Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Киселев, Й. В. ван де Лёр, Вариационные алгеб-
роиды Ли и гомологические эволюционные векторные
поля, *ТМФ*, 2011, том 167, номер 3, 432–447

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6652>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:39:46

© 2011 г.

А. В. Киселёв^{*†}, Й. В. ван де Лёр^{*}

ВАРИАЦИОННЫЕ АЛГЕБРОИДЫ ЛИ И ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Дано определение алгеброидов Ли над пространствами бесконечных струй и получена его эквивалентная формулировка в терминах гомологических эволюционных векторных полей.

Ключевые слова: алгеброид Ли, БРСТ-дифференциал, пуассонова структура, интегрируемые системы, теория струн.

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие алгеброидов Ли над гладкими многообразиями является важным в дифференциальной геометрии (в особенности, в пуассоновой геометрии) и возникает в различных моделях математической физики (например, в пуассоновых сигма-моделях). Мы обобщаем классическое определение алгеброидов Ли над гладкими многообразиями [1] и вводим конструкцию вариационных алгеброидов Ли над пространствами бесконечных струй. Эти структуры мы определяем как стандартным образом, через векторные расслоения, так и в терминах гомологических векторных полей $Q^2 = 0$ на суперрасслоениях бесконечных струй, доказывая затем эквивалентность двух определений. Предложенное нами обобщение классической конструкции в явной форме учитывает ту геометрию, которая возникает при отображениях гладких многообразий. Таким образом, развиваемый в настоящей работе вариационный подход более полно отражает геометрию струн в пространстве-времени [2].

Сначала мы напоминаем (весьма кратко) определение обычных алгеброидов Ли; все дальнейшие подробности см. в работе [1] (а также в обзорах [3] и приведенных там ссылках). Общеизвестными примерами алгеброидов Ли над обычными многообразиями служат касательное расслоение или структура пуассонова алгеброида на кокасательном расслоении к пуассонову многообразию. Вместе с тем собственно алгебры Ли являются тривиальными примерами алгеброидов Ли над точкой.

^{*}Mathematical Institute, University of Utrecht, Utrecht, The Netherlands.
E-mail: A.V.Kiselev@rug.nl, J.W.vandeLeur@uu.nl

[†]Johann Bernoulli Institute for Mathematics and Computer Science, University of Groningen, Groningen, The Netherlands.

По аналогии мы будем трактовать гладкие многообразия M^m как (крайне бедные) “пространства бесконечных струй” отображений точки в эти многообразия, которые становятся “слоями” в “расслоениях” $\pi: M^m \rightarrow \{\text{pt}\}$. Такое донельзя нестрогое (но в равной степени продуктивное!) описание служит отправной точкой наших рассуждений. Ниже мы установим, во что превращаются алгеброиды Ли над M^m при переходе от точки в качестве базы расслоения к n -мерному многообразию Σ^n , которое задает настоящее расслоение струй $J^\infty(\Sigma^n \rightarrow M^m)$.

Результаты настоящей статьи изложены в следующем порядке. Прежде всего, мы отмечаем, что буквальный перенос классического определения для гладких многообразий на случай расслоений бесконечных струй невозможен, поскольку над ними с самого начала теряет силу правило Лейбница (точно так же, как для коммутаторов эволюционных векторных полей или для вариационной скобки Пуассона [4]). По этой причине в разделе 2 мы принимаем за определение должным образом выбранное следствие классического определения, а именно замкнутость образов якорей относительно коммутирования (примечательно, что это свойство часто для удобства формулируют как одну из составляющих определения алгеброида Ли вместо того, чтобы его вывести, см., например, работы [1], [5] в противоположность [6], [7]). На этом языке переформулировка основного результата нашей работы [8] звучит так: непериодические двумеризованные уравнения Тоды, ассоциированные с полупростыми комплексными алгебрами Ли [9], – представители обширного класса гиперболических лагранжевых систем лиувиллева типа [10] – суть вариационные алгеброиды Ли.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Необходимо уточнить, что определение алгеброидов Ли над пространствами конечных струй сечений *касательного* расслоения $\pi: T\Sigma \rightarrow \Sigma^n$ было дано в работе [11]. В настоящей статье, напротив, векторное расслоение π может быть каким угодно. Не ограниченные одним лишь касательным расслоением (как в [11]), рассматриваемые ниже модельные примеры имеют совершенно иную природу. А именно, мы заимствуем их из геометрии дифференциальных уравнений, рассматривая, в частности, гамильтоновы (не)эволюционные системы [12] или двумеризованные цепочки Тоды [9], решения которых – это r функций двух переменных, а r – ранг произвольной полупростой комплексной алгебры Ли. Иными словами, мы изучаем общий случай, когда размерности базы и слоя расслоения π , вообще говоря, никак не связаны между собой.

В разделе 3 мы строим представление структуры вариационного алгеброида Ли $\mathfrak{A}$, определенного описанным выше способом, в терминах гомологического эволюционного векторного поля Q на расслоении бесконечных струй сечений суперрасслоения $P\mathfrak{A}$, понимаемого как векторное расслоение с противоположной четностью слоев. Данный переход также нетривиален, поскольку правило Лейбница, используемое при доказательстве эквивалентности двух картин в случае классического определения, теперь утрачено. Здесь же мы налагаем естественное условие невырожденности на вариационные якоря, чтобы нечетное поле Q было корректно определено. Для иллюстрации мы выбираем в качестве вариационных якорей гамильтоновы дифференциальные операторы; так мы получаем поля Q , которые в свою очередь сами оказываются гамильтоновыми относительно соответствующих

им вариационных пуассоновых бивекторов и канонической симплектической структуры, рассмотренной в работе [13].

На протяжении всей статьи основным полем служит поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел, и мы предполагаем, что все отображения бесконечно гладкие. Мы также будем считать, что все дифференциальные операторы в полных производных локальны, т. е. полиномиальны по полным производным. Кроме того, предположим, что все пространства чисто четные: ни одно многообразие не является супермногообразием, кроме тех, про которые сказано обратное, – тех, которые возникают за счет явной смены четности с помощью преобразования Π . Мы применяем стандартные конструкции из геометрии дифференциальных уравнений [4], [14]; для удобства мы напоминаем требуемые понятия в начале раздела 2. Поскольку все рассуждения проводятся локально, мы с самого начала переходим к соответствующим картам атласа и вместо расслоений струй отображений $\Sigma^n \rightarrow M^m$ многообразий рассматриваем пространства струй сечений m -мерных векторных расслоений $\pi: E^{m+n} \rightarrow \Sigma^n$. По существу, мы даем все определения для одних лишь пространств бесконечных струй, не делая также различия между автономными эволюционными уравнениями и эволюционными векторными полями (что общепринято). Выяснение всех деталей тонкого различия между определениями рассматриваемых здесь структур на пустых пространствах струй и на дифференциальных уравнениях потребовало бы значительно более объемного изложения; этот вопрос будет рассмотрен в другой статье. Пока что мы отсылаем читателя к обзору [12].

Наши обозначения следуют статьям [8], [15], [16] и в целом согласуются с обозначениями из работ [3], [4], [14]. Настоящая работа является продолжением публикаций [8], [16], в которых приведены мотивирующие примеры вариационных алгеброидов Ли. Некоторые из результатов, рассматриваемых здесь по возможности досконально, были кратко анонсированы ранее в препринте [17].

Обычные алгеброиды Ли: обзор. Пусть M^m – гладкое вещественное m -мерное многообразие ($1 \leq m \leq +\infty$) и $TM \rightarrow M^m$ – его касательное расслоение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. *Алгеброидом Ли* над многообразием M^m называется векторное расслоение $\xi: \Omega^{d+m} \rightarrow M^m$, пространство сечений которого, обозначаемое через $\Gamma\Omega$, наделено структурой $[\cdot, \cdot]_A$ алгебры Ли и морфизмом расслоений $A: \Omega \rightarrow TM$, называемым *якорем*, так, что выполнено правило Лейбница

$$[f \cdot \mathcal{X}, \mathcal{Y}]_A = f \cdot [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_A - (A(\mathcal{Y})f) \cdot \mathcal{X} \quad (1)$$

для любых $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Gamma\Omega$ и произвольной функции $f \in C^\infty(M^m)$.

По существу, якорь в алгеброиде Ли является подчиненным некоторым дополнительным условиям послойно линейным отображением из наперед заданного векторного расслоения над гладким многообразием M^m в его касательное расслоение.

ЛЕММА 1 [6]. *Якорь A отображает скобку $[\cdot, \cdot]_A$ сечений векторного расслоения ξ в скобку Ли $[\cdot, \cdot]$ сечений касательного расслоения над многообразием M^m .*

Это свойство является следствием правила Лейбница (1) и тождества Якоби для структуры алгебры Ли $[\cdot, \cdot]_A$ на $\Gamma\Omega$.

ЛЕММА 2 [1]. *Структуру алгеброида Ли на пространстве Ω можно эквивалентным образом задать как гомологическое векторное поле Q на $\Pi\Omega$ (чтобы*

получить новое суперрасслоение $\Pi\Omega$ над M^m , нужно изменить четность слоев расслоения Ω на противоположную). Гомологическое векторное поле, являющееся дифференциалом на пространстве $C^\infty(\Pi\Omega) = \Gamma(\bigwedge^\bullet \Omega^*)$, равно

$$Q = A_i^\alpha(u) b^i \frac{\partial}{\partial u^\alpha} - \frac{1}{2} b^i c_{ij}^k(u) b^j \frac{\partial}{\partial b^k}, \quad [Q, Q] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2Q^2 = 0, \quad (2)$$

где:

- (u^α) – система локальных координат в окрестности точки $u \in M^m$;
- (p^i) – локальные координаты вдоль d -мерных слоев в Ω , а (b^i) – соответствующие им координаты на $\Pi\Omega$;
- формула $[e_i, e_j]_A = c_{ij}^k(u) e_k$ задает структурные константы в d -элементном базисе локальных сечений расслоения $\Gamma\Omega$ над точкой u , а $A(e_i) = A_i^\alpha(u) \cdot \partial/\partial u^\alpha$ – образ вектора e_i при его отображении якорем A .

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Антиккоммутатор $[Q, Q] = 2Q^2$ нечетного векторного поля Q с самим собой – это также векторное поле. В нем коэффициент при $\partial/\partial u^\alpha$ равен нулю благодаря тому, что (в силу леммы 1) A является гомоморфизмом алгебр Ли. Равенство нулю коэффициента при $\partial/\partial b^q$ устанавливается за три шага. Заметим, во-первых, что действие второго слагаемого в (2) само на себя (причем для векторных полей справедливо градуированное правило Лейбница) приводит к численному множителю $1/4$, но он удвоится вследствие кососимметричности структурных констант c_{ij}^k . Во-вторых, распознаем правую часть правила Лейбница (1) с величинами $c_{ij}^k(u)$, подставленными в качестве функции $f \in C^\infty(M^m)$, в слагаемом

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j,n} b^i b^j b^n \left(-A_n^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} (c_{ij}^q(u)) + c_{ij}^\ell c_{\ell n}^q \right) \cdot \frac{\partial}{\partial b^q}. \quad (3)$$

В-третьих, заметим, что *циклическая* перестановка $i \rightarrow j \rightarrow n \rightarrow i$ нечетных переменных b^i, b^j, b^n не приводит к смене знака в выражении (3). Следовательно, утроим его, беря сумму по циклическим перестановкам (но и одновременно разделим на три), и в качестве коэффициента при $\partial/\partial b^q$ получим тождество Якоби для скобки $[\cdot, \cdot]_A$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{\odot} [[e_i, e_j]_A, e_n]_A = 0. \quad (4)$$

Стоящий в правой части ноль дает искомый коэффициент. Итак, $Q^2 = 0$.

2. ВАРИАЦИОННЫЕ АЛГЕБРОИДЫ ЛИ

Для полноты изложения напомним обозначения. Пусть Σ^n – n -мерное ориентируемое гладкое вещественное многообразие; рассмотрим над ним векторное расслоение $\pi: E^{m+n} \xrightarrow{M^m} \Sigma^n$ с m -мерными слоями $M^m \ni u = (u^1, \dots, u^m)$. Пространство бесконечных струй сечений расслоения π обозначим через $J^\infty(\pi)$ и положим $\pi_\infty: J^\infty(\pi) \rightarrow \Sigma^n$. Соответствующие координаты вдоль слоев суть u_σ , $|\sigma| \geq 0$. Введем обозначение $[u]$, выражающее дифференциальную зависимость от переменных u и их производных не выше некоторого произвольно высокого, но конечного порядка; положим $\mathcal{F}(\pi) := C^\infty(J^\infty(\pi))$, понимая эту алгебру сообразно сделанной выше оговорке (как индуктивный предел фильтрованных алгебр, см. [4]).

Пусть $\xi: N \rightarrow \Sigma^n$ – еще одно векторное расслоение над той же базой Σ^n ; используя π_∞ , построим из него индуцированное расслоение $\pi_\infty^*(\xi): N \times_{\Sigma^n} J^\infty(\pi) \rightarrow J^\infty(\pi)$. По определению $\mathcal{F}(\pi)$ -модуль сечений $\Gamma(\pi_\infty^*(\xi)) = \Gamma(\xi) \otimes_{C^\infty(\Sigma^n)} \mathcal{F}(\pi)$ называется *горизонтальным* [18].

ПРИМЕР 1. Со всяким пространством струй $J^\infty(\pi)$ канонически ассоциированы три горизонтальных $\mathcal{F}(\pi)$ -модуля (см., например, [18]). Прежде всего, положим $\xi := \pi$ и получим $\mathcal{F}(\pi)$ -модуль $\Gamma(\pi_\infty^*(\pi)) = \Gamma(\pi) \otimes_{C^\infty(\Sigma^n)} \mathcal{F}(\pi)$. Для краткости обозначим его через $\varkappa(\pi) \equiv \Gamma(\pi_\infty^*(\pi))$. Принадлежащие ему сечения $\varphi \in \varkappa(\pi)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с π -вертикальными эволюционными дифференцированиями $\partial_\varphi = \sum_\sigma d^{|\sigma|} \varphi / dx^\sigma \cdot \partial / \partial u_\sigma$ на $J^\infty(\pi)$, где

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + \dots$$

– полная производная. Для всех ψ таких, что выражение $\partial_\varphi(\psi)$ определено, их линеаризации $\ell_\psi^{(u)}$ заданы формулой $\ell_\psi^{(u)}(\varphi) = \partial_\varphi(\psi)$, где $\varphi \in \varkappa(\pi)$.

Далее, пусть ξ – q -я внешняя степень кокасательного расслоения $T^*\Sigma$ при $q \leq n$. Рассмотрим индуцированное расслоение $\pi_\infty^*(\xi)$ и получим горизонтальный $\mathcal{F}(\pi)$ -модуль $\bar{\Lambda}^q(\pi)$ его сечений, которые называются *горизонтальными q -формами* на пространстве струй $J^\infty(\pi)$. В локальных координатах эти сечения можно записать в виде $h(x, [u]) \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}$, где $h \in \mathcal{F}(\pi)$ и $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$.

Наконец, рассмотрим модуль $\bar{\Lambda}^n(\pi)$ π -горизонтальных форм высшей степени на $J^\infty(\pi)$. Обозначим через $\hat{\varkappa}(\pi) = \text{Hom}_{\mathcal{F}(\pi)}(\varkappa(\pi), \bar{\Lambda}^n(\pi))$ горизонтальный $\mathcal{F}(\pi)$ -модуль, двойственный к $\varkappa(\pi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Структура слоев расслоения ξ может быть сложной, а их размерность – бесконечной. Приведенный ниже пример является в определенном смысле каноническим и формализует геометрию двумеризованных систем Тоды [8]. А именно, пусть $\zeta: I^{r+n} \xrightarrow{W^r} \Sigma^n$ – векторное расслоение с r -мерными слоями, на которых $w = (w^1, \dots, w^r)$ – локальные координаты. Рассмотрим расслоение бесконечных струй $\xi_\infty: J^\infty(\xi) \rightarrow \Sigma^n$ и положим по определению либо $\xi = \zeta_\infty \circ \zeta_\infty^*(\zeta): \varkappa(\xi) \rightarrow \Sigma^n$, либо $\xi = \zeta_\infty \circ \zeta_\infty^*(\hat{\zeta}): \hat{\varkappa}(\xi) \rightarrow \Sigma^n$. Чтобы избежать нагромождения формул, всюду далее мы будем использовать сокращенное обозначение $\Gamma\Omega(\xi_\pi)$ для рассматриваемого $\mathcal{F}(\pi)$ -модуля.

По определению отображения между $\mathcal{F}(\pi)$ -модулями называются *дифференциальными операторами в полных производных*, если они являются суммами композиций $\mathcal{F}(\pi)$ -линейных отображений и поднятий векторных полей с базы Σ^n на $J^\infty(\pi)$ при помощи связности Картана $\partial/\partial x \mapsto d/dx$. Основные объекты нашего исследования – матричные линейные дифференциальные операторы в полных производных, принимающие значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}(\pi) = (\varkappa(\pi), [\cdot, \cdot])$.

Пусть выполнены все сделанные выше предположения, а обозначения также следуют введенным ранее. Рассмотрим дифференциальный оператор в полных производных $A: \Gamma\Omega(\xi_\pi) \rightarrow \varkappa(\pi)$, образ которого замкнут относительно коммутирования в алгебре $\mathfrak{g}(\pi)$:

$$[\text{im } A, \text{im } A] \subseteq \text{im } A \iff [A(\mathbf{p}), A(\mathbf{q})] = A([\mathbf{p}, \mathbf{q}]_A), \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Gamma\Omega(\xi_\pi). \quad (5)$$

Оператор A задает по структуре алгебры Ли $[\cdot, \cdot]_{\text{im } A}$ в подалгебре Ли алгебры $\mathfrak{g}(\pi)$ скобку $[\cdot, \cdot]_A$ на факторпространстве $\Gamma\Omega(\xi_\pi)/\ker A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Тройка

$$(\Gamma\Omega(\xi_\pi), [\cdot, \cdot]_A) \xrightarrow{A} (\mathfrak{g}(\pi), [\cdot, \cdot]) \quad (6)$$

называется *вариационным алгеброидом Ли* $\mathfrak{A}$ над пространством бесконечных струй $J^\infty(\pi)$, а гомоморфизм алгебр Ли A – *вариационным якорем*.

По существу, вариационный якорь в вариационном алгеброиде Ли является подчиненным некоторым дополнительным условиям линейным отображением из наперед заданного горизонтального модуля сечений индуцированного расслоения над пространством бесконечных струй $J^\infty(\pi)$ в фиксированный горизонтальный модуль производящих сечений эволюционных дифференцирований на $J^\infty(\pi)$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим гамильтонов оператор

$$A_2 = -\frac{1}{2} \frac{d^3}{dx^3} + w \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \circ w,$$

задающий вторую пуассонову структуру уравнения КдФ $w_t = -w_{xxx}/2 + 3ww_x$. Образ оператора A_2 замкнут относительно коммутирования: скобка $[\cdot, \cdot]_{A_2}$ равна [10]

$$[p, q]_{A_2} = \partial_{A_2(p)}(q) - \partial_{A_2(q)}(p) + \frac{d}{dx}(p) \cdot q - p \cdot \frac{d}{dx}(q). \quad (7)$$

ПРИМЕР 3. В работе [16] мы отмечали, что бездисперсная трехкомпонентная система Буссинеска гидродинамического типа допускает двухпараметрическое семейство конечных деформаций $[\cdot, \cdot]_\epsilon$ стандартной скобки $[\cdot, \cdot]$ в алгебре симметрий $\text{sym } \mathcal{E}$ этого уравнения. Для обоснования этого мы использовали два дифференциальных оператора рекурсии $R_i: \text{sym } \mathcal{E} \rightarrow \text{sym } \mathcal{E}$, $i = 1, 2$, образы которых замкнуты относительно коммутирования и которые, более того, *совместны* в указанном смысле – они порождают двумерное линейное пространство операторов R_ϵ с инволютивными образами. Новые скобки $[\cdot, \cdot]_\epsilon$ получаются тогда по формуле (5) (см. статью [19] и содержащиеся в ней ссылки): $[R_\epsilon(p), R_\epsilon(q)] = R_\epsilon([p, q]_\epsilon)$, где $p, q \in \text{sym } \mathcal{E}$ и $\epsilon \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как обычно, мы трактуем автономные эволюционные уравнения как π -вертикальные эволюционные векторные поля на расслоениях бесконечных струй $J^\infty(\pi)$ сечений векторных расслоений π над $\Sigma^n \ni x$. Рассматриваемая ситуация сводится таким образом к “вырожденному” случаю пустого пространства струй.

Вообще говоря, теорема Фробениуса неверна для инволютивных распределений, порожденных образами вариационных якорей. Однако системы $\mathcal{E}$ уравнений Эйлера–Лагранжа лиувиллева типа [8], [10] являются исключением благодаря уникальной структуре своих симметрий: вариационные якоря задают инволютивные распределения эволюционных векторных полей, касающихся интегральных многообразий, что неудивительно, самих уравнений $\mathcal{E}$. В таком случае (когда уравнение $\mathcal{E} \subset J^\infty(\pi)$ задано) мы должным образом ограничиваем определение вариационного алгеброида Ли на бесконечномерное многообразие $\mathcal{E}$ так, что в образе вариационных якорей лежат его симметрии, и, если требуется, уменьшаем слои расслоения ξ .

ПРИМЕР 4. Образующие алгебры Ли точечных симметрий $(2+1)$ -мерного “небесного” уравнения Тоды $u_{xy} = e^{-u_{zz}}$ [20] имеют вид $\varphi^x = \hat{\square}^x(p(x))$ либо $\varphi^y = \hat{\square}^y(\bar{p}(y))$, где p и $\bar{p}$ – произвольные гладкие функции и

$$\hat{\square}^x = u_x + \frac{1}{2}z^2 \frac{d}{dx}, \quad \hat{\square}^y = u_y + \frac{1}{2}z^2 \frac{d}{dy}.$$

Образ каждого из операторов замкнут относительно коммутирования так, что

$$[p, q]_{\hat{\square}^x} = \partial_{\hat{\square}^x(p)}(q) - \partial_{\hat{\square}^x(q)}(p) + p \cdot \frac{d}{dx}(q) - \frac{d}{dx}(p) \cdot q$$

для любых $p(x)$ и $q(x)$, и аналогично для $\hat{\square}^y$.

ПРИМЕР 5. Два особо важных примера вариационных алгеброидов Ли происходят из вариационного (ко)касательного расслоения над $J^\infty(\pi)$ (см. пример 1 и замечание 2). В обоих случаях их существенной составной частью оказывается подстановка Миуры, которую мы обсуждали в работе [8].

А именно, рассмотрим индуцированное расслоение $\pi_\infty^*(\zeta)$ и фиксируем какое-либо его сечение w . Поскольку это не вызовет никакой путаницы, мы продолжим обозначать одной и той же буквой w и координаты вдоль слоя ζ , и фиксированное сечение $w[u] \in \Gamma(\pi_\infty^*(\zeta))$, которое является нелинейным дифференциальным оператором по u .

Очевидно, что подстановка $w = w[u]$ превращает горизонтальные $\mathcal{F}(\zeta)$ -модули в подмодули горизонтальных $\mathcal{F}(\pi)$ -модулей¹⁾. Так мы получаем модули

$$\varkappa(\zeta)|_{w[u]: J^\infty(\pi) \rightarrow \Gamma(\zeta)}, \quad \widehat{\varkappa}(\zeta)|_{w[u]: J^\infty(\pi) \rightarrow \Gamma(\zeta)},$$

понимая последний как модуль сечений расслоения, индуцированного с помощью π_∞^* из расслоения, двойственного к $\zeta_\infty^*(\zeta)$ относительно спаривания со значениями в $\Lambda^n(\zeta)$. Обратим особое внимание, что с помощью именно этого построения нам удастся сохранить истинные правила преобразования для сечений, лежащих в $\varkappa(\zeta)$ или в $\widehat{\varkappa}(\zeta)$, при (никак не связанных между собой!) заменах координат вдоль слоя расслоений ζ и π , т. е. соответственно координат w и u .

Будем говорить, что линейные операторы $A: \varkappa(\zeta)|_{w[u]} \rightarrow \varkappa(\pi)$ и $A: \widehat{\varkappa}(\zeta)|_{w[u]} \rightarrow \varkappa(\pi)$, наделенные свойством (5), являются вариационными якорями *первого* и *второго типа* соответственно. При дифференциальных заменах $\tilde{u} = \tilde{u}[u]: J^\infty(\pi) \rightarrow \Gamma(\pi)$ и $\tilde{w} = \tilde{w}[w]: J^\infty(\zeta) \rightarrow \Gamma(\zeta)$ операторы A первого типа преобразуются по формуле

$$A \mapsto \tilde{A} = \ell_{\tilde{u}}^{(u)} \circ A \circ \ell_w^{(\tilde{w})}|_{w=w[u], u=u[\tilde{u}]}.$$

Операторы второго типа подчинены правилу преобразования

$$A \mapsto \tilde{A} = \ell_{\tilde{u}}^{(u)} \circ A \circ (\ell_{\tilde{w}}^{(w)})^\dagger|_{w=w[u], u=u[\tilde{u}]},$$

где $\dagger$ означает взятие сопряженного оператора. Операторы рекурсии с инволютивными образами, рассмотренные нами в работе [16], служат примерами якорей первого типа. Все гамильтоновы операторы и, в более общем случае, нётеровы операторы

¹⁾К примеру, для операторов рекурсии $\varkappa(\pi) \rightarrow \varkappa(\pi)$ имеем $\zeta = \pi$ (см. пример 3). По умолчанию область определения гамильтоновых операторов обычно отождествляется с модулем $\widehat{\varkappa}(\pi)$ (см. пример 2). В обоих случаях мы полагаем $w = \text{id}: \Gamma(\pi) \rightarrow \Gamma(\zeta)$; именно поэтому вспомогательное расслоение ζ остается “невидимым” в стандартном изложении (например, в работах [18], [21]).

с инволютивными образами являются вариационными якорями второго типа [16]. Операторы $\square$ и $\bar{\square}$, задающие симметрии систем уравнений Эйлера–Лагранжа ливиллева типа, также относятся к якорям второго типа; именно в этом смысле они оказываются “некососпряженными обобщениями гамильтоновых операторов” [10].

В оставшейся части данного раздела мы описываем каноническое разложение скобки $[\cdot, \cdot]_A$, индуцированной на факторпространстве $\Gamma\Omega(\xi_\pi)$ по модулю $\ker A$. По правилу Лейбница в скобке эволюционных векторных полей $A(\mathbf{p})$ и $A(\mathbf{q})$, принадлежащих образу вариационного якоря A , возникают два набора слагаемых:

$$[A(\mathbf{p}), A(\mathbf{q})] = A(\partial_{A(\mathbf{p})}(\mathbf{q}) - \partial_{A(\mathbf{q})}(\mathbf{p})) + (\partial_{A(\mathbf{p})}(A)(\mathbf{q}) - \partial_{A(\mathbf{q})}(A)(\mathbf{p})). \quad (8)$$

В первой паре слагаемых мы использовали перестановочность эволюционных дифференцирований с полными производными. Вторая пара слагаемых обязана попасть в образ оператора A по построению. Следовательно, структура алгебры Ли $[\cdot, \cdot]_A$ на области определения оператора A приобретает вид

$$[\mathbf{p}, \mathbf{q}]_A = \partial_{A(\mathbf{p})}(\mathbf{q}) - \partial_{A(\mathbf{q})}(\mathbf{p}) + \{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}\}_A. \quad (9)$$

Итак, скобка $[\cdot, \cdot]_A$, определенная с точностью до $\ker A$, состоит из двух стандартных слагаемых и бидифференциальной кососимметричной компоненты $\{\{\cdot, \cdot\}\}_A \in \mathcal{CDiff}(\Gamma\Omega(\xi_\pi) \times \Gamma\Omega(\xi_\pi) \rightarrow \Gamma\Omega(\xi_\pi))$. При любых $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \Gamma\Omega(\xi_\pi)$ тождество Якоби для скобки (9) имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\odot} [[\mathbf{p}, \mathbf{q}]_A, \mathbf{r}]_A = \sum_{\odot} [\partial_{A(\mathbf{p})}(\mathbf{q}) - \partial_{A(\mathbf{q})}(\mathbf{p}) + \{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}\}_A, \mathbf{r}]_A = \\ &= \sum_{\odot} \{ \partial_{A(\partial_{A(\mathbf{p})}(\mathbf{q}) - \partial_{A(\mathbf{q})}(\mathbf{p}))}(\mathbf{r}) - \partial_{A(\mathbf{r})}(\partial_{A(\mathbf{p})}(\mathbf{q}) - \partial_{A(\mathbf{q})}(\mathbf{p})) + \\ &\quad + \{\{\partial_{A(\mathbf{p})}(\mathbf{q}) - \partial_{A(\mathbf{q})}(\mathbf{p}), \mathbf{r}\}\}_A + \\ &\quad + \partial_{A(\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}\}_A)}(\mathbf{r}) - \underline{\partial_{A(\mathbf{r})}(\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}\}_A)} + \{\{\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}\}_A, \mathbf{r}\}\}_A \}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подчеркнутый член содержит дифференцирования коэффициентов скобки $\{\{\cdot, \cdot\}\}_A$, принадлежащих кольцу $\mathcal{F}(\pi)$. Отметим, что даже если результат применения эволюционных полей $\partial_\varphi^{(u)} = \varphi \partial / \partial u + \dots$ к аргументам оператора A положен равным нулю (что имеет смысл, см. ниже), то эти слагаемые могут оказаться отличными от нуля. При этом тождество Якоби для $[\cdot, \cdot]_A$ вырождается в равенство

$$\sum_{\odot} (-\partial_{A(\mathbf{r})}^{(u)}(\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}\}_A) + \{\{\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}\}_A, \mathbf{r}\}\}_A) = 0. \quad (10')$$

Формулы (5) и (9), формула (10), а также (10') сыграют в следующем разделе такую же роль в доказательстве приведенной ниже теоремы, какая была отведена соответственно лемме 1, формулам (4), а также (1) (либо (3)) при доказательстве эквивалентности двух классических определений.

3. ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

В этом разделе мы строим представление вариационных алгеброидов Ли в терминах гомологических эволюционных векторных полей Q на суперрасслоениях бесконечных струй; эти суперрасслоения мы естественным образом связываем с определением 2. Нам потребуется сделать два подготовительных шага. Во-первых, предстоит установить, какой объект является нечетным *соседом*²⁾ $\overline{J^\infty}(\Pi\xi_\pi)$ горизонтального расслоения бесконечных струй $\overline{J^\infty}(\xi_\pi)$ над $J^\infty(\pi)$. Во-вторых, на вариационные якоря A будут наложены условия, чтобы получаемое в итоге гомологическое поле Q стало корректно определенным на $\overline{J^\infty}(\Pi\xi_\pi)$; для этого мы применим технику, уже испытанную в работе [8].

Итак, напомним, что по построению расслоение $\xi_\pi: \Omega(\xi_\pi) \rightarrow J^\infty(\pi)$ индуцировано с помощью π_∞ из векторного расслоения ξ над базой Σ^n . Рассмотрим горизонтальное расслоение бесконечных струй $\overline{J^\infty}(\xi_\pi)$ сечений векторного расслоения $\pi_\infty^*(\xi)$ над $J^\infty(\pi)$ (подробности и примеры см. в работах [12], [18], [21]). Теперь обратим четность слоев расслоения $\overline{J^\infty}(\xi_\pi) \rightarrow J^\infty(\pi)$ и введем обозначение $\Pi: \mathbf{p} \mapsto \mathbf{b}$ для смены четности; о переменных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{b}$ сказано чуть ниже. Таким образом мы получаем горизонтальное *супер*расслоение бесконечных струй над $J^\infty(\pi)$, обозначаемое в дальнейшем через $\overline{J^\infty}(\Pi\xi_\pi)$. Подытожим введенные ранее обозначения:

- x – набор n локальных координат на базе, многообразии Σ^n ;
- u_σ , где $|\sigma| \geq 0$, – струйные координаты в слое расслоения $\pi_\infty: J^\infty(\pi) \rightarrow \Sigma^n$;
- $\mathbf{p}$ – координата вдоль слоя индуцированного расслоения $\pi_\infty^*(\xi)$ над $J^\infty(\pi)$,

а $\mathbf{p}, \mathbf{p}_x, \dots, \mathbf{p}_\tau$ при произвольном мультииндексе τ – координаты вдоль слоя в горизонтальном расслоении бесконечных струй $\overline{J^\infty}(\xi_\pi)$ сечений этого индуцированного расслоения;

- $\mathbf{b}, \mathbf{b}_x, \dots, \mathbf{b}_\tau$, где $|\tau| \geq 0$, – нечетные координаты вдоль слоя горизонтального суперрасслоения бесконечных струй $\overline{J^\infty}(\Pi\xi_\pi) \rightarrow J^\infty(\pi)$;

- вариационный якорь A , будучи линейным дифференциальным оператором в полных производных, тем самым является функцией, линейной по слоям – как расслоения $\overline{J^\infty}(\xi_\pi)$, так и суперрасслоения $\overline{J^\infty}(\Pi\xi_\pi)$ – и принимающей значения в пространстве производящих сечений эволюционных векторных полей на $J^\infty(\pi)$;

- $[\cdot, \cdot]_A$ – скобка (9) на горизонтальном модуле $\Gamma\Omega(\xi_\pi)$; она определена с точностью до ядра оператора A ; выберем *любой* представитель бидифференциальной операции $\{\cdot, \cdot\}_A$ из соответствующего класса эквивалентности и тавтологически поставим ему в соответствие билинейную функцию на горизонтальном пространстве струй.

Расположенный над каждой точкой $\theta^\infty \in J^\infty(\pi)$ нечетный слой горизонтального суперрасслоения бесконечных струй $\overline{J^\infty}(\Pi\xi_\pi)$ содержит линейное подпространство $\ker A$, определенное линейным уравнением $A|_{\theta^\infty}(\mathbf{b}) = 0$ (точнее, его бесконечным продолжением). Важно, что линейное пространство его решений не зависит от точки $[\mathbf{b}]$ слоя, ибо дифференциальный оператор $A|_{\theta^\infty}$ может зависеть лишь от точки базы $\theta^\infty \in J^\infty(\pi)$, а уравнение линейное. Чтобы запретить возможность параметризации ядра оператора A произвольными функциями, мы требуем, чтобы оператор A был *невыврожденным* в смысле определения, примененного в работе [8]: $A \circ \nabla = 0$ влечет $\nabla = 0$.

²⁾По определению, данному Ю. И. Маниным, соседи алгебры Ли $\mathfrak{g}$ – это $\mathfrak{g}^*$, $\Pi\mathfrak{g}$ и $\Pi\mathfrak{g}^*$, где Π – функтор смены четности (см. [5]).

ТЕОРЕМА. Пусть A – невырожденный вариационный якорь и пусть выполнены все сделанные ранее предположения и зафиксированы обозначения. Каким бы ни был выбор скобки $\{\{, \}\}_A$ по модулю $\ker A$, следующее нечетное эволюционное векторное поле Q на горизонтальном суперрасслоении бесконечных струй $\overline{J^\infty}(\Pi\xi_\pi)$ является гомологическим:

$$Q = \partial_{A(\mathbf{b})}^{(\mathbf{u})} - \frac{1}{2} \partial_{\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}\}_A|_{\mathbf{p}:=\mathbf{b}, \mathbf{q}:=\mathbf{b}}}^{(\mathbf{b})}, \quad [Q, Q] = 2Q^2 = 0. \quad (11)$$

Более того, либо в классе эквивалентности $Q \pmod{\partial_{\mathbf{n}}^{(\mathbf{b})}}$ таких полей на слое расслоения $\overline{J^\infty}(\Pi\xi_\pi) \rightarrow J^\infty(\pi)$ над каждой точкой $\theta^\infty \in J^\infty(\pi)$ существует единственный канонический представитель (здесь $\mathbf{n} \in \ker A$, так что $\partial_{\mathbf{n}}^{(\mathbf{b})}$ – симметрия ядра), либо, если якорь A близок к вырожденному в уточняемом ниже смысле, этой единственности можно достичь, фиксируя значения скобки $\{\{, \}\}_A$ на (не более чем) границе звездной области, центрально-симметричной относительно нуля в слое над θ^∞ и содержащейся в горизонтальном расслоении струй $\overline{J^{|\tau|}}(\Pi\xi_\pi)$ некоторого конечного порядка $|\tau| < \infty$.

ПРИМЕР 6. Второй гамильтонов оператор A_2 для уравнения КдФ (см. выше) задает гомологическое векторное поле $Q = \partial_{A_2(\mathbf{b})}^{(\mathbf{u})} + \partial_{bb_x}^{(\mathbf{b})}$. Это простейший пример, содержащий не равный тождественно нулю дифференциальный полином второй степени от антикоммутирующих переменных $\mathbf{b}$ (в данном случае такая переменная всего одна) и их (соответственно ее) производных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Антиккоммутатор $[Q, Q] = 2Q^2$ нечетного эволюционного векторного поля сам является эволюционным векторным полем. Поэтому в нем достаточно вычислить коэффициенты при $\partial/\partial\mathbf{u}$ и $\partial/\partial\mathbf{b}$; по построению, все остальные слагаемые будут содержать соответствующие полные производные этих двух коэффициентов.

Сначала найдем нечетную скорость переменной $\mathbf{u}$; она равна

$$\partial_{A(\mathbf{b})}^{(\mathbf{u})}(A)(\mathbf{b}) - \frac{1}{2} A(\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}\}_A)|_{\mathbf{p}:=\mathbf{b}, \mathbf{q}:=\mathbf{b}}. \quad (12)$$

Используя то, что переменная $\mathbf{b}$ нечетная, удвоим уменьшаемое и перепишем (12) как

$$\frac{1}{2} (\partial_{A(\mathbf{p})}^{(\mathbf{u})}(A)(\mathbf{q}) - \partial_{A(\mathbf{q})}^{(\mathbf{u})}(A)(\mathbf{p}) - A(\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}\}_A))|_{\mathbf{p}:=\mathbf{b}, \mathbf{q}:=\mathbf{b}}.$$

По определению операции $\{\{, \}\}_A$, данному в (8), (9), выражение в скобках равно нулю.

Одновременно с этим коэффициент при $\partial/\partial\mathbf{b}$ равен

$$- \frac{1}{2} \partial_{A(\mathbf{b})}^{(\mathbf{u})}(\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}\}_A)|_{\mathbf{p}:=\mathbf{b}, \mathbf{q}:=\mathbf{b}} + \frac{1}{4} \partial_{\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}\}_A|_{\mathbf{p}:=\mathbf{b}, \mathbf{q}:=\mathbf{b}}}^{(\mathbf{b})}(\{\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\}\}_A)|_{\mathbf{r}:=\mathbf{b}, \mathbf{s}:=\mathbf{b}}. \quad (13)$$

Скобка $\{\{, \}\}_A$ кососимметрична (в обычном смысле), и поэтому подстановка нечетной переменной $\mathbf{b}$ вместо каждого из аргументов удвоит ее. Заметим также, что нечетное дифференцирование $\partial_{\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}\}_A}^{(\mathbf{b})}$ с подставленными $\mathbf{p} := \mathbf{b}$, $\mathbf{q} := \mathbf{b}$ действует

на аргумент с учетом градуированного правила Лейбница. По определению дифференцирование заменяет всякую производную переменной $\mathbf{b}$ соответствующей производной величины $\{\{\mathbf{b}, \mathbf{b}\}\}_A$. Получается, что коэффициент (13) равен

$$\frac{1}{2}(-\partial_{A(\mathbf{r})}^{(\mathbf{u})}(\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}\}_A) + \{\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}\}_A, \mathbf{r}\}\}_A) \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{b}, \mathbf{q}=\mathbf{b}, \mathbf{r}=\mathbf{b}}.$$

Утроим это выражение, беря сумму по циклическим перестановкам $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{p}$, не меняющим знак. В итоге мы получаем умноженное на $1/6$ тождество Якоби (10'). Первое утверждение теоремы доказано.

Выше мы показали, что равенство $Q^2 = 0$ выполнено при любом выборе скобки $\{\{\cdot, \cdot\}\}_A + \mathbf{n}([\mathbf{b}])$, т. е. при произвольном $\mathbf{n} \in \ker A$. С одной стороны, линейное подпространство $\ker A$ в слое горизонтального расслоения струй, расположенном над точкой $\theta^\infty \in J^\infty(\pi)$, не зависит от точки $[\mathbf{b}]$ этого слоя. С другой стороны, представитель $\mathbf{n} \in \ker A$ может оказаться отличным от нуля и, вообще говоря, может зависеть от точки. Мы утверждаем, что $\mathbf{n}$ можно тривиализовать (или по крайней мере нормировать корректно определенным способом) одновременно во всех точках слоя.

Прежде всего, с помощью подходящего сдвига вдоль ядра подчиним скобку $\{\{\cdot, \cdot\}\}_A$ условию $\{\{[0], [0]\}\}_A \equiv 0$, наложенному в нуле $[\mathbf{b}] = 0$ векторного пространства – слоя над точкой $\theta^\infty \in J^\infty(\pi)$ в векторном расслоении $\overline{J^\infty}(\Pi\xi_\pi) \rightarrow J^\infty(\pi)$. Теперь заметим, что оставшийся “довесок” $\mathbf{n}$, во всех точках слоя принадлежащий общему для них ядру $\ker A$, является квадратично-однородным по координатам $[\mathbf{b}]$ горизонтальной струи, иными словами, $\mathbf{n} = \mathbf{n}([\mathbf{b}] \cdot [\mathbf{b}])$. Условие невырожденности оператора A исключает возможность появления произвольной функциональной зависимости от $[\mathbf{b}] \cdot [\mathbf{b}]$ у сечений, принадлежащих области определения какого-либо не равного нулю оператора ∇ , такого что $A \circ \nabla \equiv 0$.

Дифференциальный порядок скобки $\{\{\cdot, \cdot\}\}_A$ конечен и не превосходит суммы дифференциальных порядков собственно оператора A и его коэффициентов, которые могут зависеть от $[\mathbf{u}]$. Таким образом, $\mathbf{n} = \mathbf{n}((\mathbf{b}, \dots, \mathbf{b}_\tau) \cdot (\mathbf{b}, \dots, \mathbf{b}_\tau))$, причем $|\tau| < \infty$. Возьмем нечетные переменные $\mathbf{b}, \dots, \mathbf{b}_\tau$ и рассмотрим все те попарные произведения $\psi = {}^t(b^i \cdot b^j, \dots, b_\tau^i \cdot b_\tau^j)$, которые не равны нулю тождественно. Применяя метод неопределенных коэффициентов, составим из них m -компонентный столбец $\mathbf{n} = \nabla(\psi)$: пусть $\nabla_\beta^\alpha \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{n}^\alpha = \nabla_\beta^\alpha \cdot \psi^\beta$. Предположение о том, что $\mathbf{n} \neq 0$, формально не противоречит нашему исходному предположению о невырожденности оператора A , поскольку полученное таким способом сечение ψ не является произвольным (может оказаться, что столбец задан меньшим числом параметров, чем число компонент в нем, из-за наличия полиномиальных соотношений между этими компонентами). Если отличных от нуля матриц ∇ не существует, доказательство окончено. Предположим, однако, что решение $\nabla \neq 0$ все-таки нашлось. Тогда при растяжении слоя в $\lambda \in \mathbb{R}$ раз отклонение $\mathbf{n}(\lambda) \in \ker A$ от нормировки $\mathbf{n} \equiv 0$ в нуле будет возрастать квадратично по λ . Следовательно, чтобы однозначно задать скобку $\{\{\cdot, \cdot\}\}_A$, достаточно зафиксировать значения “довеска” $\mathbf{n}$ в точках границы центрально-симметричной звездной области с центром в нуле, расположенной над точкой θ^∞ в конечномерном слое пространства конечных струй $\overline{J^{|\tau|}}(\Pi\xi_\pi)$. С помощью проведенного выше рассуждения мы нормировали $\{\{\cdot, \cdot\}\}_A$ на всем слое расслоения $\overline{J^\infty}(\Pi\xi_\pi)$ и тем самым определили канонический представитель Q в классе полей (11) на этом слое. Доказательство теоремы завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Мы начали доказательство с того, что использовали постулированное свойство вариационного якоря A быть гомоморфизмом алгебр Ли. Последующее рассуждение основано на кососимметричности операции $\{\{, \}\}_A$, на (всегда выполненном для дифференцирований) правиле Лейбница и на тождестве Якоби для скобки $[,]_A$. В каком-то смысле слагаемые в формуле (10') можно трактовать как правую часть *нового* “правила Лейбница” для скобки (9) в вариационном алгеброиде Ли.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Гомологическое эволюционное векторное поле (11) не содержит свободного члена и квадратично по нечетной переменной $\mathbf{b}$ и ее производным. Допустим, что эта степень полинома есть произвольное положительное число (быть может, даже бесконечность), а все остальные предположения по-прежнему выполнены. Таким образом получаются гомотопические деформации Шлезингера–Сташефа [22] структуры алгебры Ли в $(\Gamma\Omega(\xi_\pi), [,]_A)$. В частности, тождество Якоби $[Q, Q] = 0$ вовлекает теперь не только двухместную скобку $[,]_A$, но также и трех-, четырех- и прочие N -местные кососимметричные скобки с числом аргументов $N \geq 3$ (см. [2], [5], [22], [23] и ссылки в этих работах).

В статье [24] (см. также ссылки в ней) утверждалось, что при $N \geq 3$ не существуют вариационные N -векторы для всех эволюционных систем дифференциального порядка выше первого и с обратимым символом³⁾. Из этого утверждения следует жесткость относительно гомотопий структуры вариационных алгеброидов Ли, задаваемой гамильтоновыми операторами для таких уравнений.

Вариационное мастер-уравнение: иллюстрация. Рассмотрим более подробно свойства гомологического векторного поля (11) в частном случае, когда якорь $A: \mathfrak{X}(\pi) \rightarrow \mathfrak{X}(\pi)$ – гамильтонов дифференциальный оператор и, таким образом, его аргументами $\mathbf{p}$ являются *вариационные ковекторы*⁴⁾. В этом случае индуцированная скорость $\dot{\mathbf{p}}$ известна (см. ниже формулу (14)), если задана эволюция $\dot{\mathbf{u}} = A(\mathbf{p})$. Соответствующее эволюционное векторное поле (11) на горизонтальном суперрасслоении струй $J^\infty(\Pi\hat{\pi}_\pi)$ было построено для гамильтоновых операторов A в недавней работе [21] именно с этих позиций: коэффициент при $\partial/\partial\mathbf{b}$ был *постулирован* раз и навсегда в соответствии с формулой (14) и не подлежал в дальнейшем интерпретации как скобка $\{\{\mathbf{b}, \mathbf{b}\}\}_A$. В рамках такого подхода квадратное уравнение $Q^2 = 0$, неизвестные в котором суть кососопряженные операторы A , задает вариационные пуассоновы структуры.

В рассматриваемом здесь вариационном пуассоновом случае гомологическое векторное поле (11) можно вычислить явно для каждого гамильтонова оператора A .

³⁾Как легко видеть, второе условие зависит от выбора локальных координат. Мы полагаем, что то же утверждение все же остается справедливым для эволюционных систем дифференциального порядка выше первого и с невырожденными линеаризациями правой части.

⁴⁾По определению вариационными ковекторами называются гомоморфизмы, действующие из пространства $\mathfrak{X}(\pi) = \Gamma(\pi_\infty^*(\pi))$ производящих сечений φ эволюционных дифференцирований ∂_φ в пространство горизонтальных дифференциальных форм степени n на тотальном пространстве $J^\infty(\pi)$ расслоения π_∞ над Σ^n . Эта конструкция неявно предписывает выбрать форму объема dx на базе и тем самым фиксировать спаривание $\langle, \rangle$ между вариационными ковекторами и эволюционными векторными полями. С этой точки зрения гомологическое векторное поле Q , заданное гамильтоновым оператором A , является полем Баталина–Вилковисского, а не просто БРСТ-полем [2].

Более того, поле Q само оказывается гамильтоновым относительно вариационного пуассонова бивектора $\mathbf{H} = A(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}/2$ и канонической симплектической структуры [13], [25] на горизонтальном суперпространстве бесконечных струй $\overline{J^\infty}(\Pi\hat{\pi})$. Ниже мы иллюстрируем этот стандартный алгебраический факт, используя технику, изложенную в обзоре [12].

Скобка $\{\{, \}\}_A$, заданная гамильтоновым оператором A , получается, если расписать тождество Якоби для структуры алгебры Ли $(H^n(\pi), \{\{, \}\}_A)$ гамильтоновых функционалов, наделенных при помощи оператора A скобкой Пуассона. Следуя обозначениям книги [26], мы положим $\ell_{A,\psi}^{(\mathbf{u})}(\varphi) := (\partial_\varphi(A))(\psi)$ для произвольных $\varphi \in \mathfrak{X}(\pi)$, $\psi \in \hat{\mathfrak{X}}(\pi)$ и дифференциального оператора в полных производных $A \in \mathcal{CDiff}(\hat{\mathfrak{X}}(\pi), \mathfrak{X}(\pi))$. Отметим, что $\ell_{A,\psi}^{(\mathbf{u})}$ является оператором в полных производных по отношению к своему аргументу φ и по отношению к ψ (но не к коэффициентам оператора A), и потому корректно определен сопряженный оператор $(\ell_{A,\psi}^{(\mathbf{u})})^\dagger$.

ЛЕММА 3 [16], [26]. *Косопрямленный оператор A является гамильтоновым тогда и только тогда, когда для всех $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \hat{\mathfrak{X}}(\pi)$ выполнено соотношение*

$$(\partial_{A(\mathbf{p})}(A))(\mathbf{q}) - (\partial_{A(\mathbf{q})}(A))(\mathbf{p}) = A((\ell_{A,\mathbf{p}}^{(\mathbf{u})})^\dagger(\mathbf{q})).$$

Вследствие этого

$$\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}\}_A = (\ell_{A,\mathbf{p}}^{(\mathbf{u})})^\dagger(\mathbf{q}), \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \hat{\mathfrak{X}}(\pi), \quad (14)$$

если A – гамильтонов оператор; с другой стороны, условие (14) задает удобный критерий, позволяющий проверить, является ли гамильтоновым данный дифференциальный оператор в полных производных.

Следует уточнить, что $\ell_{A,\mathbf{p}}^{(\mathbf{u})}$ – это не то же самое, что линейаризация $\ell_{A(\mathbf{p})}^{(\mathbf{u})}$. Однако если $\mathbf{p}$ становится струйной координатой в горизонтальном расслоении струй над $J^\infty(\pi)$, то эти два обозначения превращаются в синонимы (см., например, [21]). Более того, тогда несложно показать, что имеют место равенства⁵⁾

$$\frac{1}{2}(\ell_{A,\mathbf{b}}^{(\mathbf{u})})^\dagger(\mathbf{b}) = \frac{\delta}{\delta \mathbf{u}} \left(\frac{1}{2} A(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} \right), \quad A(\mathbf{b}) = \frac{\delta}{\delta \mathbf{b}} \left(\frac{1}{2} A(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} \right);$$

второе тождество выполнено вследствие того, что гамильтонов оператор A является косопрямленным. В заключение напомним факт, известный из работ [13], [25]: нечетный “сосед” $\overline{J^\infty}(\Pi\hat{\pi}) \rightarrow J^\infty(\pi)$ вариационного кокасательного расслоения наделен канонической симплектической структурой $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Уточним, что структура ω присутствует, даже если пространство значений для локальных сечений расслоения π или, в более общем случае, многообразие образов, в котором принимают значения отображения $\mathbf{u}: \Sigma^n \rightarrow M^m$, само по себе не является симплектическим. В противоположность этому в статье [2] симплектическая структура на пространстве отображений $\mathcal{E} = \{\Sigma^n \rightarrow M^m\}$ была построена по 2-форме на M^m , т. е. с необходимостью предполагалось, что четномерное многообразие образов является симплектическим.

⁵⁾По соглашению $\delta S = (\delta S/\delta \eta)\delta \eta$ все вариации $\delta \eta$ переменных η (быть может, нечетных) пропускаются до упора вправо, что прискорбно, поскольку это полностью рассогласуется с идеей Дирака располагать в формулах bra-ковекторы слева и ket-векторы справа (в частности, в скобках “bra-c-ket”) и вносит в формулы дополнительные знаки труднообъяснимой природы.

Подытожим накопленный результат. Он отражает, теперь уже в рамках вариационной картины, свойства гомологических векторных полей Q , установленные в работе [2] для конечномерного случая.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для каждого гамильтонова дифференциального оператора A гомологическое эволюционное векторное поле (11) само является гамильтоновым относительно вариационного пуассонова бивектора $\mathbf{H} = A(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}/2$ и канонической симплектической структуры ω :

$$Q = \partial_{\delta \mathbf{H} / \delta \mathbf{b}}^{(\mathbf{u})} + \partial_{-\delta \mathbf{H} / \delta \mathbf{u}}^{(\mathbf{b})}. \quad (15)$$

Лагранжиан $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{u}}\mathbf{p} - \mathbf{H}$, полученный преобразованием Лежандра из гамильтониана $\mathbf{H}$, равен $\mathbf{L} = A(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}/2$ и удовлетворяет вариационному мастер-уравнению $[[\mathbf{L}, \mathbf{L}]] = 0$, где $[[\ , \]]$ – вариационная скобка Схоутена.

ПРИМЕР 7. Вновь рассмотрим гамильтонов оператор

$$A_2 = -\frac{1}{2} \frac{d^3}{dx^3} + w \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \circ w$$

для уравнения КдФ; скобка (14) равна $\{\{p, q\}\}_{A_2} = p_x q - p q_x$ (см. (7)). Вариационный пуассонов бивектор получается таким: $\mathbf{H} = -b_{xxx}b/4 + w b_x b$, откуда (см. сноску 5)

$$\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta b} = -\frac{1}{2} b_{xxx} + 2w b_x + w_x b, \quad \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta w} = b_x b.$$

Гомологическое эволюционное векторное поле (11) равно $Q = \partial_{A_2(b)}^{(w)} - \partial_{2b_x b}^{(b)}/2$, что в точности совпадает с выражением (15).

В заключение отметим, что явно заданный⁶⁾ гамильтониан $\mathbf{H}$ поля Q никак не связан с гамильтонианом $\mathcal{H}$ наблюдаемого движения $\dot{\mathbf{u}} = A(\delta \mathcal{H} / \delta \mathbf{u})$ образа многообразия Σ^n по многообразию M^m , так как гамильтониан $\mathcal{H}$ может вообще не существовать!

4. ВЫВОДЫ

Мы видим, что мотивированная физическими приложениями геометрия, рассматривавшаяся в статье [2], имеет явно *вариационную* природу. Иначе говоря, модель струны $\Sigma^n \rightarrow M^m$ обязывает нас использовать расслоения струй, которые заключают в себе данные не только об одних лишь отображениях, но и обо всех их производных. Можно пытаться задавать разнообразные конструкции нулевого дифференциального порядка относительно многообразия Σ^n , в частности пуассоновы структуры или гомологические векторные поля, но полная картина при этом учтена не будет. В физических терминах равенство нулю всех производных означает, что либо $n = 0$ и $\Sigma = \{\text{pt}\}$ (т. е. не по чему дифференцировать), либо образ многообразия Σ^n при постоянном отображении становится точкой в пространстве M^m , и возникающая таким образом точечная частица наделена n скрытыми степенями

⁶⁾Лагранжиан $\mathbf{L}$ и гамильтониан $\mathbf{H}$ совпадают, и потому вариационный пуассонов формализм можно рассматривать как (весьма отдаленный) раздел теории равномерного прямолинейного движения.

свободы. В настоящей работе мы вводили определения и устанавливали их свойства, в целом следуя подходу статьи [1]; таким образом нам удалось снять ограничение, присущее рассуждениям из работы [2], состоявшее в том, что частицы реально могли быть лишь точечными. Более того, теперь видно, что еще одно предположение, сделанное в работе [2], – о наличии симплектической структуры на многообразии образов M^m – избыточно для того, чтобы гомологическое эволюционное поле Баталина–Вилковысского было гамильтоновым относительно канонической симплектической структуры на пространстве отображений (хотя, конечно же, вариационный подход остается применимым к изучению пуассоновых сигма-моделей). Мы надеемся, что изложенные здесь соображения окажутся полезными при исследовании не требующих размерной редукции струнных моделей в пространстве-времени Минковского $M^{3,1}$.

Благодарности. Авторы благодарны Б. А. Дубровину, И. С. Красильщику, М. А. Нестеренко, П. Дж. Олверу, В. Н. Рубцову, В. В. Соколову за обсуждения и высказанные замечания. А. В. Киселев признателен организационному комитету конференции “Нелинейная физика: теория и эксперимент. VI” за радушное гостеприимство. А. В. Киселев также благодарит IHÉS, SISSA и CRM (Montréal, Canada) за финансовую поддержку и гостеприимство. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке со стороны Европейского Союза (FP6 Marie Curie RTN ENIGMA, контракт MRTN-CT-2004-5652), European Science Foundation Program MISGAM, а также NWO (гранты В61–609 и VENI 639.031.623).

Список литературы

- [1] А. Ю. Вайнтроб, *УМН*, **52**:2(314) (1997), 161–162.
- [2] M. Alexandrov, A. Schwarz, O. Zaboronsky, M. Kontsevich, *Internat. J. Modern Phys. A*, **12**:7 (1997), 1405–1429, arXiv: hep-th/9502010.
- [3] Y. Kosmann-Schwarzbach, *SIGMA*, **4** (2008), 005, 30 pp., arXiv:0710.3098; *Lett. Math. Phys.*, **69**:1–3 (2004), 61–87, arXiv: math/0312524; *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **46**:5 (1996), 1243–1274.
- [4] А. В. Бочаров, А. М. Вербовецкий, А. М. Виноградов, С. В. Дужин, И. С. Красильщик, А. В. Самохин, Ю. Н. Торхов, Н. Г. Хорькова, В. Н. Четвериков, *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, Факториал, М., 2005.
- [5] T. Voronov, “Graded manifolds and Drinfeld doubles for Lie bialgebroids”, *Quantization, Poisson Brackets and Beyond*, Contemp. Math., **315**, ed. T. Voronov, AMS, Providence, RI, 2002, 131–168.
- [6] J.-C. Herz, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **263** (1953), 1935–1937; 2289–2291.
- [7] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **53**:1 (1990), 35–81.
- [8] А. В. Киселев, Й. В. ван де Лёп, *ТМФ*, **162**:2 (2010), 179–195, arXiv:0902.3624.
- [9] A. N. Leznov, M. V. Saveliev, *Lett. Math. Phys.*, **3**:6 (1979), 489–494.
- [10] А. В. Жибер, В. В. Соколов, *УМН*, **56**:1(337) (2001), 63–106.
- [11] A. Kumpera, D. C. Spencer, *Lie Equations*, v. I: *General theory*, Ann. Math. Stud., **73**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.; Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1972.
- [12] J. Krasil’shchik, A. Verbovetsky, “Geometry of jet spaces and integrable systems”, *J. Geom. Phys.* (в печати), arXiv:1002.0077.
- [13] B. A. Kupershmidt, “Geometry of jet bundles and the structure of Lagrangian and Hamiltonian formalisms”, *Geometric Methods in Mathematical Physics*, Lecture Notes in Math., **775**, Springer, Berlin, 1980, 162–218.

- [14] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [15] А. В. Киселев, *ТМФ*, **144**:1 (2005), 83–93, arXiv: nlin.SI/0409061.
- [16] A. V. Kiselev, J. W. van de Leur, *J. Phys. A*, **42**:40 (2009), 404011, 8 pp., arXiv: 0903.1214.
- [17] A. V. Kiselev, J. W. van de Leur, *Involutive distributions of operator-valued evolutionary vector fields and their affine geometry*, Preprint IHES/M/07/38, Inst. Hautes Études Sci., Bures-sur-Yvette.
- [18] P. Kersten, I. Krasil'shchik, A. Verbovetsky, *J. Geom. Phys.*, **50**:1–4 (2004), 273–302, arXiv: math/0304245.
- [19] M. Nesterenko, R. Popovych, *J. Math. Phys.*, **47**:12 (2006), 123515, 45 pp., arXiv: math-ph/0608018.
- [20] C. P. Boyer, J. D. Finley III, *J. Math. Phys.*, **23**:6 (1982), 1126–1130.
- [21] В. А. Головкин, И. С. Красильщик, А. М. Вербовецкий, *ТМФ*, **154**:2 (2008), 268–282, arXiv: 0812.4684.
- [22] T. Lada, J. Stasheff, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **32**:7 (1993), 1087–1103, arXiv: hep-th/9209099.
- [23] А. В. Киселев, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:1 (2005), 159–180, arXiv: math.RA/0410185.
- [24] P. Kersten, I. Krasil'shchik, A. Verbovetsky, *Acta Appl. Math.*, **83**:1–2 (2004), 167–173, arXiv: math/0310451.
- [25] П. А. М. Дирак, *Лекции по квантовой механике*, Мир, М., 1968; Т. de Donder, *Théorie invariante du calcul des variations*, Gauthier-Villars, Paris, 1930.
- [26] И. С. Красильщик, А. М. Вербовецкий, *Гомологические методы в теории уравнений математической физики*, 1999, arXiv: math.DG/9808130.