Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Калякин, О. А. Султанов, М. А. Шамсутдинов,
Асимптотический анализ модели ядерного магнитного
авторезонанса, *ТМФ*, 2011, том 167, номер 3, 420–431

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6651>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 11:11:24

© 2011 г.

Л. А. Калякин*, О. А. Султанов†,

М. А. Шамсутдинов‡

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ ЯДЕРНОГО МАГНИТНОГО АВТОРЕЗОНАНСА

Исследована система трех дифференциальных уравнений первого порядка, которая возникает при усреднении уравнений Блоха в теории ядерного магнитного резонанса. Для усредненной системы построена асимптотика устойчивого решения с неограниченно растущей амплитудой. Этот результат дает ключ к пониманию авторезонанса в слабо диссипативных магнитных системах как явления значительного роста намагниченности, инициированного малой внешней накачкой.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, возмущение, малый параметр, асимптотика, авторезонанс, диссипация, устойчивость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи. Цель настоящей статьи – разработка подходов к анализу явления авторезонанса в модели ядерной намагниченности. Основным объектом исследования является система трех уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\tau} &= A(\tau) \sin \psi - \beta_2 r, \\ \frac{dz}{d\tau} &= B(\tau) r \sin \psi - \beta_1 z, \\ r \left[\frac{d\psi}{d\tau} + \Lambda(\tau) - z \right] &= C(\tau) \cos \psi,\end{aligned}\tag{1}$$

$\beta_1, \beta_2 = \text{const} > 0$. Эта система представляет собой асимптотическое приближение для уравнений Блоха [1], [2], описывающих динамику вектора намагниченности. Специфика задачи заложена в неограниченно растущих по времени коэффициентах

$$\Lambda(\tau) = \lambda\tau + O(1), \quad A(\tau) = a\tau + O(1), \quad B(\tau) = b\tau + O(1), \quad C(\tau) = c\tau + O(1), \tag{2}$$

*Институт математики с ВЦ РАН, Уфа, Россия. E-mail: klenru@mail.ru

†Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия.
E-mail: osa-uf@rambler.ru

‡Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

где $\lambda, a, b, c = \text{const} \neq 0$. Считается, что остатки в этих формулах представляют собой гладкие ограниченные функции, которые разлагаются в асимптотические ряды по целым неположительным степеням при $\tau \rightarrow \infty$. В приложениях коэффициенты обычно совпадают: $A(\tau) \equiv B(\tau) \equiv C(\tau) \equiv -\tau$. Однако в рассматриваемых ниже асимптотических конструкциях такая специфика уравнений не нужна, налагается лишь ограничение на знаки: $\lambda ab > 0$. Ввиду инвариантности структуры уравнений относительно масштабных преобразований без ограничения общности можно считать, что $\lambda > 0$, $a = b = -1$.

Основным результатом статьи является получение решения с растущей амплитудой $r^2(\tau), z(\tau) \approx O(\tau)$, $\tau \rightarrow \infty$, для которого доказывается устойчивость по Ляпунову. Такие решения связываются с описанием начального этапа авторезонанса в исходной модели Блоха.

Модельные системы типа (1) появляются при анализе разных задач о захвате в резонанс. Для их исследования широко используются метод адиабатических приближений и его обобщения, основанные на наличии малого параметра [3]–[5].

В уравнениях (1) наличие малого параметра не предполагается и не используется¹⁾. Здесь решается вопрос об асимптотике на бесконечности по времени. Для подобных уравнений построение и обоснование асимптотик в виде степенных рядов с постоянными коэффициентами не вызывает затруднений [6], [7]. Однако вопрос устойчивости получаемых таким способом изолированных решений зачастую остается открытым, особенно в неавтономных системах. Существенная часть настоящей работы посвящена проблеме устойчивости.

Следует отметить, что для системы (1) существует много решений с ограниченной амплитудой $r(\tau), z(\tau) = O(1)$, у которых растёт фаза $\psi(\tau) \approx \lambda\tau^2/2$, $\tau \rightarrow \infty$. Такие решения соответствуют отсутствию авторезонанса и здесь не рассматриваются. По этой причине не рассматриваются уравнения при $\lambda ab < 0$, поскольку в этом случае амплитуда ограничена на любом решении [8].

Связь с авторезонансом. Авторезонансом принято называть явление, которое наблюдается в нелинейных осцилляторах и случается под действием малых возмущений с переменной частотой накачки. Суть его состоит в значительном изменении амплитуды колебаний (либо энергии) благодаря резонансу, который автоматически поддерживается в течение длительного времени. В нелинейной физике известно много приложений этого явления [9].

Задачи об авторезонансе хорошо изучены для систем с одной степенью свободы [10]. Известные результаты основаны на исследовании асимптотики на бесконечности для общего решения модельных уравнений главного резонанса. Для систем большей размерности такие исследования почти не проводилось.

Рассматриваемые здесь уравнения (1) интересны тем, что, с одной стороны, они возникают в конкретной задаче динамики ядерной намагниченности в магнитных кристаллах. С другой стороны, они представляют собой трехмерное обобщение известных уравнений главного резонанса. При наличии диссипации, роль которой играют положительные коэффициенты $\beta_1, \beta_2 > 0$, размерность системы уравнений не понижается²⁾ и редукция задачи к известным результатам невозможна.

¹⁾Метод малого параметра используется для вывода уравнений (1) из уравнений Блоха.

²⁾Если $\beta_1 = \beta_2 = 0$ и $A \equiv B$, то в системе имеется первый интеграл, и ее размерность понижается.

2. СВЯЗЬ С ЗАДАЧЕЙ ПРЕЦЕССИИ ЯДЕРНОЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ

Система (1) появляется в асимптотике по малому параметру из других более сложных систем. В качестве примера покажем связь уравнений (1) с математической моделью ядерной намагниченности, предложенной в работах [1], [2].

Рассматривается движение вектора ядерной намагниченности $\vec{M} = (m_x, m_y, m_z)$ в ферромагнетике при наличии внешнего магнитного поля

$$\vec{H} = (H_r \cos \varphi(t), -H_r \sin \varphi(t), H_z).$$

Считается, что (продольная) компонента H_z направлена вдоль оси легкого намагничивания. Первые две компоненты соответствуют поперечному полю, которое быстро вращается с частотой $\varphi'(t)$; его принято называть радиочастотным (РЧ). Специфика исходной постановки задачи заложена в условии близости этой частоты к частоте ядерного магнитного резонанса (ЯМР) в начальный момент с последующим медленным изменением как частоты $\varphi'(t)$, так и амплитуды поля $H_r(t)$, $H_z(t)$. Медленное изменение означает, что производные этих функций малы по сравнению с частотой ЯМР; более точно эти свойства сформулированы в условиях (4), (5). Задача состоит в выявлении условий, при которых значительно меняется амплитуда вектора намагниченности за счет автоматического удержания системы в резонансе в течение длительного времени.

Математическая модель ядерной намагниченности берется в форме уравнений Блоха [1], [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= -m_z H(t) \sin \psi - b_2 m, & \frac{dm_z}{dt} &= m H(t) \sin \psi - (m_z - 1)b_1, \\ m \left[\frac{d\psi}{dt} + \varphi'(t) - \Omega_n(t) - \Omega_p(t)(1 - m_z) \right] &= -m_z H(t) \cos \psi. \end{aligned} \quad (3)$$

Искомые функции $m(t)$, $m_z(t)$ и $\psi(t)$ описывают динамику вектора ядерной намагниченности в цилиндрической системе координат, вращающейся с частотой внешнего поля.

Поясним структуру уравнений. Константы $b_1, b_2 \geq 0$ – скорости релаксации – соответствуют коэффициентам диссипации в осциллирующих системах. Считается, что вектор $\vec{M}$ нормирован на величину равновесной ядерной намагниченности m_0 . Это позволяет привести диссипативное слагаемое к виду $(m_z - 1)b_1$. Коэффициенты Ω_n , Ω_p в физике принято представлять через слагаемые ω_{n0} , $\omega_p(t)$, где $\omega_{n0} = \text{const}$ – несмещенная частота ЯМР, а $\omega_p(t)$ – параметр динамического сдвига частоты. Последняя величина вычисляется через продольную компоненту поля $H_z(t)$. Масштаб быстрого времени t удобно выбрать так, чтобы $\Omega_n(0) = 1$. Тогда в соответствии с работами [1], [2] надо положить

$$\Omega_n = \frac{\omega_{n0} - \omega_p(t)}{\omega_{n0} - \omega_p(0)}, \quad \Omega_p = \frac{\omega_p(t)}{\omega_{n0} - \omega_p(0)}.$$

Множитель из правых частей уравнений $H(t) = \gamma H_r(t) \eta$ соответствует амплитуде поперечного поля, где γ – гиромагнитное отношение ядер. Коэффициент эффективного усиления РЧ-поля $\eta = \eta(H_z)$ определяется через продольную компоненту

и поэтому может зависеть от времени, однако значительное изменение коэффициента $H(t)$ получается лишь за счет амплитуды поперечного поля $H_r(t)$. Специфика рассматриваемой задачи связана с малостью этой величины: $|H| \ll 1$.

При отсутствии диссипации и возмущения, $b_1 = b_2 = 0$, $H = 0$, система (3) становится тривиальной:

$$\dot{m} = 0, \quad \dot{m}_z = 0, \quad \dot{\psi} = \Omega_n + \Omega_p(1 - m_z).$$

Решения этих уравнений описывают вращение вектора намагниченности с частотой $\Omega_n + \Omega_p(1 - m_z)$ вокруг оси $0z$. Направление вдоль этой оси соответствует положению равновесия с $m = 0$, $m_z = 1$. Слагаемое $\Omega_p m_z$ в фазовом уравнении принято называть динамическим сдвигом частоты. Оно описывает зависимость собственной частоты от амплитуды колебаний. В теории динамических систем это свойство (неизохронность) отражает существенную нелинейность системы.

При наличии возмущения $H \neq 0$ и при отсутствии диссипации, когда $b_1 = b_2 = 0$, имеется первый интеграл – модуль намагниченности $M = \sqrt{m^2 + m_z^2} = \text{const}$. В таком случае система (3) сводится к двум уравнениям Ландау–Лифшица [1]. Эти уравнения представляют собой специфический нелинейный осциллятор, для которого в автономном случае (при $H = \text{const}$, $\varphi' - \Omega_n - \Omega_p \equiv \Omega = \text{const}$) можно записать интеграл энергии:

$$\frac{1}{2}m^2 - Hm \cos \psi \pm \Omega \sqrt{M^2 - m^2} = \text{const}.$$

Таким образом, бездиссипативная автономная система полностью интегрируется.

В слабо неавтономном случае, когда коэффициенты медленно меняются со временем, уравнения Ландау–Лифшица были исследованы в адиабатическом приближении [11]. Этот способ годится для уравнений (3). Однако, как указано в работе [11], адиабатическое приближение оказывается непригодным в практически важном случае малой амплитуды поперечного поля $H \ll 1$. Подобные задачи о переводе системы из окрестности равновесия к колебаниям с большой амплитудой под действием малого резонансного возмущения связываются с понятием авторезонанса.

Условия возникновения авторезонанса хорошо исследованы для одномерных нелинейных осцилляторов, в частности для модели Ландау–Лифшица [12]. В настоящей работе эта задача решается для системы (3). Следует иметь в виду, что при наличии диссипации уравнения ядерной намагниченности (3) не сводятся к паре уравнений, исследованной в работе [12].

3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ

Для упрощения исходных уравнений применяется метод малого параметра. С этой целью используется наличие двух масштабов в уравнениях (1).

В системе присутствуют быстрые свободные колебания вектора $\vec{M}(t)$ и медленные изменения частоты и амплитуды внешнего поля. В подобных задачах процедура приближенного анализа уравнений сводится к их усреднению по быстрой переменной. Усредненные уравнения описывают динамику медленных изменений параметров быстроосциллирующей системы в главном члене асимптотики по малому параметру.

В рассматриваемой задаче формализм усреднения сводится к переходу во вращающуюся систему координат и фактически уже выполнен при записи уравнений в виде (3). Возможность усреднения в столь специфической форме, когда никакие приближения не делаются, связана с одночастотностью внешнего поля. В случае многочастотного поля операция усреднения носит приближенный характер [13].

Надо иметь в виду, что идентификация масштаба медленных изменений посредством уравнений (3) возможна лишь при условии малости правых частей. В системе (3) малость правых частей обеспечивается малостью амплитуды поперечного поля $0 < H \ll 1$.

Помимо фиксации класса исходных данных (в данном случае – внешних полей) постановка задачи включает в себя описание класса анализируемых решений. При нулевом поперечном поле $H = 0$ в системе имеется положение равновесия: $m = 0$, $m_z = 1$. При малых полях $0 < H \ll 1$ анализируются решения с начальными данными вблизи равновесия $|m|, |1 - m_z| \ll 1$. Задача состоит в отыскании условий, при которых существует много решений со значительным ростом амплитуды колебаний за счет резонансных эффектов. В такой постановке исходную усредненную систему в форме (3) можно упростить, заменив ее на (1). Упрощение основано на анализе уравнений методом малого параметра.

Формально уравнения (1) получаются из уравнений (3) путем перехода в масштаб медленного времени и отбрасывания слагаемых с малыми множителями. При этом в качестве основного малого параметра используется отношение скорости изменения внешнего поля к скорости (или к частоте) свободных колебаний системы.

Как указано выше, быстрый масштаб времени определяется переменной t . В этом масштабе собственная частота системы, линеаризованной вблизи равновесия, совпадает с единицей. Тогда медленный масштаб определяется структурой зависимости от времени в коэффициентах уравнений. Для этих величин выписываются представления в виде функций от медленного времени $\tau = \varepsilon t$:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) - \Omega_n(t) &= \varepsilon \Lambda(\tau), & \Omega_p(t) &= d_p[1 + \varepsilon D(\tau)], \\ H(t) &= \frac{\varepsilon^{3/2} h(\tau)}{\sqrt{d_p}}, & \tau &= \varepsilon t. \end{aligned} \quad (4)$$

Фигурирующий здесь множитель ε соответствует относительной скорости изменения параметров внешнего поля в быстром масштабе и считается малой величиной: $0 < \varepsilon \ll 1$. Считается также, что эти функции удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\Lambda(0), h(0), D(\tau), \Lambda'(\tau), h'(\tau) = O(1) \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad d_p = \text{const} > 0, \quad (5)$$

равномерно для всех τ на компакте. Выписанные соотношения представляют собой основные ограничения, налагаемые на исходные данные. Они имеют простую физическую интерпретацию. Первое соотношение соответствует резонансному условию: частота внешнего поля близка к собственной частоте осциллятора вблизи равновесия и медленно меняется. Второе соотношение с $d_p \neq 0$ соответствует неизохронности системы: собственная частота существенно зависит от амплитуды колебаний. Третье соотношение соответствует малости амплитуды внешнего поля.

При таких ограничениях малые множители в исходных уравнениях идентифицируются наиболее просто. Для этого надо перейти к медленному времени и перенормировать искомые функции, считая их близкими к положению равновесия:

$$\sqrt{d_p}m(t) = \sqrt{\varepsilon}r(\tau), \quad d_p[1 - m_z(t)] = \varepsilon z(\tau), \quad \psi(t) = \psi(\tau).$$

В результате исходные уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= h(\tau) \left[-1 + \frac{\varepsilon z}{d_p} \right] \sin \psi - \beta_2 r, & \frac{dz}{d\tau} &= -h(\tau)r \sin \psi - \beta_1 z, \\ r \left[\frac{d\psi}{d\tau} + \Omega(\tau) - (1 + \varepsilon D(\tau))z \right] &= \left[-1 + \frac{\varepsilon z}{d_p} \right] h(\tau) \cos \psi. \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты диссипации пересчитываются по формулам $\beta_1 = b_1/\varepsilon$, $\beta_2 = b_2/\varepsilon$ и считаются ограниченными при $\varepsilon \rightarrow 0$. Класс рассматриваемых решений выделяется характерными (конечными) значениями перенормированных амплитуд в начальный момент: $r(0), z(0) = O(1)$, $r(0) \neq 0$.

Легко видеть, что уравнения (6) переходят в уравнение (1) в асимптотическом пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$. Условие перехода состоит в следующем: $|\varepsilon z| \ll 1$. Такое ограничение на искомую функцию $z(\tau)$ допускает ее значительный рост со временем: $|z(\tau)| \ll \varepsilon^{-1}$. Для упрощенных уравнений (1) ниже выделяются решения, определенные на полуоси $\tau > 0$ и неограниченно растущие на бесконечности: $z(\tau) \approx \lambda\tau$, $\tau \rightarrow \infty$. Возможность использования таких решений для исследования полной системы (6) ограничена сформулированным выше условием асимптотического перехода, которое приводит к ограничению промежутка времени: $0 < \tau \ll \varepsilon^{-1}$. Этот промежуток соответствует начальному этапу авторезонанса. Именно на этом этапе выявляются условия захвата в резонанс [10].

Поясним структуру коэффициентов в системе (1). На рассматриваемом этапе медленные деформации параметров внешнего поля можно считать линейными функциями времени, что индуцирует линейную зависимость коэффициентов уравнений. Например, это случается при линейном росте амплитуды $H_r(t)$ и частоты $\varphi'(t)$ поперечного поля³⁾ и при постоянном продольном поле $H_z = \text{const}$; последнее гарантирует постоянство коэффициента Ω_p . Если продольная компонента поля $H_z(t)$ меняется линейно, то выражения для $\omega_p(t) = \omega_p(0)(1 - \delta t)^{-1}$ и соответственно для $\Omega_n(\tau)$ и $\Omega_p(\tau)$ оказываются нелинейными по t [1], [2]. Однако, если изменения будут медленными, $\delta \leq O(\varepsilon^2)$, то в этих функциях достаточно учитывать линейные члены разложения:

$$\omega_p(t) = \omega_p(0) \left[1 + \varepsilon \left(\frac{\delta}{\varepsilon^2} \right) \tau + O(\delta^2 t^2) \right].$$

Следует отметить, что строгое доказательство асимптотической близости решений двух разных систем (6) и (1) не столь очевидно [14]. Эта проблема не обсуждается в настоящей работе.

³⁾Линейные по времени деформации параметров полей считаются предпочтительными в физических экспериментах.

4. РЕШЕНИЯ СО СТЕПЕННОЙ АСИМПТОТИКОЙ

В этом разделе решается вопрос о существовании решений с неограниченно растущей по времени амплитудой для уравнений (1). Асимптотика изолированных решений такого типа легко строится в виде степенных рядов с постоянными коэффициентами. Для одного из таких решений удается доказать экспоненциальную устойчивость. Именно устойчивые решения соответствуют физически реализуемым состояниям.

Надо иметь в виду, что при наличии диссипации, когда $\beta_1, \beta_2 > 0$, для существования решений с растущими амплитудами необходим неограниченный рост коэффициентов $A(\tau)$, $B(\tau)$ в правых частях уравнений⁴⁾. Если функции $A(\tau)$, $B(\tau)$ ограничены при $\tau \rightarrow \infty$, то решений с неограниченно растущей амплитудой не существует, как это видно из уравнений (1).

Для нелинейных уравнений с переменными коэффициентами типа (1), как правило, не удастся выписать никаких решений в явной форме через элементарные функции. Те частные случаи, когда это можно сделать, обычно не представляют интереса ввиду весьма специфических ограничений. Однако такие частные случаи полезны тем, что указывают на существование похожих решений в общей ситуации. Нас интересуют решения с неограниченно растущей амплитудой.

Например, для системы (1) с заданными функциями

$$\Omega(\tau) = \lambda_2 \tau^2 + \lambda_1 \tau + \lambda_0, \quad A(\tau) \equiv B(\tau) \equiv C(\tau) = -\tau \quad (7)$$

при специальных значениях констант λ_j можно выписать два решения в виде полиномов: $r(\tau) = \rho\tau + r_0$, $z(\tau) = \Omega(\tau)$, $\psi(\tau) = \psi_0$. Коэффициенты здесь определяются по формулам $\psi_0 = \pm\pi/2$, $\rho = -\sin\psi_0/\beta_2$, $r_0 = -\rho/\beta_2$, если константы λ_j удовлетворяют условиям согласования:

$$\lambda_2 = \frac{1}{\beta_1 \beta_2}, \quad \lambda_1 = -\frac{2\lambda_2 + 1/\beta_2^2}{\beta_1}, \quad \lambda_0 = -\frac{\lambda_1}{\beta_1}.$$

Если условия согласования не выполнены, то столь простых решений в виде полиномов не бывает. В таком случае для $r(\tau)$, $z(\tau)$, $\psi(\tau)$ можно строить бесконечные ряды по обратным степеням τ^{-n} . Такие ряды представляют собой асимптотику при $\tau \rightarrow \infty$ для решений, которые не выражаются через элементарные функции.

Для уравнений (1) с условиями (2) построение формального асимптотического решения в виде степенных рядов

$$\begin{aligned} r(\tau) &= r_1 \sqrt{\tau} + r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_{-n} \tau^{-n/2}, & z(\tau) &= \lambda \tau + z_1 \sqrt{\tau} + z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} \tau^{-n/2}, \\ \psi(\tau) &= \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{-n} \tau^{-n/2} \end{aligned} \quad (8)$$

не вызывает затруднений. Коэффициенты определяются по рекуррентным формулам, которые получаются после подстановки рядов в уравнения (1) и приравнивания выражений при одинаковых степенях. На этом пути строятся два решения, отлича

⁴⁾В более простой ситуации это было отмечено в работе [12].

в которых инициируются двумя корнями тригонометрического уравнения $\sin \psi_0 = 0$. Таким образом, $\psi_0 = 0$ либо $\psi_0 = \pi$ и, следовательно, $\cos \psi_0 = \pm 1$. Выпишем первые коэффициенты асимптотики:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\lambda \frac{\beta_1 a}{\beta_2 b}}, & z_1 &= -c \cos \psi_0 \sqrt{\frac{\beta_2 b}{\lambda \beta_1 a}}, \\ r_0 &= -\frac{c}{2\lambda} \cos \psi_0, & z_0 &= \lambda_0 - \frac{c^2 b \beta_2}{2\lambda^2 a \beta_1}, & \psi_{-1} &= \frac{1}{\cos \psi_0} \sqrt{\lambda \frac{\beta_1 \beta_2}{ab}} \operatorname{sgn}(a). \end{aligned}$$

С каждым из построенных рядов можно связать точное решение, для которого соответствующий ряд дает асимптотику на бесконечности [6], [15]. Для приложений интерес представляют лишь устойчивые решения, поскольку только они соответствуют физически реализуемым состояниям. Решение с фазой $\psi_0 = \pi$ оказывается неустойчивым, как это видно из анализа уравнений, линеаризованных на главном члене асимптотики: один из характеристических корней имеет положительную действительную часть. В случае $\psi_0 = 0$ такой подход непригоден, поскольку характеристические корни оказываются чисто мнимыми. В этой ситуации свойство устойчивости зависит от младших членов асимптотики и определяется из анализа неавтономных уравнений [16].

5. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ СТЕПЕННОГО РЕШЕНИЯ

Для доказательства устойчивости в подобных задачах существует несколько способов, один из которых состоит в построении асимптотики на бесконечности для общего решения. Такой способ дает исчерпывающий результат и был реализован в ряде работ для более простой системы двух уравнений главного резонанса [10], [12]. Здесь же мы используем другой стандартный подход теории устойчивости: конструирование функции Ляпунова.

Рассмотрим решение, степенная асимптотика которого (8) определяется выбором фазы $\psi_0 = 0$. Обозначим компоненты этого решения через $R_0(\tau)$, $Z_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$. Для определенности считаем, что $\lambda > 0$, $a = b = -1$.

ТЕОРЕМА. Если $\beta_1 > (1 + c)\beta_2$, $\beta_2 > 0$, то решение $R_0(\tau)$, $Z_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ асимптотически устойчиво при $\tau \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $a = b = -1$, то для выбранного решения асимптотика при $\tau \rightarrow \infty$ описывается формулами

$$R_0(\tau) = \nu^2 \sqrt{\tau} + r_0 + O(\tau^{-1/2}), \quad Z_0(\tau) = \lambda \tau + O(\sqrt{\tau}), \quad \Psi_0(\tau) = \tau^{-1/2} \psi_1 + O(\tau^{-1}).$$

Коэффициенты главных членов $\nu^2 = \sqrt{\lambda \beta_1 / \beta_2}$, $r_0 = -c/(2\lambda)$, $\psi_1 = -\nu^2 \beta_2$ используются в конструкции функции Ляпунова.

Как обычно в подобных ситуациях, удобно выделить рассматриваемое решение и, сделав сдвиг, перейти к задаче об устойчивости положения равновесия в начале координат. Для облегчения последующих построений выгодно вместе со сдвигом сделать дополнительное преобразование переменных. С этой целью в уравнениях (1) делается замена

$$r = R_0(\tau) + \frac{\tau^{1/4}}{\nu} R(t), \quad z = Z_0(\tau) + \tau^{3/4} \nu Z(t), \quad \psi = \Psi_0(\tau) + \Psi(t), \quad t = \frac{4}{7} \tau^{7/4}. \quad (9)$$

Благодаря выбранной нормировке амплитуд R, Z получающиеся для них уравнения совпадают в главном члене асимптотики. Это позволяет несколько упростить последующую конструкцию, записав одно из уравнений для разности амплитуд $R - Z = \rho$. В итоге приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} - \nu Z &= F(\Psi, Z, \rho, t), & \frac{dZ}{dt} + \nu \sin \Psi &= G(\Psi, Z, \rho, t), \\ \frac{d\rho}{dt} &= H(\Psi, Z, \rho, t). \end{aligned} \quad (10)$$

Правые части здесь являются гладкими функциями, которые стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ и обращаются в нуль при $\Psi = Z = \rho = 0$.

Для построения функции Ляпунова в окрестности этого положения равновесия используются несколько членов асимптотики правых частей. Такую асимптотику нетрудно выписать, используя первые члены асимптотики выделенного решения:

$$\begin{aligned} F &= -\tau^{-1/4} 2c\nu^{-2} \sin^2 \frac{\Psi}{2} - \tau^{-1/2} c\nu^{-5} (Z + \rho) \cos \Psi + \\ &+ \tau^{-3/4} c \left[\nu^{-8} (Z + \rho)^2 \cos \Psi + 2r_0 \nu^{-4} \sin^2 \frac{\Psi}{2} - \psi_1 \nu^{-2} \sin \Psi \right] + f(\Psi, Z, \rho, t), \\ G &= -\tau^{-1/4} \nu^{-2} (Z + \rho) \sin \Psi + \tau^{-1/2} \left[2\nu \psi_1 \sin^2 \frac{\Psi}{2} - r_0 \nu^{-1} \sin \Psi \right] - \\ &- \tau^{-3/4} [\beta_1 Z + \nu^{-2} \psi_1 (Z + \rho) \cos \Psi] + g(\Psi, Z, \rho, t), \\ H &= \tau^{-1/4} \nu^{-2} (Z + \rho) \sin \Psi + \tau^{-1/2} r_0 \nu^{-1} \sin \Psi - \\ &- \tau^{-3/4} [\beta_2 \rho + (\beta_2 - \beta_1) Z - \nu^{-2} \psi_1 (Z + \rho) \cos \Psi] + h(\Psi, Z, \rho, t). \end{aligned}$$

Остатки в этих формулах быстро убывают на бесконечности:

$$f, g, h(\Psi, Z, \rho, t) = O(\tau^{-1}), \quad \tau \rightarrow \infty, \quad \tau = \left(\frac{7}{4} t \right)^{4/7},$$

равномерно по Ψ, Z, ρ на любом компакте.

Для автономной системы, которая получается в пределе $t \rightarrow \infty$ и по сути дела представляет собой математический маятник, положение равновесия $\Psi = Z = \rho = 0$ будет устойчивым. В частности, функция Ляпунова выписывается через гамильтониан маятника:

$$\mathbf{V}_0(Z, \Psi, \rho) = 1 - \cos \Psi + \frac{Z^2}{2} + \frac{\rho^2}{2}.$$

Однако отсюда вовсе не следует устойчивость равновесия для полной неавтономной системы. Как показывает пример уравнения Бесселя, устойчивость в подобных системах зависит от структуры неавтономных слагаемых.

Для полной неавтономной системы (10) функция Ляпунова строится путем добавления слагаемых, убывающих на бесконечности:

$$\mathbf{V}(Z, \Psi, \rho, t) = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1 \tau^{-1/4} + \mathbf{V}_2 \tau^{-1/2} + \mathbf{V}_3 \tau^{-3/4}.$$

Добавки $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3(\Psi, Z, \rho)$ содержат нелинейности не ниже квадратичных при $\Psi, Z, \rho \rightarrow 0$, что гарантирует для функции $\mathbf{V}$ положительную определенность в окрестности равновесия на достаточно далеких временах $t \geq T$. Выбор функций $\mathbf{V}_1,$

$\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ производится из соображений отрицательной определенности производной $d\mathbf{V}(Z, \Psi, \rho, t)/dt$ вдоль траекторий системы (10). Такое свойство удается обеспечить за счет диссипативных слагаемых, которые в уравнениях (10) содержатся при степени $\tau^{-3/4}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= \nu^{-3} \left[Z\rho^2 - \frac{(c+1)Z^3}{3} - 2cZ \sin^2 \frac{\Psi}{2} \right], \\ \mathbf{V}_2 &= -\psi_1(\Psi - \sin \Psi) + \nu^{-2} r_0 Z \left(\rho - \frac{Z}{2} \right) + \nu^{-6} \left[-\frac{c}{4}(c+2)(\cos 2\Psi - 1) - \right. \\ &\quad \left. - 2cZ\rho \cos \Psi + (c+1)Z^3 \left(\rho + \frac{Z}{4} \right) + \frac{\rho^2 Z^2}{2} - \rho^3 Z + (c+1)c \frac{Z^2}{2} + c\rho Z \right], \\ \mathbf{V}_3 &= \nu^{-1} [\alpha Z \sin \Psi + (\beta_2 - \beta_1)\rho\Psi], \quad \alpha = \text{const}.\end{aligned}$$

Для такой конструкции полная производная функции $\mathbf{V}(Z, \Psi, \rho, t)$ убывает при $t \rightarrow \infty$ и в главном члене асимптотики содержит квадратичную форму. С учетом соотношения $\psi_1 = -\beta_2\nu^2$ ее можно представить в виде

$$\left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_{(10)} = -\tau^{-3/4} [(\beta_1 - \beta_2 - \alpha)Z^2 + (\alpha - c\beta_2)\Psi^2 + 2\beta_2\rho^2 + \omega(Z, \Psi, \rho, t)]. \quad (11)$$

Здесь функция $\omega(Z, \Psi, \rho, t)$ состоит из слагаемых, которые либо не содержат линейных членов в окрестности равновесия, $O(Z^2 + \Psi^2 + \rho^2)$, и малы на бесконечности, $O(\tau^{-1})$, либо малы в окрестности равновесия, $O((Z^2 + \Psi^2 + \rho^2)^{3/2})$, равномерно по t . Поэтому для остатка получается оценка

$$|\omega| \leq \mu(Z^2 + \Psi^2 + \rho^2),$$

равномерная для всех $t \geq T$ в окрестности равновесия $\Psi^2 + Z^2 + \rho^2 < \delta^2$. Константа $\mu = \mu(T, \delta) > 0$ может быть сделана сколь угодно малой за счет увеличения границы T и уменьшения радиуса окрестности δ .

Квадратичная форма, которая содержится в выражении для производной (11), будет отрицательной при подходящем выборе константы $\alpha = [\beta_1 - \beta_2(1 - c)]/2$. В этом случае для производной получается оценка

$$\left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_{(10)} \leq -(m - \mu)(\Psi^2 + Z^2 + \rho^2)$$

с константой $m = \min\{\beta_1 - \beta_2(1 + c), 2\beta_2\} > 0$, которая положительна при условиях теоремы. Поскольку μ можно сделать сколь угодно малой, то отсюда немедленно вытекает отрицательность производной в малой окрестности равновесия при всех достаточно больших $t \geq T$. Тем самым в силу теоремы Ляпунова положение равновесия асимптотически устойчиво в задаче для Ψ, Z, ρ [17], [18].

Однако, чтобы на основе формул (9), в которых содержатся растущие множители, сделать вывод об устойчивости решения $R_0(t), Z_0(t), \Psi_0(t)$, требуется информация о скорости убывания функций $Z(t), \rho(t)$. Такую информацию можно извлечь из неравенства для производной. Построенная выше функция Ляпунова оценивается сверху через квадратичную форму $\mathbf{V}(Z, \Psi, \rho, t) \leq \Psi^2 + Z^2 + \rho^2$ равномерно для

всех $t \geq T$ в достаточно малой окрестности равновесия. Поэтому из оценки для производной вытекает неравенство

$$\left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_{(10)} \leq -\tau^{-3/4}(m - \mu)V, \quad \tau = \left(\frac{7}{4}t \right)^{4/7}.$$

Отсюда после интегрирования видно, что функция Ляпунова на траектории системы (10) экспоненциально стремится к нулю:

$$\mathbf{V}(Z, \Psi, \rho, t)|_{(10)} \leq \text{const} \cdot e^{-\nu t^{4/7}}, \quad \nu = \left(\frac{7}{4} \right)^{3/7} (m - \mu).$$

Подобные неравенства справедливы для всех компонент $\Psi(t)$, $Z(t)$, $\rho(t)$, поскольку функцию Ляпунова можно оценить снизу квадратичной формой: $(\Psi^2 + Z^2 + \rho^2)/4 \leq \mathbf{V}(Z, \Psi, \rho, t)$. Теперь на основе формул (9) делается вывод об асимптотической устойчивости решения $R_0(t)$, $Z_0(t)$, $\Psi_0(t)$. Теорема доказана.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для модельной системы уравнений (1) доказано существование устойчивого по Ляпунову решения с неограниченно растущей амплитудой $z(\tau)$, $r(\tau)$. Такое решение описывает начальный этап авторезонанса в системе уравнений Блоха (3). Тем самым установлена возможность значительного изменения ядерной намагниченности в магнитных кристаллах посредством слабого внешнего РЧ-поля с медленно меняющейся частотой.

В главном члене асимптотики рост амплитуды колебаний $z(\tau) \approx \lambda\tau$, $r(\tau) \approx \sqrt{\tau\lambda\beta_1/\beta_2}$ соответствует изменению частоты и не связан с коэффициентами a , b , c , описывающими рост амплитуды накачки. Так же, как в работе [12], рост амплитуды внешнего поля необходим для компенсации слабых диссипативных эффектов. Эффект роста намагниченности обусловлен резонансом, который долгое время поддерживается автоматически.

Благодарности. Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-01-92436, 10-01-00186) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2215.2008.01).

Список литературы

- [1] М. И. Куркин, Е. А. Туров, *ЯМР в магнитоупорядоченных веществах и его применения*, Физматлит, М., 1990.
- [2] А. С. Боровик-Романов, Ю. М. Буньков, Б. С. Думеш, М. И. Куркин, М. П. Петров, В. П. Чекмарев, *УФН*, **142**:4 (1984), 537–570.
- [3] А. И. Нейштадт, *ПММ*, **39**:4 (1975), 621–632.
- [4] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, “Математические аспекты классической и небесной механики”, *Динамические системы – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, ВИНТИ, М., 1985, 5–290.
- [5] А. Р. Itin, А. И. Neishtadt, А. А. Vasiliev, *Physica D*, **141**:3–4 (2000), 281–296.
- [6] В. В. Козлов, С. Д. Фурта, *Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений*, Изд-во МГУ, М., 1996.

- [7] А. Д. Брюно, *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях*, Наука, М., 1998.
- [8] Л. А. Калякин, *ТМФ*, **137**:1 (2003), 142–152.
- [9] J. Fajans, L. Frièdland, *Amer. J. Phys.*, **69**:10 (2001), 1096–1102.
- [10] Л. А. Калякин, *УМН*, **63**:5(383) (2008), 3–72.
- [11] Л. А. Калякин, М. А. Шамсутдинов, *Тр. ИММ*, **13**, 2007, 104–119.
- [12] Л. А. Калякин, М. А. Шамсутдинов, *ТМФ*, **160**:1 (2009), 102–111.
- [13] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, М., 1974.
- [14] Р. Н. Гарифуллин, *Докл. РАН*, **398**:3 (2004), 306–309.
- [15] А. Н. Кузнецов, *Функц. анализ и его прил.*, **23**:4 (1989), 63–74.
- [16] О. А. Султанов, *Уфимск. матем. журн.*, **2**:4 (2010), 88–98.
- [17] И. Г. Малкин, *Теория устойчивости движения*, ГИТТЛ, М., Л., 1952.
- [18] Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Физматгиз, М., 1959.