, H_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)] &= \\ = -(\lambda + \lambda^{-1})[L_1, H_{1;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)]. \end{aligned} \quad (22)$$

Разобьем левые части этих уравнений на слагаемые, коммутирующие с операторами L_1 и L_2 , и слагаемые, “ортогональные” им. Чтобы найти коэффициенты $\langle H_{1;\alpha}^{\pm}, L_2 \rangle$ и $\langle K_{1;\alpha}^{\pm}, L_1 \rangle$, мы умножим обе части первого и второго из уравнений (22) на L_2 и соответственно на L_1 , после чего вычислим след. В результате получаем

$$\begin{aligned} i\left\langle \frac{\partial H_{1;\alpha}^{\pm,\perp}}{\partial x}, L_2 \right\rangle + i\frac{\partial \langle H_{1;\alpha}^{\pm}, L_2 \rangle}{\partial x} - \langle [L_1 - L_{-1}, K_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)], L_2 \rangle &= 0, \\ i\left\langle \frac{\partial K_{1;\alpha}^{\pm,\perp}}{\partial x}, L_1 \right\rangle + i\frac{\partial \langle K_{1;\alpha}^{\pm}, L_1 \rangle}{\partial x} - \langle [L_1 - L_{-1}, H_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)], L_1 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения, имеем

$$\begin{aligned} \langle H_{1;\alpha}^{\pm}, L_2 \rangle &= h_{01;\alpha}^{\pm} - \partial_x^{-1} \left\langle \frac{\partial H_{1;\alpha}^{\pm,\perp}}{\partial x}, L_2 \right\rangle - i\partial_x^{-1} \langle [L_1 - L_{-1}, K_{0;\alpha}^{\pm}(x, \lambda)], L_2 \rangle, \\ \langle K_{1;\alpha}^{\pm}, L_1 \rangle &= k_{01;\alpha}^{\pm} - \partial_x^{-1} \left\langle \frac{\partial K_{1;\alpha}^{\pm,\perp}}{\partial x}, L_1 \right\rangle, \end{aligned}$$

где $k_{01;\alpha}^{\pm}$ и $h_{01;\alpha}^{\pm}$ являются матричнозначными константами интегрирования.

Опуская подробности, мы получаем

$$\begin{aligned} \Lambda_1 K_{1;\alpha}^{\pm,\perp} &= (\lambda + \lambda^{-1})H_{1;\alpha}^{\pm,\perp} - \\ &\quad - \text{ad}_{L_1}^{-1} \left([L_1 - L_{-1}, h_{00}] + \frac{3}{2}L_{2,x}\partial_x^{-1} \langle [L_1, L_{-1}], k_{00} \rangle \right), \\ \Lambda_2 H_{1;\alpha}^{\pm,\perp} &= (\lambda + \lambda^{-1})K_{1;\alpha}^{\pm,\perp} + \\ &\quad + \frac{3}{2} \text{ad}_{L_1}^{-1} (L_{2,x}h_{01} + iL_{2,x}\partial_x^{-1} \langle [L_2, L_{-1}], k_{00} \rangle) - \text{ad}_{L_1}^{-1} ([L_1 - L_{-1}, k_{00}]), \end{aligned}$$

где h_{00} и k_{00} – произвольные матричнозначные константы, которые мы будем полагать равными нулю. Операторы Λ_j , $j = 1, 2$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 K_{1;\alpha}^{\pm,\perp} &= -i \operatorname{ad}_{L_1}^{-1} \left(\frac{\partial K_{1;\alpha}^{\pm,\perp}}{\partial x} - (\mathbb{1} - \varphi_0)[L_1 - L_{-1}, \partial_x^{-1}[L_1, K_{1;\alpha}^{\pm,\perp}]] \right) + \\ &\quad + \frac{i}{2} \operatorname{ad}_{L_1}^{-1} L_{1,x} \partial_x^{-1} \left\langle \frac{\partial K_{1;\alpha}^{\pm,\perp}}{\partial x}, L_1 \right\rangle, \\ \Lambda_2 H_{1;\alpha}^{\pm,\perp} &= -i \operatorname{ad}_{L_1}^{-1} \left(\frac{\partial H_{1;\alpha}^{\pm,\perp}}{\partial x} - (\mathbb{1} - \varphi_0)[L_1 - L_{-1}, \partial_x^{-1}[L_1, H_{1;\alpha}^{\pm,\perp}]] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} L_{2,x} \partial_x^{-1} \left(\left\langle \frac{\partial H_{1;\alpha}^{\pm,\perp}}{\partial x}, L_2 \right\rangle + \langle [L_2 - L_{-2}, L_1 - L_{-1}], \partial_x^{-1}[L_1, H_{1;\alpha}^{\pm,\perp}] \rangle \right) \right).\end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем

$$\Lambda_2 \Lambda_1 K_{1;\alpha}^{\pm,\perp} = (\lambda + \lambda^{-1})^2 K_{1;\alpha}^{\pm,\perp}, \quad \Lambda_1 \Lambda_2 H_{1;\alpha}^{\pm,\perp} = (\lambda + \lambda^{-1})^2 H_{1;\alpha}^{\pm,\perp}.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили рекурсионные операторы Λ для системы (3), связанной с симметричным пространством $SU(3)/S(U(1) \times U(2))$ с дополнительной $\mathbb{Z}_2$ -редукцией. Первый способ построения Λ опирается на метод ГКС [17], а другой заключается в использовании соотношений Вронского. Они позволяют определить “квадраты решений” оператора L , которые рассматриваются как собственные функции рекурсионного оператора Λ . Наши результаты можно распространить на операторы L , связанные с общим симметричным пространством типа **A.III** $\cong SU(n+k)/S(U(n) \times U(k))$ и с другими типами симметричных пространств.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы приводим некоторые промежуточные результаты, используемые в разделе 4. Инволюции J индуцируют $\mathbb{Z}_2$ -градуировку в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ следующим образом: $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{g}^{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{(1)}$, где

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{(0)} &\equiv \{Y : Y = JYJ^{-1}\}, & \mathfrak{g}^{(1)} &\equiv \{X : X = -JXJ^{-1}\}, \\ Y &= \begin{pmatrix} -k-n & 0 & 0 \\ 0 & k & m \\ 0 & m^* & n \end{pmatrix}, & X &= \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a^* & 0 & 0 \\ b^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Внутренний автоморфизм φ_0 в формуле для “уточненных квадратов решений” (19) может быть представлен в виде $\varphi_0(Z) \equiv K_0 Z K_0^{-1}$, где

$$\begin{aligned}Y &= Y^+ + Y^-, & Y^+ &= \begin{pmatrix} -k-n & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}, & Y^- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & m^* & 0 \end{pmatrix}, \\ X &= X^+ + X^-, & X^+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, & X^- &= \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Учтем, что $\varphi_0(H_0) = H_0$ и $\varphi_0(K_0) = K_0$, следовательно,

$$\begin{aligned}\langle [L_1 - L_{-1}, K_{0;\alpha}^\pm(x, \lambda)], L_2 \rangle &= 2|u|^2(\kappa_{0;\alpha}^\pm v^* - \kappa_{0;\alpha}^{\pm,*} v), \\ \langle [L_1 - L_{-1}, H_{0;\alpha}^\pm(x, \lambda)], L_1 \rangle &= 0,\end{aligned}$$

где

$$K_{0;\alpha}^\pm = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa_{0;\alpha}^\pm \\ 0 & 0 & 0 \\ \kappa_{0;\alpha}^{\pm,*} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_{0;\alpha}^\pm = \begin{pmatrix} -k_{0;\alpha}^\pm - n_{0;\alpha}^\pm & 0 & 0 \\ 0 & k_{0;\alpha}^\pm & 0 \\ 0 & 0 & n_{0;\alpha}^\pm \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения

$$K_{1;\alpha}^\pm = \begin{pmatrix} 0 & w_{1;\alpha}^\pm & z_{1;\alpha}^\pm \\ w_{1;\alpha}^{\pm,*} & 0 & 0 \\ z_{1;\alpha}^{\pm,*} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_{1;\alpha}^\pm = \begin{pmatrix} -k_{1;\alpha}^\pm - n_{1;\alpha}^\pm & 0 & 0 \\ 0 & k_{1;\alpha}^\pm & m_{1;\alpha}^\pm \\ 0 & m_{1;\alpha}^{\pm,*} & n_{1;\alpha}^\pm \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\langle H_{1;\alpha}^\pm, L_2 \rangle &= h_{01;\alpha}^\pm - \partial_x^{-1} \left\langle \frac{\partial H_{1;\alpha}^{\pm,\perp}}{\partial x}, L_2 \right\rangle - 2i\partial_x^{-1}|u|^2(v^* k_{00;\alpha}^\pm - v k_{00;\alpha}^{\pm,*}) + \\ &\quad + 8\partial_x^{-1}|u|^2(v^* \partial_x^{-1}(u m_{1;\alpha}^\pm) + v \partial_x^{-1}(u^* m_{1;\alpha}^{\pm,*})), \\ \langle K_{1;\alpha}^\pm, L_1 \rangle &= k_{01;\alpha}^\pm - \partial_x^{-1} \left\langle \frac{\partial K_{1;\alpha}^{\pm,\perp}}{\partial x}, L_1 \right\rangle.\end{aligned}$$

Благодарности. Авторы благодарят Royal Society и Bulgarian Academy of Sciences за поддержку в рамках совместного исследовательского проекта “Reductions of Nonlinear Evolution Equations and Analytical Spectral Theory”. В.С. Герджиков и Г.Г. Граховский также благодарны организаторам конференции “Нелинейная физика: теория и эксперимент. VI” за финансовую поддержку и теплый прием в Галлиполи. Работа Г.Г. Граховского была поддержана Science Foundation of Ireland (грант № 09/RFP/MTH2144).

Список литературы

- [1] В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, “Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза”, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж., **24**, ред. Р. В. Гамкрелидзе, ВИНТИ, М., 1984, 81–180.
- [2] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [3] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [4] V. S. Gerdjikov, G. Vilasi, A. B. Yanovski, *Integrable Hamiltonian Hierarchies. Spectral and Geometric Methods*, Lecture Notes in Phys., **748**, Springer, Berlin, 2008.
- [5] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Stud. Appl. Math.*, **53**:4 (1974), 249–315.
- [6] D. J. Kaup, A. C. Newell, *J. Math. Phys.*, **19**:4 (1978), 798–801.
- [7] V. S. Gerdjikov, E. H. Hristov, *Bulgar. J. Phys.*, **7**:2 (1980), 119–133.
- [8] V. S. Gerdjikov, M. I. Ivanov, *Bulgar. J. Phys.*, **10**:2 (1983), 130–143.
- [9] А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ*, **30**:7 (1979), 443–448.

- [10] А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ*, **32**:2 (1980), 187–192.
- [11] A. V. Mikhailov, *Physica D*, **3**:1–2 (1981), 73–117.
- [12] A. V. Mikhailov, *Phys. Lett. A*, **92**:2 (1982), 51–55.
- [13] A. V. Mikhailov, M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Comm. Math. Phys.*, **79**:4 (1981), 473–488.
- [14] S. Lombardo, J. A. Sanders, *Comm. Math. Phys.*, **299**:3 (2010), 793–824, arXiv:0912.1697.
- [15] S. Lombardo, A. V. Mikhailov, *J. Phys. A*, **37**:31 (2004), 7727–7742, arXiv:nlin/0404013.
- [16] S. Lombardo, A. Mikhailov, *Comm. Math. Phys.*, **258**:1 (2005), 179–202, arXiv:math-ph/0407048.
- [17] M. Gürses, A. Karasu, V. V. Sokolov, *J. Math. Phys.*, **40**:12 (1999), 6473–6490, arXiv:solv-int/9909003.
- [18] И. Ц. Голубчик, В. В. Соколов, *ТМФ*, **124**:1 (2000), 62–71.
- [19] В. Е. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *ТМФ*, **125**:3 (2000), 355–424.
- [20] A. V. Mikhailov, V. V. Sokolov, “Symmetries of differential equations and the problem of integrability”, *Integrability*, Lecture Notes in Phys., **767**, ed. A. V. Mikhailov, Springer, Berlin, 2009, 19–88.
- [21] V. Gerdjikov, A. V. Mikhailov, T. I. Valchev, *J. Phys. A*, **43**:43 (2010), 434015, 13 pp.
- [22] V. S. Gerdjikov, A. V. Mikhailov, T. I. Valchev, *J. Geom. Symmetry Phys.*, **20** (2010), 1–34.
- [23] J. P. Wang, *J. Math. Phys.*, **50**:2 (2009), 023506, 25 pp., arXiv:0809.3899.
- [24] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Pure Appl. Math., **80**, Academic Press, New York, 1978.