Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Суханов, Обобщенное соотношение неопределенностей энергия–время,
ТМФ, 2000, том 125, номер 2, 221–241

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf665>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:56:06

ОБОБЩЕННОЕ СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ЭНЕРГИЯ–ВРЕМЯ

Исходя из универсальных соотношений неопределенностей Шредингера для произвольных наблюдаемых предложено обобщение понятия неопределенности времени, введенного ранее Мандельштамом и Таммом, которое инвариантно по отношению к выбору наблюдаемых и не содержит сингулярности. Показано, что в случае когерентных состояний введенную величину можно интерпретировать как флуктуацию обратной эффективной частоты микросистемы относительно ее среднего значения. Это позволяет трактовать обобщенное соотношение неопределенностей энергия–время аналогично соотношению неопределенностей энергия–обратная температура в статистической термодинамике.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Первоначально соотношения неопределенностей (СН) вида

$$\delta p \cdot \delta q \gtrsim \hbar, \quad (1)$$

$$\delta \varepsilon \cdot \delta t \gtrsim \hbar \quad (2)$$

появились в квантовой физике [1; 2, с. 30–53] как тривиальные следствия аналогичных соотношений между эффективными ширинами носителей функций и их фурье-образов из классического фурье-анализа [3]. В дальнейшем СН вида (1) было обобщено на любые наблюдаемые B и A и приняло вид [4, 5]

$$\Delta B \cdot \Delta A \geq c_{AB} \equiv \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|, \quad (3)$$

где ΔB и ΔA – флуктуации (средние квадратичные отклонения) величин B и A , которым сопоставляются эрмитовы операторы $\hat{B}$ и $\hat{A}$, а c_{AB} – половина среднего модуля коммутатора этих операторов (в частном случае, если $\hat{B} = \hat{p}$ и $\hat{A} = \hat{q}$, то $c_{AB} = c_{pq} = \hbar/2$).

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: ogol@oldi.ru

Формулу (3) принято называть СН Гейзенберга. Входящие в него величины, в отличие от величин в (1), имеют строгий математический смысл. Общепринятая физическая трактовка СН вида (3) соответствует, как известно, традиционной интерпретации квантовой динамики [6].

Ничего подобного нельзя сказать о СН энергия–время. Хотя формулы вида (2) в той или иной мере используются в квантовой динамике с конца 20-х годов, вопрос о математическом смысле и физической трактовке входящих в них величин в общем случае остается открытым. До сих пор поиски ответа на него ведутся в двух направлениях. На первом пути предпринимаются усилия сопоставить времени разумный с физической точки зрения эрмитов оператор и тем самым поднять статус времени до статуса наблюдаемых в квантовой физике. При этом предполагается придать величинам, входящим в СН (2), математический смысл и физическую трактовку, аналогичные тем, которые имеют место для величин в СН (3) для произвольных наблюдаемых B и A . Соответствующие попытки пока не увенчались успехом [5].

На втором пути предлагается в условиях отсутствия оператора времени придать сколько-нибудь разумный смысл понятию *неопределенности времени*, формально не выходя за рамки квантовой физики и сохраняя, в частности, операторное описание для энергии. Наиболее успешная попытка такого рода была предпринята Мандельштамом и Таммом [7]. Эта попытка оказалась достаточно плодотворной, и сегодня понятие неопределенности времени Мандельштама–Тамма получило наибольшее распространение в современных учебниках и монографиях по квантовой механике [6, 8]. Напомним, что введение этого понятия основано на следующей процедуре. Исходным является СН (3) для произвольной наблюдаемой A , описываемой эрмитовым оператором $\hat{A}$, и энергии микросистемы ε , описываемой гамильтонианом $\hat{H}$:

$$\Delta\varepsilon \cdot \Delta A \geq c_{AH} \equiv \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle \right|, \quad (4)$$

где $\Delta\varepsilon$ и ΔA – флуктуации величин ε и A . Коммутатор в правой части соотношения (4) можно заменить, воспользовавшись уравнением Гейзенберга для оператора $\hat{A}$. Тогда получим

$$\Delta\varepsilon \cdot \Delta A \geq \frac{\hbar}{2} \left| \left\langle \left| \frac{d\hat{A}}{dt} \right| \right\rangle \right|. \quad (5)$$

Следуя Мандельштаму и Тамму, назовем неопределенностью времени величину

$$\Delta t_A \equiv \frac{\Delta A}{\left| \left\langle \left| \frac{d\hat{A}}{dt} \right| \right\rangle \right|}. \quad (6)$$

С физической точки зрения она имеет смысл промежутка времени, в течение которого отклонение величины A от среднего $\bar{A}$ достигает значения ΔA . Тогда после перехода от ΔA к Δt_A СН (6) примет вид, сходный с (2), но содержащий только строго определенные величины:

$$\Delta\varepsilon \cdot \Delta t_A \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (7)$$

Определение Δt_A (6) обладает тем преимуществом, что позволяет ввести разумное понятие неопределенности времени. Вместе с тем ему присущ и ряд существенных недостатков. Во-первых, оно не является однозначным, ибо позволяет для одной и той же микросистемы вводить несколько промежутков времени Δt_{A_i} применительно к разным наблюдаемым A_i . Во-вторых, оно теряет смысл в случае, если при $\Delta \varepsilon \neq 0$ и $\Delta A \neq 0$ либо сам коммутатор $[\hat{A}, \hat{H}]$, либо среднее от него обращаются в нуль.

Для преодоления первого из указанных недостатков предлагались разные решения. Наиболее распространенный подход [6, 8] состоит в том, что за характерный промежуток времени микросистемы в целом предлагается выбирать минимальную из всех возможных величин $(\Delta t_{A_i})_{\min}$. Однако такой выбор является достаточно произвольным, поскольку он существенно зависит от того микросостояния, по которому происходит усреднение в выражении (6).

В другом подходе [5] для придания определению (6) однозначности и универсальности в качестве величины, представляющей микросистему в целом, предлагается выбирать матрицу плотности $\hat{\rho}$. Однако, чтобы избежать последствий второго недостатка, определение (6) в этом случае приходится применять только к нестационарным смешанным состояниям, при которых $d\hat{\rho}/dt \neq 0$. Этим сразу исключаются из рассмотрения как чистые квантовые состояния, так и смешанные состояния равновесной статистической термодинамики, что не может, вообще говоря, нас удовлетворить.

В данной работе мы предлагаем обобщение понятия неопределенности времени, позволяющее избежать перечисленных выше недостатков исходного определения Мандельштама–Тамма. Для когерентных состояний эту неопределенность времени можно интерпретировать как флуктуацию обратной эффективной частоты микросистемы относительно ее среднего значения. Полученное в итоге СН энергия–обратная эффективная частота по физическому смыслу оказывается совершенно аналогичным СН энергия–обратная температура в статистической термодинамике.

2. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ВРЕМЕНИ МАНДЕЛЬШТАМА–ТАММА

Оставаясь в рамках подхода Мандельштама–Тамма к СН энергия–время, мы предлагаем при определении неопределенности времени исходить не из СН Гейзенберга (3), а из *универсального* СН Шредингера, предложенного им еще в 1930 году [9, с. 210–217].

Напомним [10], что для произвольных физических величин, которым сопоставляются эрмитовы операторы $\hat{B}$ и $\hat{A}$, СН Шредингера следует из неравенства Коши–Буняковского–Шварца и имеет вид

$$\Delta B \cdot \Delta A \geq R_{AB}, \quad (8)$$

где ΔB и ΔA – флуктуации физических величин B и A , а

$$\begin{aligned} R_{AB}^2 &\equiv |\langle \Delta A | \Delta B \rangle|^2 = |\langle \Delta \hat{A} \cdot \Delta \hat{B} \rangle|^2 = \\ &= \sigma_{AB}^2 + c_{AB}^2 = \frac{1}{4} \langle \{ \Delta \hat{A}, \Delta \hat{B} \} \rangle^2 + \frac{1}{4} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Второй член в правой части (9) — это обычный вклад коммутатора c_{AB} , входящий и в аналогичное СН Гейзенберга (3), он связан с антиэрмитовой частью произведения эрмитовых операторов $\Delta\hat{A}$ и $\Delta\hat{B}$. Первый член в (9) — это вклад антикоммутатора операторов $\Delta\hat{A}$ и $\Delta\hat{B}$, связанный с эрмитовой частью произведения этих операторов. В пределе $\hbar \rightarrow 0$ второй член в правой части (9) обращается в нуль, тогда как первый член (при наличии статистической зависимости величин B и A) переходит в квадрат коррелятора $\overline{(\Delta B \cdot \Delta A)}$ флуктуаций ΔB и ΔA , известный из классической теории вероятностей [11]. Более того, и при $\hbar \neq 0$ может случиться так, что $\sigma_{AB} \gg c_{AB}$. Тогда правую часть СН (8) определяет вклад антикоммутатора операторов $\Delta\hat{B}$ и $\Delta\hat{A}$. В частности, это имеет место при $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$.

Нетрудно видеть, что величина R_{AB}^2 имеет физический смысл квадрата амплитуды перехода из начального состояния $|\Delta B\rangle$ в конечное состояние $\langle \Delta A|$. Она играет роль *целостной* характеристики *неконтролируемого* воздействия окружения, инвариантной относительно унитарных преобразований в гильбертовом пространстве. Эти ее качества сохраняются и в тех случаях, когда либо при $\hbar \neq 0$ вклад коммутатора c_{AB} равен нулю или пренебрежимо мал, либо при $\hbar \rightarrow 0$ вклад антикоммутатора σ_{AB} отличен от нуля.

Мы будем исходить из СН Шредингера (8), положив в нем $\hat{B} \equiv \hat{H}$. Тогда вместо (8) и (9) получим

$$\Delta\varepsilon \cdot \Delta A \geq R_{AH}, \quad (10)$$

где

$$R_{AH}^2 = \sigma_{AH}^2 + c_{AH}^2 = \frac{1}{4} \langle |\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{H}\}| \rangle^2 + \frac{1}{4} \langle |[\hat{A}, \hat{H}]| \rangle^2. \quad (11)$$

Обобщим теперь формулу Мандельштама–Тамма (6) и определим *обобщенную неопределенность времени* формулой

$$\Delta t_A^* \equiv \frac{\Delta A}{\frac{2}{\hbar} R_{AH}}. \quad (12)$$

Тогда *обобщенное* СН энергия–время (7) примет вид

$$\Delta\varepsilon \cdot \Delta t_A^* \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (13)$$

Ниже нами рассмотрены две достаточно общие модели микросистем, совершающих финитное и инфинитное движения. Их общей особенностью является то, что соответствующие микросистемы находятся в нестационарных состояниях, когда флуктуации энергии системы $\Delta\varepsilon \neq 0$. Мы покажем, что введенное здесь определение Δt_A^* (12), во-первых, однозначно (т.е. не привязано к какой-либо одной наблюдаемой) и, во-вторых, лишено сингулярности при обращении вклада коммутатора c_{AH} в нуль.

3. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВРЕМЕНИ ДЛЯ КВАНТОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В КОГЕРЕНТНОМ СОСТОЯНИИ

В качестве модели финитного движения микросистемы рассмотрим квантовый гармонический осциллятор с частотой $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$, находящийся в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. Напомним [12, 5], что эти состояния являются собственными состояниями оператора уничтожения:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \langle\alpha|\hat{a}^+ = \langle\alpha|\alpha^*, \quad [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1, \quad (14)$$

где α – произвольное комплексное число. Среди других нестационарных состояний когерентные состояния, как известно, выделены тем, что они неортогональны и наиболее близки к классическим состояниям осциллятора.

В данном случае среднее значение энергии и ее флуктуация имеют вид

$$\bar{\varepsilon} \equiv \langle\alpha|\hat{H}|\alpha\rangle = \hbar\omega_0 \left\langle\alpha\left|\left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right|\alpha\right\rangle = \hbar\omega_0 \left(\bar{n} + \frac{1}{2}\right), \quad (15)$$

$$(\Delta\varepsilon)^2 \equiv \langle\alpha|(\Delta\hat{H})^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|(\hat{H}^2 - \bar{\varepsilon}^2)|\alpha\rangle = \hbar^2\omega_0^2\bar{n}, \quad (16)$$

где $\bar{n} = |\alpha|^2$ – среднее число квантов в состоянии $|\alpha\rangle$.

В дальнейшем нам потребуются выражения для флуктуаций координаты q и импульса p в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. Проще всего их вычислить, выразив операторы $\hat{q}$ и $\hat{p}$ через операторы $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$. Тогда [5]

$$\bar{q} = \sqrt{2} l_0 \operatorname{Re} \alpha, \quad (\Delta q)^2 = \frac{1}{2} l_0^2, \quad (17)$$

$$\bar{p} = \sqrt{2} \frac{\hbar}{l_0} \operatorname{Im} \alpha, \quad (\Delta p)^2 = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{l_0^2}, \quad (18)$$

где $l_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$ – амплитуда нулевых колебаний.

Чтобы получить выражения для неопределенностей времени Δt_A и Δt_A^* , вычислим средние от коммутаторов и антикоммутаторов как операторов $\Delta\hat{q} = \hat{q} - \bar{q}$ и $\Delta\hat{H} = \hat{H} - \bar{\varepsilon}$, так и $\Delta p = \hat{p} - \bar{p}$ и $\Delta\hat{H}$. В результате получим

$$c_{qH} = \frac{1}{2} \left| \langle\alpha|[\hat{q}, \hat{H}]|\alpha\rangle \right| = (\sqrt{2})^{-1} l_0 \cdot \hbar\omega_0 \cdot \operatorname{Im} \alpha, \quad (19)$$

$$c_{pH} = \frac{1}{2} \left| \langle\alpha|[\hat{p}, \hat{H}]|\alpha\rangle \right| = (\sqrt{2})^{-1} \frac{\hbar}{l_0} \cdot \hbar\omega_0 \cdot \operatorname{Re} \alpha, \quad (20)$$

где отсутствуют вклады от $\bar{q}$, $\bar{p}$ и $\bar{\varepsilon}$, и

$$\sigma_{qH} = \frac{1}{2} \langle\alpha|\{\Delta\hat{q}, \Delta\hat{H}\}|\alpha\rangle = (\sqrt{2})^{-1} l_0 \cdot \hbar\omega_0 \cdot \operatorname{Re} \alpha, \quad (21)$$

$$\sigma_{pH} = \frac{1}{2} \langle\alpha|\{\Delta\hat{p}, \Delta\hat{H}\}|\alpha\rangle = (\sqrt{2})^{-1} \frac{\hbar}{l_0} \cdot \hbar\omega_0 \cdot \operatorname{Im} \alpha. \quad (22)$$

Значения неопределенностей времени Δt_q и Δt_p согласно исходной процедуре Мандельштама–Тамма, как и следовало ожидать, оказываются различными:

$$\Delta t_q = \frac{\Delta q}{|\langle \alpha | \frac{d\hat{q}}{dt} | \alpha \rangle|} = \frac{1}{2\omega_0 \cdot \text{Im } \alpha}, \quad (23)$$

$$\Delta t_p = \frac{\Delta p}{|\langle \alpha | \frac{d\hat{p}}{dt} | \alpha \rangle|} = \frac{1}{2\omega_0 \cdot \text{Re } \alpha}, \quad (24)$$

что и демонстрирует ее неоднозначность. Поэтому ответ на вопрос о том, какая из величин Δt_q или Δt_p может служить характеристикой неопределенности времени для микросистемы в целом, зависит от выбора конкретного когерентного состояния, фиксируемого комплексным числом α .

В свою очередь, предложенное выше обобщение понятия неопределенности времени Δt_A^* (12) приводит к следующим выражениям:

$$\Delta t_q^* = \frac{\frac{l_0}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} l_0 \omega_0 \{(\text{Re } \alpha)^2 + (\text{Im } \alpha)^2\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\omega_0 \sqrt{\bar{n}}}, \quad (25)$$

$$\Delta t_p^* = \frac{\frac{\hbar}{\sqrt{2} l_0}}{\sqrt{2} \frac{\hbar}{l_0} \omega_0 \{(\text{Im } \alpha)^2 + (\text{Re } \alpha)^2\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\omega_0 \sqrt{\bar{n}}}. \quad (26)$$

Итак, предложенное обобщение понятия неопределенности времени Δt^* является однозначным. В отличие от соотношений (23) и (24) оно зависит от физически разумных величин – частоты ω_0 , фиксированной внешними макроусловиями, и среднего числа квантов $\bar{n}$ в данном когерентном микросостоянии $|\alpha\rangle$.

Наконец, нетрудно убедиться в том, что обобщенное СН энергия–время вида (13) минимизируется когерентными состояниями квантового осциллятора $|\alpha\rangle$. С учетом (16) и (26) имеем

$$\Delta \varepsilon \cdot \Delta t^* = \hbar \omega_0 \sqrt{\bar{n}} \cdot \frac{1}{2\omega_0 \sqrt{\bar{n}}} = \frac{\hbar}{2} \quad (27)$$

независимо от значения $\bar{n}$. Разумеется, полученные в этом разделе результаты можно распространить и на другие микросистемы, если их можно моделировать квантовым осциллятором в когерентном состоянии.

4. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВРЕМЕНИ ДЛЯ СВОБОДНОЙ МИКРОЧАСТИЦЫ В СОСТОЯНИИ ГАУССОВА ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

В качестве модели инфинитного движения рассмотрим одномерное движение со скоростью v_0 свободной микрочастицы с массой m , начальное состояние которой задается в q -представлении гауссовым волновым пакетом ширины $\Delta q(0) = b$. Гауссова форма волнового пакета сохраняется и в p -представлении, поэтому вычисления одинаково просты в обоих представлениях.

Волновая функция микрочастицы в произвольный момент времени в q -представлении имеет вид

$$\psi(q, t) = |\psi(q, t)| \cdot \exp \left\{ \frac{imv_0 q}{\hbar} - \frac{imv_0^2 t}{2\hbar} + \frac{i(q - v_0 t)^2 \cdot \tilde{v} t}{4b(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)} - i\varphi_0(t) \right\}, \quad (28)$$

где

$$|\psi(q, t)| = [2\pi(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)]^{-\frac{1}{4}} \cdot \exp \left\{ -\frac{(q - v_0 t)^2}{4(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)} \right\}, \quad (29)$$

$\varphi_0(t) = (1/2) \arctg(\tilde{v}t/b)$ – несущественная постоянная, а $\tilde{v} = \hbar/(2mb)$ – скорость “расплывания” пакета, происходящего по закону $[\Delta q(t)]^2 = b^2 + \tilde{v}^2 t^2$. Ее значение соответствует минимально возможному значению флуктуации импульса $\Delta p = \hbar/(2\Delta q(0))$, определяемому СН координата–импульс Гейзенберга (3) в начальный момент времени $t = 0$.

Соответственно в p -представлении имеем

$$\psi(p, t) = |\psi(p, t)| \cdot \exp \left\{ -\frac{ip^2 t}{2m\hbar} \right\}, \quad (30)$$

где

$$|\psi(p, t)| = [2\pi m^2 \tilde{v}^2]^{-\frac{1}{4}} \cdot \exp \left\{ -\frac{(p - mv_0)^2}{4m^2 \tilde{v}^2} \right\}. \quad (31)$$

Среднее значение энергии и ее флуктуацию проще вычислить в p -представлении. Тогда

$$\bar{\varepsilon} \equiv \int dp \frac{p^2}{2m} |\psi(p, t)|^2 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{m\tilde{v}^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{\hbar^2}{8mb^2}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} (\Delta\varepsilon)^2 &\equiv \int dp \left[\left(\frac{p^2}{2m} \right)^2 - \bar{\varepsilon}^2 \right] |\psi(p, t)|^2 = \\ &= mv_0^2 \cdot m\tilde{v}^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{v}^2}{v_0^2} \right) = \frac{\hbar^2}{4} \left(\frac{v_0}{b} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{v}^2}{v_0^2} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

В данном случае операторы энергии и проекции импульса коммутируют, так что определение Мандельштама–Тамма неопределенности времени Δt_p (6) некорректно. Поэтому ниже мы будем исходить из определения неопределенности времени Δt_A^* (12), которое по предположению однозначно и не содержит сингулярности.

Для получения Δt_p^* необходимо вычислить $\bar{p}$ и $(\Delta p)^2$, а также среднее от антикоммутатора операторов $\Delta \hat{p}$ и $\Delta \hat{H}$. Используя волновую функцию в p -представлении вида (30), получим

$$\bar{p} = mv_0, \quad (\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4b^2} = (m\tilde{v})^2, \quad (34)$$

$$\sigma_{pH} = \frac{1}{2} \langle |\{\Delta \hat{p}, \Delta \hat{H}\}| \rangle = \int dp \left[\frac{p^3}{2m} - \bar{p} \cdot \bar{\varepsilon} \right] |\psi(p, t)|^2 = (m\tilde{v})^2 v_0. \quad (35)$$

Окончательно величина неопределенности времени Δt_p^* имеет вид

$$\Delta t_p^* = \frac{\Delta p}{\frac{2}{\hbar} R_{pH}} = \frac{m\tilde{v}}{\frac{2}{\hbar} \{\sigma_{pH}^2 + 0\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{m\tilde{v}}{\frac{2}{\hbar} (m\tilde{v})^2 v_0} = \frac{b}{v_0}. \quad (36)$$

Интересно отметить, что ни одна из величин в формуле (36) (и тем самым Δt_p^*) не зависят от времени. Следует также подчеркнуть, что здесь результат определяется вкладом антикоммутатора σ_{pH} , входящего в определение Δt_A^* (12).

Для получения Δt_q^* вычислим $\bar{q}$ и $(\Delta q)^2$, используя волновую функцию в q -представлении вида (28):

$$\bar{q} = v_0 t, \quad (\Delta q)^2 = b^2 + \tilde{v}^2 t^2 = b^2 + \frac{(\Delta p)^2}{m^2} t^2. \quad (37)$$

В свою очередь, средние от коммутатора и антикоммутатора операторов $\Delta \hat{q}$ и $\hat{\Delta H}$ проще вычислить, воспользовавшись p -представлением. В результате получим

$$\begin{aligned} c_{qH} &= \frac{1}{2} \langle |[\hat{q}, \hat{H}]| \rangle = \frac{\hbar}{2m} \bar{p} = \frac{\hbar v_0}{2}, \\ \sigma_{qH} &= \frac{1}{2} \langle |\{\Delta \hat{q}, \hat{\Delta H}\}| \rangle = \frac{1}{2} \langle |\{\hat{q}, \hat{H}\}| \rangle - \bar{q} \cdot \bar{\varepsilon} = \\ &= -\frac{\hbar}{2i} \int dp \psi^*(p, t) \left\{ \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{2m} \psi(p, t) \right] + \frac{p^2}{2m} \frac{\partial \psi(p, t)}{\partial p} \right\} - \bar{q} \cdot \bar{\varepsilon} = \\ &= \frac{v_0 t}{2} (m v_0^2 + 3 m \tilde{v}^2) - v_0 t \cdot \left(\frac{m v_0^2}{2} + \frac{m \tilde{v}^2}{2} \right) = v_0 t \cdot m \tilde{v}^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, для величины неопределенности времени Δt_q^* получим

$$\begin{aligned} \Delta t_q^* &= \frac{\Delta q}{\frac{2}{\hbar} R_{qH}} = \frac{(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{2}{\hbar} \{ (v_0 t)^2 (m \tilde{v}^2)^2 + \frac{\hbar^2 v_0^2}{4} \}^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}{\{ \frac{4}{\hbar^2} m^2 \tilde{v}^2 \cdot \tilde{v}^2 t^2 \cdot v_0^2 + v_0^2 \}^{\frac{1}{2}}} = \frac{(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}{\{ \frac{1}{b^2} \tilde{v}^2 t^2 \cdot v_0^2 + v_0^2 \}^{\frac{1}{2}}} = \frac{b}{v_0}. \end{aligned} \quad (40)$$

В данном случае и числители, и первые слагаемые в знаменателях (40) зависят от времени. Однако величина Δt_q^* в целом от времени не зависит. При $t \neq 0$ существенный вклад в результат дает антикоммутатор σ_{qH} , который при $t \rightarrow \infty$ становится определяющим. В то же время при $t = 0$ этот вклад обращается в нуль и тот же результат для Δt_q^* получается только за счет вклада коммутатора c_{qH} .

Важнейшим итогом проведенных вычислений является то, что обобщенная неопределенность времени Δt_q^* однозначна, фиксирована внешними макроусловиями, не зависит от времени и существенно зависит от суммы вкладов антикоммутатора и коммутатора соответствующих операторов. Тем самым явно продемонстрирована принципиальная важность обобщенного СН энергия–время (13). В связи с этим напомним, что для

осциллятора в когерентном состоянии (см. раздел 3) задача изначально была симметрична по отношению к операторам $\hat{p}$ и $\hat{q}$, поэтому знаменатели в формулах для Δt_p^* и Δt_q^* отличались только взаимными перестановками коммутатора и антикоммутатора. В данном случае это явно не так. Следовательно, утверждение, что и в этой модели введенное выше определение неопределенности времени Δt_A^* (12) дает однозначный результат, выглядит весьма убедительным.

Вернемся теперь к СН энергия–время (13), включающему обобщенную временную характеристику Δt^* . Прежде всего проанализируем полученное выше выражение (32) для средней энергии $\bar{\varepsilon}$. Нетрудно видеть, что эта величина отличается от энергии свободной микрочастицы в состоянии плоской волны де Бройля с постоянной амплитудой $mv_0^2/2$. Выражение (32) содержит вклад, учитывающий характерную ширину пакета при $t = 0$ и практически не отличающийся от энергии микрочастицы в основном состоянии бесконечно глубокой потенциальной ямы $\varepsilon_1 = \pi^2 \hbar^2 / (2mL^2)$, где L – ширина ямы. Тем самым формирование гауссова волнового пакета определенной ширины b с точки зрения внешних макроусловий эквивалентно помещению микрочастицы в своеобразную потенциальную яму заданной ширины $L = 2\pi b$ и бесконечной глубины.

С учетом полученных формул для $\Delta\varepsilon$ и Δt^* обобщенное СН энергия–время (13) принимает вид

$$\Delta\varepsilon \cdot \Delta t^* = \frac{\hbar v_0}{2b} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{v}^2}{v_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{b}{v_0}\right) = \frac{\hbar}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{v}^2}{v_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (41)$$

Отметим, что минимизация этого неравенства достигается лишь для таких состояний, при которых отношение $\tilde{v}/v_0 = \hbar/(2mbv_0)$ стремится к нулю, т.е. в квазиклассическом пределе.

5. ЭФФЕКТИВНАЯ ЧАСТОТА КАК УНИВЕРСАЛЬНАЯ ВРЕМЕННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОТКРЫТОЙ МИКРОСИСТЕМЫ В ЦЕЛОМ

Выше на двух общих моделях открытых микросистем было показано, что предложенное обобщение (12) понятия неопределенности времени лишено недостатков, присущих исходному определению Мандельштама–Тамма (6). Вместе с тем СН энергия–время (13), формально основанное на этом понятии, по-прежнему нуждается в интерпретации.

Во-первых, входящую в СН (13) величину Δt^* нельзя истолковать как “флуктуацию времени”, ибо остается неясным, в каком микросостоянии и относительно какого “среднего времени” микросистемы $\bar{t}$ имеет место подобная флуктуация.

Во-вторых, и это самое главное, правая часть СН (13) только внешне напоминает знакомую правую часть СН Гейзенберга (3) для флуктуаций координаты и импульса. В условиях отсутствия оператора времени СН (13) демонстрирует качественно иной характер корреляции величин $\Delta\varepsilon$ и Δt^* . В самом деле, среди рассмотренных модельных микросостояний нет таких, которые были бы взаимно дополнительны в духе традиционной интерпретации квантовой динамики [6], поскольку вследствие открытости микросистем всегда $\Delta t^* \neq 0$ и $\Delta\varepsilon \neq 0$.

Чтобы продвинуться дальше в интерпретации СН (13), прежде всего было бы желательно отделить вычисление среднего значения подходящей временной характеристики открытой микросистемы от нахождения флуктуации этой величины. В качестве такой характеристики мы предлагаем ввести в тех случаях, когда это возможно, *эффективную частоту*

$$\omega_{\text{эфф}} \equiv \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial J_{\text{эфф}}}, \quad (42)$$

где $\bar{\varepsilon}$ – средняя энергия открытой микросистемы, а $J_{\text{эфф}}$ – ее эффективное действие. Она имеет смысл универсальной временной характеристики открытой микросистемы и зависит от макроскопических параметров, фиксирующих ее микросостояние в квазиклассическом пределе.

Очевидно, что определение эффективной частоты (42) пригодно для всех открытых микросистем, средняя энергия которых представима в следующих эквивалентных формах:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{J_{\text{эфф}}^2}{2I_{\text{эфф}}} = \frac{(\hbar N_{\text{эфф}})^2}{2I_{\text{эфф}}} \quad (43)$$

либо

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\hbar}{2} \frac{J_{\text{эфф}}}{I_{\text{эфф}}} \cdot \frac{J_{\text{эфф}}}{\hbar} = \frac{\hbar \omega_{\text{эфф}}}{2} N_{\text{эфф}}, \quad (44)$$

где $I_{\text{эфф}} = J_{\text{эфф}}/\omega_{\text{эфф}}$ – эффективный момент инерции,

$$N_{\text{эфф}} \equiv \frac{J_{\text{эфф}}}{\hbar} = \frac{m\omega_{\text{эфф}}}{\hbar} \frac{I_{\text{эфф}}}{m} = \frac{1}{l_0^2} \cdot \frac{I_{\text{эфф}}}{m} \quad (45)$$

– эффективное число квантов действия $\hbar$, причем $N_{\text{эфф}} \gg 1$, а $l_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega_{\text{эфф}})}$ – амплитуда квантовых нулевых колебаний.

Чтобы в этом убедиться, сопоставим определения (42) и (45) с параметрами рассмотренных выше моделей открытых микросистем. Так, для осциллятора в когерентном состоянии

$$\omega_{\text{эфф}} = \frac{mv \cdot d}{md^2} = \omega_0, \quad N_{\text{эфф}} = \frac{mv \cdot d}{\hbar} = \frac{d^2}{l_0^2} = 2\bar{n}, \quad (46)$$

где

$$I_{\text{эфф}} = md^2, \quad J_{\text{эфф}} = mv \cdot d, \quad v = \omega_0 d. \quad (47)$$

Здесь d – классическая амплитуда колебаний в квазиклассическом микросостоянии с $n \approx \bar{n} \gg 1$, определяемая из условия

$$\bar{\varepsilon} = \frac{m\omega_0^2 d^2}{2} \approx \hbar\omega_0 \cdot \bar{n}. \quad (48)$$

Для свободной микрочастицы в состоянии гауссова волнового пакета

$$\omega_{\text{эфф}} = \frac{mv_0 \cdot b}{mb^2} = \frac{v_0}{b}, \quad N_{\text{эфф}} = \frac{mv_0 \cdot b}{\hbar} = \frac{b^2}{l_0^2}, \quad (49)$$

где

$$I_{\text{эфф}} = mb^2, \quad J_{\text{эфф}} = mv_0 \cdot b. \quad (50)$$

Для микрочастицы в бесконечной прямоугольной потенциальной яме ширины L

$$\omega_{\text{эфф}} = \frac{\pi \hbar n}{mL^2}, \quad N_{\text{эфф}} = \frac{\pi \hbar n}{\hbar} = \pi n = \frac{L^2}{l_0^2}, \quad (51)$$

где $I_{\text{эфф}} = mL^2$, $J_{\text{эфф}} = \pi \hbar n$ (при $n \gg 1$).

Наконец, для электрона в атоме водорода имеем

$$\omega_{\text{эфф}} = \frac{\hbar n}{mr_n^2}, \quad N_{\text{эфф}} = \frac{\hbar n}{\hbar} = n = \frac{r_n^2}{l_0^2}, \quad (52)$$

где $r_n = \hbar^2 n^2 / (me^2)$ – радиус n -й боровской орбиты (при $n \gg 1$).

Теперь на примере осциллятора в когерентном состоянии покажем, что введение эффективной частоты позволяет продвинуться в интерпретации СН энергия–время (13). Вполне естественно допустить, что эффективная частота имеет смысл средней частоты осциллятора как открытой микросистемы:

$$\omega_{\text{эфф}} \equiv \bar{\omega} = \omega_0.$$

Что же касается флуктуации обратной эффективной частоты $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$, то ее можно было бы связать с неопределенностью времени Δt^* в каком-либо конкретном когерентном состоянии. Дело в том, что левая часть СН энергия–время (13) удовлетворяет требованию масштабной инвариантности:

$$\Delta \varepsilon \cdot \Delta t^* = \frac{\Delta \varepsilon}{\sqrt{\mu}} \cdot \sqrt{\mu} \Delta t^* \equiv \Delta \varepsilon_\mu \cdot \Delta t_\mu^*, \quad (53)$$

где μ – любое положительное число. Изменение масштаба величин $\Delta \varepsilon$ и Δt^* (их своеобразная “перенормировка”) соответствует, как известно [5], переходу от исходных состояний микросистемы к так называемым сжатым состояниям. Тем самым вместо единственной величины Δt^* (12) фактически мы всегда имеем дело с совокупностью неопределенностей времени

$$\Delta t_\mu^* = \sqrt{\mu} \Delta t^*, \quad (54)$$

причем каждый член этой совокупности, вообще говоря, зависит от характеристик микросостояния при фиксированных макроскопических условиях задачи. В этой ситуации выбор постоянной μ можно сделать физически осмысленным, связав ее с характеристиками микросостояния.

Один вариант выбора постоянной μ выделен тем, что в нем зависимость Δt_μ^* от характеристик микросостояния, которое можно назвать *оптимально сжатым*, полностью исчезает. В результате соответствующая неопределенность времени становится универсальной, поскольку зависит только от макроскопических условий задачи. Для

квантового осциллятора в когерентном состоянии ее можно получить из (25) или (26), положив $\mu = 4\bar{n}$. Тогда $\Delta t_\mu^* \equiv 1/\omega_0$, что, как и следовало ожидать, совпадает с обратной эффективной частотой осциллятора.

Другой вариант выбора постоянной μ , позволяющий фиксировать флуктуацию эффективной частоты относительно ее среднего значения $\bar{\omega} \equiv \omega_0$, требует привлечения дополнительных физических соображений (см. раздел 7).

6. СН ЭНЕРГИЯ–ОБРАТНАЯ ТЕМПЕРАТУРА КАК АНАЛОГ ОБОБЩЕННОГО СН ЭНЕРГИЯ–ВРЕМЯ

Введение средней эффективной частоты открытой микросистемы, относительно которой происходят ее флуктуации, позволяет связать величины Δt^* и $\Delta(1/\omega)$ в некотором микросостоянии. Однако трудности, возникшие выше с интерпретацией СН (13), при этом не исчезнут. Они связаны с тем, что СН (13), в котором только одна из величин (энергия) описывается оператором, принято сопоставлять с СН (3), связывающим флуктуации двух квантово-динамических наблюдаемых. Если же с самого начала учесть, что обратная эффективная частота $1/\omega_{\text{эф}}$ — это c -числовая величина, то ее коммутатор с гамильтонианом, очевидно, обращается в нуль, так что СН (3) в этом случае становится тривиальным.

Следовательно, единственная возможность истолковать обобщенное СН (13) — это каким-то образом сопоставить его с универсальным СН Шредингера (8). Из последнего следует, что если одна из двух физических величин B и A является c -числом, то в правой части СН (8) остается только вклад σ_{AB} , который в квазиклассическом пределе переходит в коррелятор $\overline{(\Delta B \cdot \Delta A)}$, и СН (8) принимает форму

$$\Delta B \cdot \Delta A \geq \overline{(\Delta B \cdot \Delta A)}, \quad (55)$$

хорошо известную из классической теории вероятностей [11]. Поскольку в физике такое неравенство следует из теории флуктуаций Эйнштейна [13, с. 216–236], то формулу (55) естественно было бы назвать СН Эйнштейна.

Итак, по нашему мнению, аналогию для обобщенного СН (13) не следует искать в ортодоксальной квантовой динамике, основанной на СН Гейзенберга (3). Ее можно было бы найти в физической теории, в которой физическим величинам сопоставлялись бы не операторы, а c -числа, но при этом статус энергии соответствовал бы статусу других физических величин, способных флуктуировать вместе с ней. Как подчеркивалось в работе [14], подобную аналогию можно обнаружить в равновесной статистической термодинамике [15, 16]. Тот факт, что до сих пор это не было сделано, можно объяснить, скорее всего, следующими причинами. С одной стороны, имеет значительное распространение (см., например, [17]) убежденность в том, что сам факт наличия СН между двумя физическими величинами принципиально связан с их операторным описанием, характерным для квантовой динамики. С этой точки зрения ни о каких СН в статистической термодинамике говорить не приходится. С другой стороны, даже те авторы [18–20], кто имел

дело с частными случаями СН в статистической термодинамике, испытывали серьезные трудности при попытках их истолкования по аналогии с квантовой динамикой в духе традиционной интерпретации [6]. Природу этих трудностей можно понять, ибо характер корреляции между s -числовыми величинами B и A в статистической термодинамике совершенно иной. Соответствующие СН аналогичны скорее СН (55), чем (3).

Мы будем исходить из того, что СН (55) между флуктуациями s -числовых физических величин B и A возникают в любой физической теории, в которой применимо вероятностное описание [11]. Оставляя пока в стороне обсуждение этой проблемы в общем случае, ограничимся рассмотрением только равновесной статистической термодинамики, а в ее рамках обсудим только вопрос о физическом смысле СН энергия–температура. Подобный выбор подсказан тем, что в квантовой динамике и температура, и время не являются наблюдаемыми, так что возможность аналогии между соответствующими СН достаточно велика.

Как известно [15, 16], в равновесной термодинамике имеются три уровня теоретического описания. На первом из них – в феноменологической термодинамике – все макропараметры, определяющие макросостояния системы (энергия $\mathcal{E}$, температура T , объем V , давление P и т.п.), равноправны и однозначно фиксированы (не испытывают флуктуаций).

На следующем уровне – в термодинамике, основанной на статистической механике Гиббса, – если для простоты ограничиться только величинами $\mathcal{E}$ и T , равноправие энергии и температуры нарушается. Энергия системы как макропараметр характеризуется средним значением $\bar{\mathcal{E}}$ и флуктуацией $\Delta\mathcal{E}$, которые могут быть найдены по распределению Гиббса. В то же время температура, будучи модулем этого распределения, остается жестко фиксированной. Фактически она является температурой термостата T_0 и по-прежнему переносится на систему с помощью феноменологического нулевого начала термодинамики: $T \equiv T_0$. Разумеется, говорить о СН энергия–температура на этих уровнях описания не приходится.

Наконец, на третьем, наиболее фундаментальном уровне – в собственно *статистической термодинамике* – принимаются во внимание как флуктуация температуры ΔT , так и коррелятор флуктуаций энергии и температуры системы $\overline{(\Delta\mathcal{E} \cdot \Delta T)}$, отражающий наличие неконтролируемого (теплового) воздействия на систему со стороны окружения (термостата). Они могут быть вычислены в рамках квазиротермодинамической теории флуктуаций Эйнштейна [13]. При этом температура термостата, имеющая физический смысл средней температуры системы $\bar{T} \equiv T_0$, остается неизменной ($\Delta T_0 = 0$). В то же время температура системы флуктуирует ($\Delta T \neq 0$), так что в теории Эйнштейна понятие теплового равновесия (нулевое начало термодинамики) обобщается, принимая динамический характер. А это означает, что в статистической термодинамике энергия и температура имеют одинаковый статус, но при этом должно быть справедливо СН энергия–температура, аналогичное по форме СН (55).

Таким образом, следует ожидать, что физические величины – энергия и температура для макросистемы в термостате – вполне пригодны для получения СН, которое могло

бы послужить аналогом СН энергия–время (13). Во-первых, для их описания не используются операторы. Во-вторых, по определенным правилам мы можем ввести их средние значения $\bar{\mathcal{E}}$ и $\bar{T} \equiv T_0$ и флуктуации $\Delta\mathcal{E}$ и ΔT , а также вычислить коррелятор $\overline{(\Delta\mathcal{E} \cdot \Delta T)}$. В-третьих, и это самое главное, в статистической термодинамике энергия и температура системы имеют одинаковый статус, а коррелятор $\overline{(\Delta\mathcal{E} \cdot \Delta T)}$ в правой части СН отражает корреляцию флуктуаций энергии и температуры, характер которой качественно отличен от корреляции флуктуаций наблюдаемых B и A в СН (3).

Переходя к СН энергия–температура, следует отметить, что хотя необходимые формулы для флуктуаций и коррелятора содержатся в учебниках [15, 16], подобные СН продолжительное время либо вообще не выписывались, либо к ним относились, как к курьезам [19, 21]. Как следует из обзора [22], одной из главных причин такого положения является качественное различие в физической трактовке СН Эйнштейна (55) и СН Гейзенберга (3).

Для вывода СН энергия–температура рассмотрим систему, макросостояние которой определяется температурой T и объемом $\mathcal{V}$. Тогда приращение энергии

$$\delta\mathcal{E} = \left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mathcal{V}} \right)_T \delta\mathcal{V} + C_{\mathcal{V}} \cdot \delta T, \quad (56)$$

где $C_{\mathcal{V}}$ – теплоемкость при $\mathcal{V} = \text{const}$. Как показано в [15, 16], коррелятор $\overline{(\Delta\mathcal{V} \cdot \Delta T)} = 0$, а дисперсия температуры

$$(\Delta T)^2 \equiv \overline{(\delta T)^2} = \frac{k_B T^2}{C_{\mathcal{V}}}, \quad (57)$$

где k_B – постоянная Больцмана, $T \approx T_0$ – температура системы. Возводя $\delta\mathcal{E}$ в квадрат и усредняя по распределению Гаусса, получим флуктуацию энергии макросистемы

$$(\Delta\mathcal{E})^2 \equiv \overline{(\delta\mathcal{E})^2} = \left[\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mathcal{V}} \right]_T^2 (\Delta\mathcal{V})^2 + C_{\mathcal{V}}^2 (\Delta T)^2, \quad (58)$$

где

$$(\Delta\mathcal{V})^2 \equiv \overline{(\delta\mathcal{V})^2} = -k_B T \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial P} \right)_T. \quad (59)$$

Аналогично, домножая $\delta\mathcal{E}$ на δT и усредняя, получим коррелятор между флуктуациями энергии и температуры

$$\overline{(\Delta\mathcal{E} \cdot \Delta T)} = C_{\mathcal{V}} (\Delta T)^2 = k_B T^2. \quad (60)$$

Ниже мы ограничимся лишь тем случаем, когда первое слагаемое в правой части (58) равно нулю. В частности, он имеет место при $\mathcal{V} = \text{const}$, т.е. когда контакт системы с окружением имеет чисто тепловой характер.

Выбирая в СН (55) $B = \mathcal{E}$ и $A = T$ и учитывая (60), получим СН энергия–температура в виде

$$\Delta\mathcal{E} \cdot \Delta T \geq \overline{(\Delta\mathcal{E} \cdot \Delta T)} = k_B T^2, \quad (61)$$

где равенство достигается в случае, когда в формуле (58) $\mathcal{V} = \text{const}$.

Как следовало ожидать, трактовка СН (61) в духе СН Эйнштейна (55) качественно отличается от его же трактовки в духе СН Гейзенберга (3). Здесь флуктуации $\Delta\mathcal{E}$ и ΔT равноправны, но при этом любая из этих флуктуаций и коррелятор $(\Delta\mathcal{E} \cdot \Delta T)$ совместно обращаются в нуль при $T \rightarrow 0$. Тем самым вид СН (61) в статистической термодинамике изначально не вызывает ассоциаций с обобщенным СН энергия–время (13).

Ситуация, однако, меняется, если в правой части СН (61) оставить только постоянную k_B . Разделив обе части неравенства (61) на один и тот же множитель, получим СН Эйнштейна

$$\Delta\mathcal{E} \cdot \frac{k_B \cdot \Delta T}{(\Delta\mathcal{E} \cdot \Delta T)} \geq k_B, \quad (62)$$

которое практически не отличается по форме от СН (13). Если к тому же учесть выражение (60) для коррелятора $(\Delta\mathcal{E} \cdot \Delta T)$, то вместо СН (61) получим СН Эйнштейна энергия–обратная температура

$$\Delta\mathcal{E} \cdot \frac{\Delta T}{T^2} \equiv \Delta\mathcal{E} \cdot \Delta \left(\frac{1}{T} \right) \geq k_B, \quad (63)$$

открывающее возможности для физической интерпретации. Самая существенная его особенность состоит в том, что, будучи внешне похожим на СН Гейзенберга (3) с постоянной $\hbar/2$ в правой части, оно в *скрытой* форме отвечает качественно иному типу корреляции между флуктуациями энергии и температуры, отличному от корреляции между флуктуациями q и p в СН (3). *Явная* форма такой корреляции отражена в СН (61).

Необходимо подчеркнуть, что из СН Эйнштейна (63) следует, что постоянная Больцмана k_B играет роль фундаментальной константы, аналогичную роли постоянной $\hbar$ в квантовой динамике. Поскольку минимальное изменение энтропии $\Delta S_{\min}$ пропорционально k_B , то постоянную Больцмана k_B следует трактовать как минимальную меру “неупорядоченности”, передаваемую системе термостатом в условиях теплового равновесия. Тем самым она в той же мере характеризует минимальное неконтролируемое тепловое воздействие на систему со стороны окружения, в какой постоянная Планка $\hbar$ – минимальное неконтролируемое квантовое воздействие.

Таким образом, поставленная цель достигнута, и СН (63), пригодное для моделирования СН энергия–время (13), построено. Во-первых, входящие в СН (61) и (63) величины $\Delta\mathcal{E}$ и ΔT имеют ясный физический смысл флуктуаций относительно средних значений $\bar{\mathcal{E}}$ и $\bar{T}$. Во-вторых, в статистической термодинамике величины $\mathcal{E}$ и T , флуктуации которых связаны СН Эйнштейна (55), полностью равноправны, но при этом трактовка СН энергия–температура (61) качественно отличается от трактовки СН Гейзенберга (3). В-третьих, СН энергия–обратная температура (63) связывает флуктуации энергии системы и ее обратной температуры с постоянной Больцмана, служащей мерой неконтролируемого теплового воздействия. Указанные особенности позволяют использовать СН (63) в качестве аналога при выборе адекватной формы обобщенного СН энергия–время.

7. ФЛУКТУАЦИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ЧАСТОТЫ КВАНТОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В КОГЕРЕНТНОМ СОСТОЯНИИ

Перед нами стоит задача – выбрать наиболее адекватную форму для обобщенного СН энергия–время (13). В ней хотелось бы сохранить зависимость от постоянной $\hbar/2$, но при этом дать ей трактовку, аналогичную трактовке СН энергия–обратная температура в статистической термодинамике. Чтобы решить эту задачу, мы будем напрямую сопоставлять входящие в СН (13) величины с аналогичными величинами в СН (63).

Очевидно, что флуктуации $\Delta\epsilon$ и $\Delta\mathcal{E}$ в микро- и макросистемах качественно близки и отличаются лишь способом вычисления. Входящие в СН (13) и (63) фундаментальные постоянные $\hbar/2$ и k_B также аналогичны по физическому смыслу, ибо отражают наличие того или иного типа неконтролируемого воздействия на систему со стороны окружения. Тем самым в этих формулах по существу нужно найти аналогию лишь между величинами Δt^* и $\Delta(1/T)$.

Действительно, в СН (63) величина $\Delta(1/T)$ – это флуктуация обратной температуры относительно ее среднего значения $\overline{T}^{-1} \equiv T_0^{-1}$, где T_0 – температура термостата. Она, как и флуктуация энергии макросистемы, соответствует *единственному* макросостоянию – состоянию теплового равновесия – и вычисляется в рамках квазитермодинамической теории флуктуаций Эйнштейна [13].

В то же время величина Δt^* , входящая в СН (13), фактически обозначает целую совокупность величин Δt_μ^* , зависящих, как и соответствующая совокупность флуктуаций энергий $\Delta\epsilon_\mu$, от выбора конкретного микросостояния и связанных условием (53). В общем случае произвольный член совокупности Δt_μ^* не может быть истолкован как флуктуация какой-либо временной характеристики. Более того, как было показано в разделе 5, при специфическом выборе *оптимально сжатого* микросостояния осциллятора величина Δt_μ^* фиксирована и равна $1/\omega_0$.

Таким образом, для выбора конкретного значения Δt_μ^* необходимо понять, как среди всех возможных микросостояний найти специфическое микросостояние с фиксированным μ , в котором величина Δt_μ^* была бы аналогом $\Delta(1/T)$. В этом случае она могла бы быть истолкована как флуктуация обратной эффективной частоты $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$ *открытой* микросистемы в целом относительно ее среднего значения. Прежде чем сделать этот выбор в общем случае, проиллюстрируем суть идеи на модели квантового осциллятора в когерентном состоянии. Для этого воспользуемся полуклассической трактовкой этого микросостояния как нестационарного. Тот факт, что в когерентном состоянии квантовый осциллятор не имеет фиксированной энергии, а характеризуется средней энергией $\bar{\epsilon}$ вида (15) и ее флуктуацией $\Delta\epsilon$ вида (16), можно истолковать как наличие слабого затухания, приводящего к деформации его частотного спектра. Естественно предположить, что квантовый гармонический осциллятор в когерентном состоянии эквивалентен затухающему классическому осциллятору. Тогда его частота ω должна отличаться от среднего значения частоты $\bar{\omega} \equiv \omega_0$, жестко фиксированного внешними макроусловиями, так что

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm (\Delta\omega)^2, \quad (64)$$

где $\Delta\omega \ll \omega_0$ – флуктуация частоты относительно ее среднего значения ω_0 .

Чтобы понять дальнейшую логику рассуждений, запишем, прежде всего, выражения для средней энергии $\bar{\varepsilon}$ осциллятора и совокупности ее флуктуаций $\Delta\varepsilon_\mu = \Delta\varepsilon/\sqrt{\mu}$, удовлетворяющих условию (53), в виде

$$\bar{\varepsilon} \approx \frac{\hbar\omega_0}{2} N_{\text{эфф}}, \quad \Delta\varepsilon_\mu = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} \sqrt{N_{\text{эфф}}}, \quad (65)$$

где $N_{\text{эфф}} = 2\bar{n} \gg 1$. В качестве условия, позволяющего фиксировать параметр микросостояния μ , потребуем наличия аналогии между флуктуацией частоты $\Delta\omega$ данной микросистемы и флуктуацией температуры ΔT подходящей макросистемы в статистической термодинамике. В качестве таковой рассмотрим одномерную цепочку упругосвязанных классических осцилляторов, для которой имеем [16]

$$\bar{\varepsilon} = k_B T_0 \cdot N, \quad \Delta\varepsilon = k_B T_0 \cdot \sqrt{N}, \quad (66)$$

где N – число осцилляторов в цепочке.

Сравнивая формулы (65) и (66), нетрудно убедиться в том, что выражения для средней энергии и ее флуктуации в этих двух моделях совпадают, если только в качестве *единственного* микросостояния выбрать когерентное состояние с $\mu = 2$ и заменить величину $k_B T_0$ на $\hbar\omega_0/2$, а N на $N_{\text{эфф}}$. Подобное микросостояние мы будем называть *симметричным когерентным* микросостоянием. В нем характеристики осциллятора имеют *макроскопический* смысл, ибо условие $N_{\text{эфф}} \gg 1$ соответствует квазиклассическому пределу.

В данном микросостоянии (при $\mu = 2$) величина Δt_μ^* может быть истолкована как флуктуация обратной эффективной частоты $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$ относительно ее среднего значения $\bar{\omega}^{-1} \equiv \omega_0^{-1}$:

$$\Delta t_\mu^* \equiv \Delta \left(\frac{1}{\omega_{\text{эфф}}} \right) \approx \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2}. \quad (67)$$

Сравнивая это определение с выражением для Δt_μ^* , полученным из соотношения (54) при $\mu = 2$ и формулы (25) для Δt^* , имеем

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{N_{\text{эфф}}}}, \quad (68)$$

откуда следует, что

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{N_{\text{эфф}}}}. \quad (69)$$

Заметим, что выражение (69) полностью аналогично выражению для флуктуации температуры в одномерной цепочке упругосвязанных классических осцилляторов в состоянии теплового равновесия, когда $\Delta T = T_0/\sqrt{N}$.

Если сравнить формулу (69) для флуктуации частоты $\Delta\omega$ с аналогичной формулой для затухающего классического осциллятора [23] $\Delta\omega_{\text{кл}} = \omega_0/2Q_{\text{кл}}$ с теми же параметрами $\varkappa$ и t и добротностью $Q_{\text{кл}} \gg 1$, то станет очевидно, что при $N_{\text{эфф}} \gg 1$ аналогия с таким классическим осциллятором вполне оправдана.

Возвращаясь к обобщенному СН энергия–время (13), мы видим, что для квантового осциллятора в когерентном состоянии величина Δt_μ^* имеет ясный физический смысл флуктуации временной характеристики микросистемы в целом только в *единственном* микросостоянии (при $\mu = 2$). В этом микросостоянии, во многом похожем на состояние теплового равновесия макросистемы, *обобщенное* СН энергия–время принимает вид СН энергия–обратная эффективная частота, аналогичного СН (63) в статистической термодинамике:

$$\Delta\varepsilon \cdot \Delta \left(\frac{1}{\omega_{\text{эфф}}} \right) \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (70)$$

где $\Delta\varepsilon$ и $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$ определяются формулами (16) и (69), соответственно. Входящие в СН (70) величины $\Delta\varepsilon$ и $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$ зависят от состояния микросистемы, а среднее значение эффективной частоты $\bar{\omega} \equiv \omega_0$, подобно средней температуре $\bar{T} \equiv T_0$, задается только окружающей макрообстановкой.

Иными словами, в этом фиксированном микросостоянии СН энергия–время принимает форму, в которой величины $\Delta\varepsilon$ и $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$ имеют ясный математический и физический смысл, величины $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\omega}$ как макропараметры микросистемы имеют одинаковый статус, а трактовка СН энергия–обратная эффективная частота (70) совпадает с трактовкой СН Эйнштейна (63) в статистической термодинамике, но принципиально отличается от трактовки СН Гейзенберга (3) в квантовой динамике.

8. СН ЭНЕРГИЯ–ЭФФЕКТИВНАЯ ЧАСТОТА ДЛЯ ОТКРЫТОЙ МИКРОСИСТЕМЫ

Распространим теперь полученные результаты на более широкий класс микросистем. Ограничимся рассмотрением микросистем, которые в квазиклассическом пределе могут быть аппроксимированы квантовым осциллятором. Для них обобщенное СН энергия–время (13) в симметричном когерентном микросостоянии можно трактовать аналогично тому, как это было сделано в разделе 7. Это означает, что для всех подобных микросистем справедливо СН энергия–обратная эффективная частота (70). Оно в *скрытой* форме учитывает корреляцию между энергией и эффективной частотой микросистемы подобно тому, как СН (63) учитывает корреляцию между энергией и температурой в статистической термодинамике.

Указанную корреляцию можно сделать *явной*, если от СН (70) перейти к СН энергия–эффективная частота, что соответствует переходу от СН (63) к СН (61) в статистической термодинамике. В качестве первого шага домножим обе части СН (70) на $\omega_{\text{эфф}}^2$:

$$\Delta\varepsilon \cdot \Delta\omega \geq \frac{\hbar}{2} \omega_{\text{эфф}}^2, \quad (71)$$

после чего остается лишь истолковать правую часть этого СН. С этой целью по аналогии со статистической термодинамикой будем исходить из наиболее общей зависимости $\bar{\varepsilon} = \varepsilon(\omega_{\text{эфф}})$ средней энергии микросистемы от эффективной частоты. Тогда ее приращение можно записать в виде

$$\delta\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega_{\text{эфф}}}\delta\omega \equiv \rho_{\omega} \cdot \delta\omega, \quad (72)$$

где ρ_{ω} – спектральная плотность энергии, служащая квантово-динамическим аналогом теплоемкости $C_V = (\partial\mathcal{E}/\partial T)|_V$ в статистической термодинамике. Тогда, как и при выводе формул (58) и (59), нетрудно получить флуктуацию энергии и коррелятор флуктуаций энергии и эффективной частоты:

$$(\Delta\varepsilon)^2 = \rho_{\omega}^2 (\Delta\omega)^2, \quad \overline{(\Delta\varepsilon \cdot \Delta\omega)} = \rho_{\omega} (\Delta\omega)^2, \quad (73)$$

где $(\Delta\varepsilon)^2 \equiv \overline{(\delta\varepsilon)^2}$, $(\Delta\omega)^2 \equiv \overline{(\delta\omega)^2}$.

Сделаем по аналогии с (57) допущение, что в достаточно общем случае флуктуация эффективной частоты имеет вид

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{\hbar}{2} \cdot \omega_{\text{эфф}}^2 \cdot \rho_{\omega}. \quad (74)$$

Тогда из (73) получим

$$(\Delta\varepsilon)^2 = \frac{\hbar}{2} \rho_{\omega} \cdot \omega_{\text{эфф}}^2, \quad \overline{(\Delta\varepsilon \cdot \Delta\omega)} = \frac{\hbar}{2} \omega_{\text{эфф}}^2 \rho_{\omega}, \quad (75)$$

что соответствует формулам (58) и (60) в статистической термодинамике. Разумеется, в рассмотренных моделях, для которых $\rho_{\omega} = \hbar N_{\text{эфф}}/2$ выражение (74) для флуктуации эффективной частоты оказывается справедливым.

В качестве второго шага СН (71) с учетом выражений (73), (74) можно представить в виде

$$\Delta\varepsilon \cdot \Delta\omega \geq \frac{\hbar}{2} \omega_{\text{эфф}}^2 = \rho_{\omega} \left(\frac{\hbar}{2} \omega_{\text{эфф}}^2 \right) = \rho_{\omega} (\Delta\omega)^2 \equiv \overline{(\Delta\varepsilon \cdot \Delta\omega)}, \quad (76)$$

аналогичном СН энергия–температура (61), в котором корреляция между флуктуациями энергии и эффективной частоты микросистемы является *явной* и отвечает трактовке подобной корреляции в статистической термодинамике.

Нетрудно видеть, что в проведенном анализе флуктуация эффективной частоты $\Delta\omega$ играет фундаментальную роль. Как и флуктуация температуры в статистической термодинамике, она определяет условия динамического равновесия открытой микросистемы с ее окружением. От нее зависят как флуктуация энергии $\Delta\varepsilon$, так и коррелятор флуктуаций энергии и эффективной частоты $\overline{(\Delta\varepsilon \cdot \Delta\omega)}$. При этом, если $\Delta\omega \rightarrow 0$, то обе флуктуации так же стремятся к нулю. Как и в статистической термодинамике, в СН (76)

имеет место неравенство, если средняя энергия зависит не только от эффективной частоты, но и от других характеристик. В противном случае СН (76) представляет собой равенство, как можно было ожидать для *симметричных когерентных* микросостояний.

Таким образом, адекватная форма *обобщенного* СН энергия–время может быть записана в двух вариантах: либо в виде СН энергия–обратная эффективная частота (70), где корреляция входящих в нее величин является *скрытой*, либо в виде СН энергия–эффективная частота (76), где корреляция того же типа является *явной*. Очевидно, что вариант с *явной* корреляцией удобнее для физической интерпретации. С другой стороны вариант со *скрытой* корреляцией удобнее для сопоставления с СН Гейзенберга (3) и установления взаимосвязи между квантовой динамикой и статистической термодинамикой.

Сравнение формул (70) и (76) с формулами (63) и (61) показывает, что аналогия между СН энергия–время и СН энергия–температура в данном случае является полной. Это подтверждает предположение [14] о том, что СН энергия–время, несмотря на наличие в нем постоянной Планка, должно рассматриваться в качестве существенного элемента макроописания *открытой микросистемы*, аналогичного описанию, принятому в статистической термодинамике для макросистемы в состоянии теплового равновесия.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование показало, что обобщение СН энергия–время Мандельштама–Тамма при должном выборе состояния открытой микросистемы приводит к такой его форме, в которой физическая интерпретация не вызывает сомнений. При этом все величины входят в указанное СН в данном микросостоянии на равных основаниях и имеют макроскопический смысл, будучи аналогами соответствующих величин в статистической термодинамике.

Отмеченная аналогия, по-видимому, неслучайна. Она соответствует точке зрения [24, 25], получившей распространение в последние годы, о необходимости обобщения понятия теплоты на микросистемы, находящиеся при температуре $T = 0$. В частности, из нашего анализа следует, что для открытых микросистем в симметричном когерентном состоянии вполне возможно введение макроописания, если в стандартных формулах термодинамики одновременно произвести замены $N \rightarrow N_{\text{эфф}}$ и

$$k_B T_0 \rightarrow \frac{\hbar \omega_{\text{эфф}}}{2} \equiv k_B T_{\text{эфф}},$$

где $T_{\text{эфф}}$ – эффективная температура, впервые введенная аналогичной формулой в термодинамике черных дыр [26]. Тем самым ныне в повестку дня ставится задача дальнейшего развития макроописания открытых микросистем (см. [27]) и его объединения с традиционной термодинамикой в рамках обобщенной статистической термодинамики, которую еще предстоит построить.

Благодарности. В заключение считаю своим долгом почтить светлую память моего учителя Б. В. Медведева, дискуссия с которым в конце августа 1996 г. инициировала проведение данного исследования. Результаты, изложенные выше, неоднократно обсуждались с ним и находили у него поддержку. Я благодарен В. И. Манько, О. Н. Голубевой, А. Г. Башкирову, А. С. Кондратьеву, Ю. Г. Рудому, С. Ф. Тимашеву, А. И. Оксаку и В. И. Санюку за многочисленные замечания и плодотворную критику, способствовавшие завершению работы. Хотел бы также выразить глубокую благодарность Б. С. Ишханову за создание благоприятных условий для работы.

Список литературы

- [1] *W. Heisenberg*. Z. Phys. 1927. V. 43. P. 172–198.
- [2] *Н. Бор*. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1971.
- [3] *Я. И. Хургин, В. П. Яковлев*. Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.
- [4] *H. P. Robertson*. Phys. Rev. 1929. V. 34. P. 163–164.
- [5] *В. В. Додонов, В. И. Манько*. Тр. ФИАН. 1987. Т. 183. С. 5–70.
- [6] *А. Мессиа*. Квантовая механика. Т. 1. М.: Наука, 1978.
- [7] *Л. И. Мандельштам, И. Е. Тамм*. Изв. АН СССР. Сер. физич. 1945. Т. 9. № 1/2. С. 122–128.
- [8] *Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский*. Лекции по квантовой механике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
- [9] *Э. Шредингер*. Избранные труды по квантовой механике. М.: Наука, 1976.
- [10] *Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров*. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
- [11] *Ю. А. Розанов*. Случайные процессы. М.: Наука, 1971.
- [12] *Л. Шифф*. Квантовая механика. М.: Мир, 1959.
- [13] *А. Эйнштейн*. Собрание научных трудов. Т. 3. М.: Наука, 1966.
- [14] *A. D. Sukhanov*. On the global interrelation between quantum dynamics and thermodynamics. In: Proc. of the XIth International Conference “Problems of Quantum Field Theory” (Dubna, 1998). Eds. B. M. Barbashov, G. V. Efimov, A. V. Efremov. Dubna: JINR, 1999. P. 232–236.
- [15] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
- [16] *А. И. Ансельм*. Основы статистической физики и термодинамики. М.: Наука, 1973.
- [17] *А. Мюнстер*. Теория флуктуаций. В сб.: Термодинамика необратимых процессов. Ред. Д. Н. Зубарев. М.: ИИЛ, 1962. С. 36–179.
- [18] *R. Fürth*. Z. Phys. 1933. V. 81. P. 143–149.
- [19] *L. Rosenfeld*. Questions of irreversibility and ergodicity. In: Proc. of E. Fermi School of Physics. V. 14. Ed. P. Caldirola. New York: Academic Press, 1962. P. 1–19.
- [20] *B. Mandelbrot*. J. Math. Phys. 1964. V. 5. P. 164–167.
- [21] *И. А. Квасников*. Термодинамика и статистическая физика. Теория неравновесных систем. М.: Изд-во МГУ, 1987.
- [22] *J. Uffink, J. van Lith*. J. Found. Phys. 1998. V. 28. P. 323–347.
- [23] *Г. С. Горелик*. Колебания и волны. М.: Физматлит, 1959.
- [24] *Д. А. Киржниц*. Соросовский образовательный журнал. 1997. № 6. С. 84–91.
- [25] *Б. Б. Кадомцев*. Динамика и информация. М.: Редакция УФН, 1997.
- [26] *И. Д. Новиков, В. П. Фролов*. Физика черных дыр. М.: Наука, 1981.
- [27] *А. Г. Башкиров, А. Д. Суханов*. ТМФ. 2000. Т. 123. № 1. С. 107–115.

Поступила в редакцию 30.VII.1999 г.,
после доработки 21.VI.2000 г.