Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Г. Конопельченко, Дж. Ортенци, Страты Биркгофа в
грассманиане $\text{Gr}^{(2)}$: алгебраические кривые, *ТМФ*, 2011,
том 167, номер 3, 448–464

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6653>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:21:57

© 2011 г.

Б. Г. Конопельченко*, Дж. Ортенци†

СТРАТЫ БИРКГОФА В ГРАССМАНИАНЕ $\text{Gr}^{(2)}$: АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Исследуются алгебраические многообразия и кривые, возникающие в стратах Биркгофа грассманиана Сато $\text{Gr}^{(2)}$. Показано, что большая клетка Σ_0 содержит башню семейств нормальных рациональных кривых всех нечетных порядков. Страты Σ_{2n} , $n = 1, 2, 3, \dots$, содержат гиперэллиптические кривые рода n и их координатные кольца; страты Σ_{2n+1} , $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, — $(2m + 1, 2m + 3)$ -плоские кривые при $n = 2m, 2m - 1$ ($m \geq 2$) и $(3, 4)$ - и $(3, 5)$ -кривые в Σ_3, Σ_5 . Кривые в стратах Σ_{2n+1} имеют нулевой род.

Ключевые слова: грассманиан Сато, страты Биркгофа, алгебраические многообразия, гиперэллиптические кривые.

1. ВВЕДЕНИЕ

Грассманиан $\text{Gr}^{(2)}$ представляет собой очень важную конкретизацию универсального грассманиана Сато [1]. Наиболее известные случаи его появления связаны с теорией уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) [2], [3]. Настоящая работа посвящена исследованию грассманиана $\text{Gr}^{(2)}$ в рамках подхода, предложенного недавно в работе [4]. Его основная идея состоит в анализе алгебро-геометрических структур, возникающих в грассманиане Сато, в нашем случае — в стратах Биркгофа грассманиана $\text{Gr}^{(2)}$, без каких-либо априорных упоминаний интегрируемых систем.

Напомним, что грассманиан Сато Gr можно рассматривать как множество замкнутых векторных подпространств в бесконечномерном множестве всех формальных рядов Лорана с коэффициентами в $\mathbb{C}$ и некоторыми специальными свойствами (см., например, работы [2], [3]). Каждое подмножество $W \subset \text{Gr}$ обладает алгебраическим базисом $(w_0(z), w_1(z), w_2(z), \dots)$ с элементами

$$w_n = \sum_{k=-\infty}^n a_k^n z^k \quad (1)$$

*Dipartimento di Fisica, Università del Salento and INFN, Sezione di Lecce, Lecce, Italy.
E-mail: konopel@le.infn.it

†Dipartimento di Matematica Pura ed Applicazioni, Università di Milano Bicocca, Milano, Italy. E-mail: giovanni.ortenzi@unimib.it

конечного порядка n . Грассманиан Gr является связным банаховым многообразием, обладающим стратифицированной структурой [2], [3], т. е. $\text{Gr} = \bigcup_S \Sigma_S$, где страта Σ_S представляет собой подмножество в Gr , образованное такими элементами вида (1), что возможные значения n даются бесконечным набором $S = \{s_0, s_1, s_2, \dots\}$ целых s_n , причем $s_0 < s_1 < s_2 < \dots$ и $s_n = n$ при больших n . Большая клетка Σ_0 соответствует $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, другие страты связаны с наборами S , отличными от S_0 .

$\text{Gr}^{(2)}$ является подмножеством W в грассманиане Gr , подчиняющимся условию $z^2 W \subset W$. Это условие налагает сильные ограничения на ряды Лорана и на структуру страт, а именно страта Биркгофа Σ_S в $\text{Gr}^{(2)}$ соответствует таким множествам S , что $S + 2 \subset S$, т. е. все возможные S имеют вид [2], [3]

$$S_m = \{-m, -m+2, -m+4, \dots, m, m+1, m+2, \dots\}, \quad (2)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$. Коразмерность страты Σ_m равна $m(m+1)/2$. Имеем $\text{Gr}^{(2)} = \bigcup_{m \geq 0} \Sigma_m$.

В настоящей работе с использованием свойств страт Биркгофа $\text{Gr}^{(2)}$ показано, что большая клетка Σ_0 содержит максимальное замкнутое подмножество W_0 , которое геометрически представляет собой башню бесконечных семейств рациональных нормальных кривых (Веронезе) всех нечетных порядков. Показано, что страты Σ_{2n} , $n = 1, 2, \dots$, содержат подмножество W_{2n} , замкнутое относительно умножения, если коэффициенты ряда Лорана w_n подчиняются некоторым связям, выражающим ассоциативность. Геометрически подмножество W_{2n} представляет собой бесконечные семейства координатных колец для гиперэллиптических кривых рода n . Показано, что страты Σ_3 и Σ_5 соответственно содержат $(3, 4)$ - и $(3, 5)$ -вырожденные плоские кривые. В стратах Σ_{2m+1} , $m \geq 2$, имеются семейства $(2m+1, 2m+3)$ -плоских кривых нулевого рода.

Во второй части работы [5] рассматриваются касательные когомологии подмножества W_n и связанные с ними интегрируемые системы гидродинамического типа.

Настоящая работа построена следующим образом. В разделе 2 рассматривается большая клетка. Страта Σ_1 рассматривается в разделе 3. В разделе 4 исследуются замкнутые подмножества W_2 в страте Σ_2 и соответствующие эллиптические кривые. Страта Σ_3 и соответствующие $(3, 4)$ -кривые анализируются в разделе 5. Раздел 6 посвящен общим стратам Σ_{2n} , $n = 2, 3, 4, \dots$. Страта Σ_5 и страты общего положения Σ_{2n+1} , $n = 3, 4, \dots$, рассматриваются в разделе 7.

2. БОЛЬШАЯ КЛЕТКА

Главная страта Σ_0 , для которой $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ (называемая также большой клеткой), представляет собой плотное открытое множество и имеет нулевую коразмерность [2], [3] и канонический базис $(p_0, p_1, p_2, \dots)$, где

$$p_i(z) = z^i + \sum_{k \geq 1} \frac{H_k^i}{z^k}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

с произвольными H_k^i .

В соответствии с подходом, предложенным в работе [4], будем сначала искать подмножество $W_0 \subset \Sigma_0$, замкнутое относительно умножения. Имеем следующую лемму.

ЛЕММА 1. Ряд Лорана (3) подчиняется условию $z^2 W_0 \subset W_0$ и уравнениям

$$p_j(z)p_k(z) = \sum_{l \geq 0} C_{jk}^l p_l(z), \quad (4)$$

если и только если

$$\begin{aligned} H_i^{2n} &= 0, & i &= 1, 2, 3, \dots, & n &= 0, 1, 2, \dots, \\ H_{2i}^{2n+i} &= 0, & i &= 1, 2, 3, \dots, & n &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

$$H_{2(k+n)+1}^{2m+1} - H_{2k+1}^{2(m+n)+1} - \sum_{s=0}^{n-1} H_{2s+1}^{2m+1} H_{2k+1}^{2(n-s)-1} = 0, \quad (6)$$

$$H_{2(k+n)+1}^{2m+1} + H_{2(k+m)+1}^{2n+1} + \sum_{l=0}^{k-1} H_{2l+1}^{2m+1} H_{2(k-l)-1}^{2n+1} = 0.$$

Константы C_{jk}^l имеют вид

$$\begin{aligned} C_{2n,2m}^{2l} &= \delta_{m+n}^l, \\ C_{2n,2m+1}^{2l+1} &= \delta_{m+n}^l + H_{2(n-l)-1}^{2m+1}, \\ C_{2n+1,2m+1}^{2l} &= \delta_{m+n+1}^l + H_{2(m-l)+1}^{2n+1} + H_{2(n-l)+1}^{2m+1}, \end{aligned} \quad (7)$$

и $p_{2n} = p_2^{2n} = z^{2n}$, $n \geq 0$.

Из этой леммы немедленно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Подмножество $W_0 \subset \Sigma_0$ с элементами вида $w = \sum_{i=0}^n a_i p_i(z)$ с произвольными a_i и $n \geq 0$ и параметрами H_k^i , подчиняющимися связям (6) и условию $z^2 W_0 \subset W_0$, замкнуто относительно умножения: $W_0 \cdot W_0 \subset W_0$. Оно представляет собой максимальное замкнутое подмножество в большой клетке. Это подмножество W_0 представляет собой бесконечномерную ассоциативную коммутативную алгебру с единицей $p_0 = 1$.

Последнее утверждение следует из эквивалентности уравнений (6) и условий ассоциативности

$$\sum_s C_{ij}^s C_{ks}^r - C_{ik}^s C_{js}^r = 0 \quad (8)$$

для структурных констант C_{jk}^l .

Из соотношений (4), записанных в явном виде, т. е.

$$\begin{aligned} p_{2n} p_{2m} &= p_{2(m+n)}, \\ p_{2n} p_{2m+1} &= p_{2(m+n)+1} + \sum_{s=0}^{n-1} H_{2s+1}^{2m+1} p_{2(n-s)-1}, \\ p_{2n+1} p_{2m+1} &= p_{2(m+n+1)} + \sum_{s=0}^m H_{2s+1}^{2n+1} p_{2(m-s)} + \sum_{s=0}^n H_{2s+1}^{2m+1} p_{2(n-s)}, \end{aligned} \quad (9)$$

следует, что

$$\begin{aligned} z^2 &= p_1^2 - 2H_1^1, \\ p_3 &= p_1^3 - 3H_1^1 p_1, \\ p_5 &= p_1^5 - 5H_1^1 p_1^3 + \frac{15}{2} H_1^1{}^2 p_1, \quad \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

или, эквивалентно,

$$\lambda = p_1^2 - 2H_1^1, \quad p_{2n+1} = \alpha_n(\lambda) p_1, \quad (11)$$

где $\lambda = z^2$ и $\alpha_n(\lambda) = \prod_{s=1}^n (\lambda - H_{2(n-s)+1}^1 / (2(n-s) + 1))$.

Аналогично предложенному в работе [4], можно рассматривать $\lambda, p_1, p_3, \dots$ как аффинные координаты. Тогда имеем следующую геометрическую интерпретацию подмножества W_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Большая клетка Σ_0 содержит бесконечномерное алгебраическое многообразие G_0 с идеалом*

$$\langle \lambda - p_1^2 + 2H_1^1, l_1^{(2)}, l_1^{(2)}, \dots \rangle, \quad (12)$$

где $l_n^{(2)} = p_{2n+1} - \alpha(\lambda) p_1$, а переменные H_k^j подчиняются связям (6). Это многообразие представляет собой бесконечную башню бесконечных семейств рациональных нормальных кривых (Веронезе) всех нечетных порядков.

Формулы (10) представляют собой каноническую параметризацию рациональных нормальных кривых (см. монографию [6]). Например, кривые, определяемые первыми двумя уравнениями (10), являются классическими твистованными кубиками в трехмерном пространстве с координатами (λ, p_1, p_3) .

Среди всех H_k^j , подчиняющихся условиям (6), имеется бесконечное множество независимых переменных. Естественное множество независимых H_k^j есть $H_1^1, H_3^1, H_5^1, \dots$.

Учитывая формулы (11), нетрудно также видеть, что идеал $I_0^{(2)}$ содержит сингулярные “гиперэллиптические” кривые нулевого рода, задаваемые уравнениями

$$p_{2n+1}^2 = (\lambda + 2H_1^1) \alpha_n(\lambda)^2. \quad (13)$$

Бесконечное семейство алгебраических многообразий, описываемое в предложении 2, является в свою очередь алгебраическим многообразием в аффинном пространстве с координатами p_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, и H_k^j , $j, k = 1, 2, 3, \dots$, определяемым квадраками

$$f_{jk} = p_j p_k - p_{j+k} - \sum_{s=0}^k H_s^j p_s - \sum_{s=0}^j H_s^k p_s = 0 \quad (14)$$

и уравнениями (6).

3. СТРАТА Σ_1

Страта Σ_1 представляет собой самую низшую страту, отличающуюся от большой клетки, и соответствует $m = 1$ и $S = \{-1, 1, 2, \dots\}$. Вследствие отсутствия элемента нулевого порядка w_0 канонический базис имеет вид

$$p_i(z) = z^i + H_0^i + \sum_{k \geq 1} \frac{H_k^i}{z^k}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

ЛЕММА 2. Множество W_1 рядов Лорана (15) подчиняется условию $z^2 W_1 \subset W_1$ и уравнениям

$$p_j(z)p_k(z) = \sum_{l \geq 1} C_{jk}^l p_l(z), \quad j, k = 1, 2, 3, \dots, \quad (16)$$

если и только если параметры H_k^j удовлетворяют связям

$$\begin{aligned} H_0^{2j+k} + H_0^{2j} H_0^{2k} &= 0, \\ H_0^{2(k+j)+1} + H_0^{2k+1} H_0^{2j+1} + \sum_{l=0}^{j-1} H_{2l+1}^{2k+1} H_0^{2(j-l)-1} &= 0, \\ H_{2(j+l)+1}^{2k+1} + H_0^{2j} H_{2l+1}^{2k+1} - H_{2l+1}^{2(k+j)+1} - H_0^{2j} H_{2l+1}^{2k+1} - H_{2(l+j)+1}^{2k+1} - \sum_{s=0}^{j-1} H_{2s+1}^{2k+1} H_{2l+1}^{2(j-s)-1} &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$H_0^{2(k+j+1)} + H_0^{2k+1} H_0^{2j+1} + \sum_{s=0}^{k-1} H_0^{2(k-s)} H_{2s+1}^{2j+1} + \sum_{s=0}^{j-1} H_0^{2(j-s)} H_{2s+1}^{2k+1} = 0,$$

$$H_{2(l+k)+1}^{2j+1} + H_{2(l+j)+1}^{2k+1} + \sum_{s=0}^{l-1} H_{2s+1}^{2j+1} H_{2(l-s)-1}^{2k+1} - \sum_{s=0}^{k-1} H_{2(l+k)+1}^{2j+1} - \sum_{s=0}^{j-1} H_{2(l+j)+1}^{2k+1} = 0,$$

и

$$\begin{aligned} C_{2j,2k}^{2l} &= \delta_{j+k}^l + H_0^{2j} \delta_k^l + H_0^{2k} \delta_j^l, \\ C_{2j,2k+1}^{2l+1} &= \delta_{j+k}^l + H_0^{2j} \delta_k^l + H_0^{2k} \delta_j^l + H_{2(j-l)+1}^{2k+1}, \\ C_{2j+1,2k+1}^{2l+1} &= H_0^{2k+1} \delta_j^l + H_0^{2j+1} \delta_k^l, \\ C_{2j+1,2k+1}^{2l} &= \delta_{j+k+1}^l + H_{2(l+k)+1}^{2j+1} + H_{2(l+j)+1}^{2k+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Анализ связей (17) дает

$$H_i^{2n} = 0, \quad n, i = 1, 2, 3, \dots, \quad (19)$$

$$H_0^{2n} = -(-H_0^2)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (20)$$

т. е.

$$p_{2n}(z) = z^{2n} - (-H_0^2)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

Для элементов p_{2n+1} вместо этого имеем

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1^2 - 2H_0^1 p_1, \\ p_3 &= p_1^3 - 3H_0^1 p_1^2 - (3H_1^1 - 3H_0^1{}^2) p_1, \quad \dots \end{aligned} \quad (22)$$

Аналогично большой клетке имеем подмножество W_1 в Σ_1 , замкнутое относительно умножения, которое алгебраически представляет собой бесконечномерную коммутативную ассоциативную алгебру A_1 со структурными константами, задаваемыми в базисе (15) формулами (18). Геометрически W_1 представляет собой бесконечную башню семейств рациональных нормальных кривых всех нечетных порядков, проходящих через начало координат $p_1 = p_2 = p_3 = \dots = 0$.

Тот факт, что для страты Σ_1 получаются результаты, аналогичные результатам для большой клетки, не так уж удивителен. Действительно, учитывая соотношения (17), а именно

$$2H_1^1 - H_0^2 + H_0^{1^2} = 0, \quad H_0^3 + H_0^1 H_0^2 + H_0^1 H_1^1 = 0, \quad (23)$$

и формулы (21), т. е. $p_2 = z^2 + H_0^2$, можно переписать уравнения (22) в виде

$$\begin{aligned} z^2 &= (p_1 - H_0^1)^2 - 2H_1^1, \\ p_3 - H_0^3 &= (p_1 - H_0^1)^3 - 3H_1^1(p_1 - H_0^1). \end{aligned} \quad (24)$$

В переменных

$$\tilde{p}_1 = p_1 - H_0^1, \quad \tilde{p}_3 = p_3 - H_0^3 \quad (25)$$

уравнения (24) представляют собой два первых уравнения (11) для большой клетки. Легко проверяется, что в переменных

$$\tilde{p}_k = p_k - H_0^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (26)$$

все уравнения (22) совпадают с уравнениями (11) для большой клетки.

Таким образом, результаты для страты Σ_1 и большой клетки связаны простой заменой переменных (26). Аналогичная ситуация имеет место и для других страт Σ_m с нечетными m .

4. СТРАТА Σ_2 И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Для страты Σ_2 с $S = \{-2, 0, 2, 3, 4, \dots\}$ элементы положительного порядка канонического базиса даются выражением

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{H_k^0}{z^k}, \\ p_j &= z^j + H_{-1}^j z + \sum_{k \geq 1} \frac{H_k^j}{z^k}, \quad k, j = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Аналог лемм 1 и 2 имеет следующий вид.

ЛЕММА 3. Множество W_2 рядов Лорана (27) подчиняется уравнениям

$$p_j(z)p_k(z) = \sum_{l=0,2,3,\dots} C_{jk}^l p_l(z) \quad (28)$$

и условие $z^2 W_2 \subset W_2$ выполнено, если и только если

$$\begin{aligned} H_k^{2n} &= 0, \quad k = -1, 1, 2, 3, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ H_k^{2n+1} &= 0, \quad n, k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} H_{2(k+n)+1}^{2m+1} - H_{2k+1}^{2(m+n)+1} - \sum_{s=-1}^{n-2} H_{2s+1}^{2m+1} H_{2k+1}^{2(n-s)+1} &= 0, \\ H_{2(n+k)+1}^{2m+1} + H_{2(m+k)+1}^{2n+1} + \sum_{s=-1}^k H_{2s+1}^{2m+1} H_{2(l-s)-1}^{2n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Константы C_{jk}^l имеют вид

$$\begin{aligned} C_{2n,2m}^{2l} &= \delta_{m+n}^l, \\ C_{2n,2m+1}^{2l+1} &= \delta_{m+n}^l + H_{2(n-l)-1}^{2n+1}, \\ C_{2n+1,2m+1}^{2l} &= \delta_{m+n+1}^l + H_{2(m-l)+1}^{2n+1} + H_{2(n-l)+1}^{2m+1} + H_{-1}^{2n+1} H_{-1}^{2m+1} \delta_2^l + \\ &\quad + (H_{-1}^{2n+1} H_1^{2m+1} + H_1^{2n+1} H_{-1}^{2m+1}) \delta_0^l, \end{aligned} \quad (31)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} p_{2n} p_{2m} &= p_{2(m+n)}, \\ p_{2n} p_{2m+1} &= p_{2(m+n)+1} + \sum_{k=-1}^{n-2} H_{2k+1}^{2n+1} p_{2(n-k)-1}, \\ p_{2n+1} p_{2m+1} &= p_{2(m+n+1)} + \sum_{k=-1}^m H_{2k+1}^{2n+1} p_{2(m-k)} + \sum_{k=-1}^n H_{2k+1}^{2m+1} p_{2(n-k)} + \\ &\quad + H_{-1}^{2n+1} H_{-1}^{2m+1} p_2 + (H_{-1}^{2n+1} H_1^{2m+1} + H_1^{2n+1} H_{-1}^{2m+1}) \end{aligned} \quad (32)$$

и $p_{2n} = z^{2n}$, $n \geq 0$.

Как следствие, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Страта Σ_2 содержит максимальное замкнутое подмножество W_2 с элементами вида*

$$w = \sum_{i=0,2,3,\dots} a_i p_i(z) \quad (33)$$

с произвольными n и a_i и параметрами H_k^j , подчиняющимися связям (29), (30) и такими, что $z^2 W_2 \subset W_2$.

Из соотношений (28) немедленно следует, что все $p_i(z)$ порождены двумя элементами z^2 и p_3 .

Используя формулы (32), можно показать, что набор независимых соотношений (28) имеет вид

$$p_3^2 = \lambda^3 + 2H_{-1}^3 \lambda^2 + (2H_{-1}^3{}^2 + 2H_1^3) \lambda + 2H_{-1}^3 H_1^3 + 2H_3^3, \quad (34)$$

$$p_{2n+1} = \left(\lambda^{n-1} - \sum_{i=0}^{n-2} H_{-1}^{2(n-i)-1} \lambda^i \right) p_3. \quad (35)$$

Последнее соотношение получено путем итерации формул

$$p_{2n+1} = \lambda p_{2n-1} + H_{-1}^{2n-1} p_3. \quad (36)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Подмножество W_2 представляет собой бесконечномерную коммутативную ассоциативную алгебру с базисом $1, p_2, p_3, p_4, \dots$, изоморфную $\mathbb{C}[\lambda, p_3]/C_6$, где*

$$C_6 = p_3^2 - \lambda^3 - 2H_{-1}^3 \lambda^2 - (2H_{-1}^3{}^2 + 2H_1^3) \lambda - (2H_{-1}^3 H_1^3 + 2H_3^3). \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ассоциативность следует из того факта, что условия (29) и (30) эквивалентны условию

$$\sum_{s=0,2,3,\dots} C_{jk}^s C_{sl}^r = \sum_{s=0,2,3,\dots} C_{lk}^s C_{sj}^r, \quad j, k, l, r = 0, 2, 3, \dots, \quad (38)$$

где константы C_{jk}^l заданы с помощью (32).

Если теперь рассматривать λ, p_3, p_5 и H_k^j как аффинные координаты, получаем следующую геометрическую интерпретацию подмножества W_2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Подмножество W_2 представляет собой бесконечномерное алгебраическое многообразие Γ_2 в аффинном пространстве с координатами p_j , $j = 2, 3, 4, \dots$, H_k^j , $j = 3, 5, 7, \dots$, $k = -1, 1, 3, 5, \dots$, определяемыми пересечением квадрик

$$f_{jk} = p_j p_k - p_{j+k} - \sum_{l=0,2,3,\dots}^{j+k-1} C_{jk}^l p_l(z) = 0 \quad (39)$$

и квадрик (30). Идеал $I^{(2)}$ этого многообразия есть

$$I^{(2)} = \langle C_6, l_5^{(2)}, l_7^{(2)}, l_9^{(2)}, \dots \rangle, \quad (40)$$

$$\text{где } l_{2n+1}^{(2)} = p_{2n+1} - \left(\lambda^{n-1} - \sum_{i=0}^{n-2} H_{-1}^{2(n-i)-1} \lambda^i \right) p_3.$$

Поскольку $W_2 \sim \mathbb{C}[\lambda, p_3]/C_6$, можно рассматривать Γ_2 как бесконечное семейство координатных колец эллиптической кривой $C_6 = 0$, параметризованной переменными H_k^j , подчиняющимися условиям (29), (30). Анализируя эти условия, приходим к выводу, что среди всех H_k^j имеется бесконечное множество независимых переменных, например $H_{-1}^3, H_1^3, H_3^3, H_5^3, \dots$.

Легко проверяется, что кривая $C_6 = 0$ имеет род 1. Поэтому страта Σ_2 содержит бесконечное семейство эллиптических кривых, параметризуемых переменными H_{-1}^3, H_1^3, H_3^3 .

Идеал $I^{(2)}$ содержит сингулярные гиперэллиптические кривые всех порядков и рода 1, задаваемые как

$$p_{2n+1}^2 = \left(\lambda^{n-1} - \sum_{i=0}^{n-2} H_{-1}^{2(n-i)-1} \lambda^i \right)^2 (\lambda^2 + 2H_{-1}^3 \lambda^2 + (2H_{-1}^3)^2 + 2H_1^3) \lambda + 2H_{-1}^3 H_1^3 + 2H_3^3. \quad (41)$$

5. СТРАТА Σ_3 : (3, 4)-КРИВЫЕ НУЛЕВОГО РОДА

Следующий случай соответствует $S = \{-3, -1, 1, 3, 4, 5, \dots\}$. Вследствие отсутствия элементов порядка 0 и 2 положительные элементы канонического базиса даются выражениями

$$p_1 = z + H_0^j + \sum_{k \geq 1} \frac{H_k^1}{z^k},$$

$$p_j = z^j + H_{-2}^j z^2 + H_0^j + \sum_{k \geq 1} \frac{H_k^j}{z^k}, \quad j = 3, 4, 5, \dots \quad (42)$$

Поскольку p_1^2 имеет порядок 2, замкнутое подмножество может быть порождено только элементами $p_3, p_4, p_5, \dots$.

ЛЕММА 4. Множество W_3 рядов Лорана $p_j(z)$, $j = 3, 4, 5, \dots$, подчиняется уравнениям

$$p_j(z)p_k(z) = \sum_{l=3,4,5,\dots} C_{jk}^l p_l(z), \quad j, k = 3, 4, 5, \dots, \quad (43)$$

и условию $z^2 W_3 \subset W_3$, если и только если

$$p_j = z^j + H_{-2}^j z^2 + H_0^j, \quad j \geq 5, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} H_{-2}^j + H_{-2}^{j-2} H_{-2}^4 - H_0^{j-2} &= 0, \\ H_0^j + H_{-2}^{j-2} H_0^4 &= 0, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} H_0^4 + 2H_0^3 H_{-2}^3 - H_{-2}^3 H_{-2}^4 - H_{-2}^4 &= 0, \\ H_0^{3^2} - H_{-2}^3 H_0^4 - H_{-2}^4 H_0^4 &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с условия $z^{2n} W_3 \subset W_3$. Имеем

$$z^{2n} p_m(z) = z^{2n+m} + \dots + H_{2n-1}^m z + \dots. \quad (47)$$

В W_3 нет элемента, содержащего слагаемое первого порядка. Поэтому $H_{2n-1}^m = 0$ для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ и $n = 3, 4, 5, \dots$, т. е.

$$p_j(z) = z^j + H_{-2}^j z^2 + H_0^j + \sum_{n \geq 1} \frac{H_{2n}^j}{z^{2n}}, \quad j = 3, 4, 5, \dots. \quad (48)$$

Рассматривая теперь произведение $p_{2k+1} p_j$, получаем

$$p_{2k+1}(z)p_j(z) = z^{2k+j+1} + \dots + H_{2k}^j z + \dots. \quad (49)$$

Слагаемое порядка z^i , $i \geq 3$, можно представить как суперпозицию элементов $p_3, p_4, \dots, p_{2k+j+1}$, что дает константы C_{jk}^l , в то время как коэффициент перед z должен обращаться в нуль. Поэтому $H_{2k}^j = 0$ для всех $k = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом,

$$p_j = z^j + H_{-2}^j z^2 + H_0^j, \quad j \geq 3. \quad (50)$$

Не все коэффициенты H_{-2}^j и H_0^j являются независимыми. Действительно, из соотношений

$$\begin{aligned} z^2 p_3 &= p_5 + H_{-2}^3 p_4, \\ z^2 p_4 &= p_6 + H_{-2}^4 p_4, \\ z^4 p_3 &= p_7 + H_{-2}^3 p_6 + H_0^3 p_4, \quad \dots \end{aligned} \quad (51)$$

следует, что

$$\begin{aligned}
 H_{-2}^5 - H_0^3 + H_{-2}^3 H_{-2}^4 &= 0, \\
 H_0^5 + H_{-2}^3 H_0^4 &= 0, \\
 H_{-2}^6 - H_0^4 + H_{-2}^4{}^2 &= 0, \\
 H_0^6 + H_{-2}^4 H_0^4 &= 0, \\
 H_{-2}^7 + H_{-2}^3 H_{-2}^6 + H_0^3 H_{-2}^4 &= 0, \\
 H_0^7 + H_{-2}^3 H_0^6 + H_0^3 H_0^4 &= 0, \quad \dots
 \end{aligned} \tag{52}$$

Соотношения (52) представляют собой нижние члены соотношений (45). Используя эти соотношения, можно выразить все H_{-2}^j , H_0^j при $j = 5, 6, 7, \dots$ в терминах H_{-2}^3 , H_0^3 и H_{-2}^4 , H_0^4 .

Более того, обращение в нуль коэффициентов перед z^2 и z^0 в соотношении

$$p_3^2 - (p_6 + 2H_{-2}^3 p_5 + H_{-2}^3{}^2 p_4 + 2H_0^3 p_3) = 0 \tag{53}$$

эквивалентно условиям

$$\begin{aligned}
 H_{-2}^6 - 2H_{-2}^3 H_{-2}^5 - H_{-2}^3{}^2 H_{-2}^4 &= 0, \\
 H_0^6 - H_0^3{}^2 - 2H_{-2}^3 H_0^5 - H_{-2}^3{}^2 H_0^4 &= 0.
 \end{aligned} \tag{54}$$

Окончательно, учитывая (52), получаем связи (46). Таким образом, среди всех коэффициентов имеются только два независимых параметра H_{-2}^j и H_0^j . Простейший выбор состоит в том, чтобы взять H_{-2}^3 и H_{-2}^4 в качестве независимых переменных. Окончательно прямое вычисление дает

$$C_{jk}^l = \delta_{j+k}^l + H_{-2}^k \delta_{j+2}^l + H_0^k \delta_j^l + H_{-2}^j \delta_{k+2}^l + H_0^j \delta_k^l + H_{-2}^j H_{-2}^k \delta_4^l. \tag{55}$$

Из леммы 4 немедленно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Страта Σ_3 содержит подмножество W_3 , замкнутое относительно умножения: $W_3 \cdot W_3 \subset W_3$. Элементы подмножества W_3 имеют вид $w = \sum_{j=3}^n a_j p_j(z)$ с произвольным n и a_i и p_i вида (44), где H_{-2}^j , H_0^j подчиняются связям (45), (46). Подмножество W_3 представляет собой бесконечномерную ассоциативную коммутативную алгебру A_3 с базисом (44) и структурными константами (55).

Геометрическая интерпретация подмножества W_3 дается следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Подмножество W_3 можно рассматривать как двухпараметрическое семейство алгебраических многообразий, определяемых соотношениями

$$p_j p_k - \sum_l C_{jk}^l p_l = p_j p_k - (p_{j+k} + H_{-2}^k p_{j+2} + H_0^k p_j + H_{-2}^j p_{k+2} + H_0^j p_k + H_{-2}^j H_{-2}^k p_4) = 0. \tag{56}$$

Идеал этого семейства содержит плоскую $(3, 4)$ -кривую (в терминологии работы [7]), определяемую уравнением

$$\begin{aligned}
 & p_4^3 - p_3^4 + 4H_{-2}^3 p_3 p_4^2 - (3H_{-2}^4 - 2H_{-2}^3)^2 p_3^2 p_4 - (-4H_0^3 + 2H_{-2}^3 H_{-2}^4) p_3^3 - \\
 & - (3H_0^4 + 4H_0^3 H_{-2}^3 + H_{-2}^3^4 + H_{-2}^3^2 H_{-2}^4) p_4^2 - (4H_{-2}^3^2 H_0^3 + 8H_{-2}^3 H_0^4 - 2H_{-2}^3^2 H_{-2}^4^2 - \\
 & - 6H_0^3 H_{-2}^4 - 2H_{-2}^3^3 H_{-2}^4) p_3 p_4 - (-3H_0^4 H_{-2}^4 + 6H_0^3^2 - 6H_0^3 H_{-2}^3 H_{-2}^4 + 2H_{-2}^3^2 H_0^4 + \\
 & + H_{-2}^3^2 H_{-2}^4^2 + H_{-2}^4^3) p_3^2 - (-3H_0^4^2 - 2H_0^3^2 H_{-2}^2 - 2H_{-2}^3^2 H_0^4 H_{-2}^4 - 2H_{-2}^3^4 H_0^4 + \\
 & + 3H_0^3^2 H_{-2}^4 + 2H_0^3 H_{-2}^3 H_{-2}^4^2 - 8H_0^3 H_{-2}^3 H_0^4 + 2H_0^3 H_{-2}^3^3 H_{-2}^4) p_4 - \\
 & - (-4H_0^3^3 - 4H_{-2}^3 H_0^4^2 + 6H_0^3 H_0^4 H_{-2}^4 - 4H_0^3 H_0^4 H_{-2}^3^2 + 6H_0^3^2 H_{-2}^3 H_{-2}^4 + \\
 & + 2H_0^4 H_{-2}^3 H_{-2}^4^2 + 2H_0^4 H_{-2}^3^3 H_{-2}^4 - 2H_0^3 H_{-2}^3^2 H_{-2}^4^2 - 2H_0^3 H_{-2}^4^3) p_3 = 0, \quad (57)
 \end{aligned}$$

где H_{-2}^3 , H_0^3 , H_{-2}^4 и H_0^4 подчиняются связям (46). $(3, 4)$ -Кривая (57) имеет род 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямым вычислением с использованием члена вида (44) от p_j .

Сравнивая результаты данного и предыдущего разделов, можно заметить основное различие между геометрическими свойствами подмножеств W_2 и W_3 . Оно связано с тем, что ряды Лорана из-за отличия в элементах первого порядка в z имеют разный вид. А именно, хотя в обоих случаях W_i не содержит элемента $p_1(z)$, отсутствие в W_3 слагаемого порядка z в $p_j(z)$ приводит к возникновению существенных ограничений, ведущих в свою очередь к полиномиальности $p_j(z)$.

Заметим также, что вследствие наличия элемента $p_0 = 1$ нулевого порядка в W_2 имеем $z^2 \in W_2$, в то время как $z^2 \notin W_3$. Как следствие, в качестве генераторов алгебры A_3 вместо p_3 , p_4 и p_5 можно, например, выбрать p_3 , p_4 и $z^2 p_3$.

Во избежание полиномиальности для всех $p_j(z) \in W_3$ необходимо ослабить условия $z^2 W_3 \subset W_3$. Поскольку z^2 не является элементом подмножества W_3 , было бы естественно не требовать, чтобы произведение z^2 и элемента из W_3 принадлежало W_3 , а вместо этого потребовать, чтобы $z^2 W_3 \subset \Sigma_3$. Присутствие элемента $p_1(z)$ в Σ_3 позволяет избежать прямых связей для $p_j(z)$, следующих из соотношений типа (47), (49). Например, вместо условий (51) получаем условия

$$\begin{aligned}
 z^2 p_3 - p_5 - H_{-2}^3 p_4 &= H_1^3 p_1, \\
 z^2 p_4 - p_6 - H_{-2}^4 p_4 &= H_1^4 p_1
 \end{aligned} \quad (58)$$

и т. д. В силу уравнений такого типа получаем бесконечное множество соотношений для H_k^j . Компьютерный анализ свидетельствует, что эти условия снова ведут к связям $H_k^j = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$, $j = 3, 4, 5, \dots$, т. е. к полиномиальности всех $p_j(z)$.

6. СТРАТЫ Σ_{2n} . ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ РОДА n

Страта Σ_{2n} с произвольным n характеризуется набором $S = \{-2n, -2n+2, -2n+4, \dots, 0, 2, 4, \dots, 2n, 2n+1, 2n+2, \dots\}$. Поэтому она не содержит, в частности, n элементов порядков $1, 3, 5, \dots, 2n-1$, и элементы положительного порядка канониче-

ского базиса даются выражениями

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{H_k^0}{z^k}, \\ p_j &= z^j + \sum_{k=0}^{j-1} H_{-2k-1}^j z^{2k+1} + \sum_{k \geq 1} \frac{H_k^j}{z^k}, \quad j = 2, 4, 6, \dots, 2n-2, \\ p_j &= z^j + \sum_{k=0}^{n-1} H_{-2k-1}^j z^{2k+1} + \sum_{k \geq 1} \frac{H_k^j}{z^k} \quad j = 2n, 2n+1, 2n+2, 2n+3, \dots \end{aligned} \quad (59)$$

В этом случае имеем следующую лемму.

ЛЕММА 5. Множество W_{2n} рядов Лорана (59) подчиняется условию $z^2 W_{2n} \subset W_{2n}$ и уравнениям

$$p_j(z)p_k(z) = \sum_l C_{jk}^l p_l(z), \quad (60)$$

если и только если

$$\begin{aligned} H_k^{2m} &= 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = -2n+2, -2n+4, \dots, -2, 0, 1, 2, 3, \dots, \\ H_{2k}^{2m+1} &= 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = -n, -n+1, -n+2, \dots, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} H_{2(l+k)+1}^{2j+1} - H_{2l+1}^{2(j+k)+1} - \sum_{s=-n}^{k-1} H_{2s+1}^{2j+1} H_{2l+1}^{2(k-s)-1} &= 0, \\ H_{2(l+k)+1}^{2j+1} + H_{2(l+j)+1}^{2k+1} + \sum_{s=-n}^{-1} H_{2s+1}^{2j+1} H_{2(l-s)-1}^{2k+1} + \sum_{r=-n}^{-1} H_{2r+1}^{2k+1} H_{2(l-r)-1}^{2j+1} + \\ + \sum_{s=0}^{l-n} H_{2s+1}^{2j+1} H_{2(l-s)-1}^{2k+1} &= 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Переписывая уравнение (60) отдельно для p_j с четными и нечетными j , т. е.

$$\begin{aligned} p_{2j}p_{2k} &= p_{2(j+k)}, \\ p_{2j}p_{2k+1} &= p_{2(j+k)+1} + \sum_{s=-n}^{k-1} H_{2s+1}^{2j+1} p_{2(k-s)-1}, \\ p_{2j+1}p_{2k+1} &= p_{2(j+k)+1} + \sum_{s=-n}^j H_{2s+1}^{2j+1} p_{2(j-s)} + \sum_{s=-n}^k H_{2s+1}^{2k+1} p_{2(k-s)} + \\ &+ \sum_{s=-n}^{-1} \sum_{r=-n}^{-1} H_{2s+1}^{2j+1} H_{2r+1}^{2k+1} p_{-2(s+r+1)} + \sum_{s=-n}^{-1} \sum_{r=0}^{-s-1} H_{2s+1}^{2j+1} H_{2r+1}^{2k+1} p_{-2(s+r+1)} + \\ &+ \sum_{r=-n}^{-1} \sum_{s=0}^{-r-1} H_{2s+1}^{2j+1} H_{2r+1}^{2k+1} p_{-2(s+r+1)}, \end{aligned} \quad (63)$$

получаем

$$\begin{aligned} p_{2m} &= (z^2)^m, \\ p_{2m+1} &= \alpha(\lambda) p_{2n+1}, \quad m = n+1, n+2, \dots, \quad \lambda = z^2, \end{aligned} \quad (64)$$

при подходящих $\alpha(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$. Более того,

$$p_{2n+1}^2 = \lambda^{2n+1} + \sum_{k=0}^n u_k \lambda^k = 0, \quad (65)$$

где коэффициенты u_k можно получить из

$$p_{2n+1}^2 = \lambda^{2n+1} + 2 \sum_{s=0}^{2n} H_{2(n-s)+1}^{2n+1} \lambda^s + \sum_{k=-n}^{n+1} \sum_{s=0}^{n-k-1} H_{2k+1}^{2n+1} H_{-2(s+k)-1}^{2n+1} \lambda^s. \quad (66)$$

Таким образом, имеем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Страта Σ_{2n} при $n = 2, 3, 4, \dots$ содержит максимальное подмножество W_{2n} , замкнутое относительно умножения, с элементами вида*

$$w = \sum_{k \geq 0} a_{2k} \lambda^k + \sum_{k \geq n} b_{2k+1}(\lambda) p_{2k+1} \quad (67)$$

и параметрами H_k^j , подчиняющимися связям (61) и (62).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Подмножество W_{2n} представляет собой бесконечномерную коммутативную ассоциативную алгебру A_{2n} , изоморфную $\mathbb{C}[\lambda, p_{2n+1}]/C_{2n+1}$, где $\lambda = z^2$,*

$$C_{2n+1} = p_{2n+1}^2 - \lambda^{2n+1} - \sum_{k=0}^n u_k \lambda^k = 0 \quad (68)$$

и u_k определены формулами (66).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ассоциативность алгебры A_{2n} следует из эквивалентности связей (61) и (62) и условий ассоциативности

$$\sum_s C_{jk}^s C_{ls}^r = \sum_s C_{lk}^s C_{js}^r, \quad (69)$$

где константы C_{jk}^l определяются выражениями (60), т. е.

$$\begin{aligned} C_{2j,2k}^{2l} &= \delta_{j+k}^l, \\ C_{2j+1,2k}^{2l+1} &= \delta_{j+k}^l + H_{2(k-l)-1}^{2j+1}, \\ C_{2j,2k}^{2l} &= \delta_{j+k}^l + H_{2(j-l)+1}^{2j+1} + H_{2(k-l)+1}^{2k+1} + \\ &+ \sum_{s=-n-1}^{-1} \sum_{r=-n-1}^{-1} H_{2s+1}^{2j+1} H_{2r+1}^{2k+1} \delta_{-2(s+r+1)}^l + \\ &+ \sum_{s=-n-1}^{-1} \sum_{r=0}^{-s-1} H_{2s+1}^{2j+1} H_{2r+1}^{2k+1} \delta_{-2(s+r+1)}^l + \\ &+ \sum_{r=-n-1}^{-1} \sum_{s=0}^{-r-1} H_{2s+1}^{2j+1} H_{2r+1}^{2k+1} \delta_{-(s+r+1)}^l. \end{aligned} \quad (70)$$

Интерпретируя $\lambda, p_{2n+1}, p_{2n+3}, \dots$ как локальные аффинные координаты, заметим сначала, что уравнение

$$C_{2n+1} = 0 \quad (71)$$

определяет гиперэллиптическую кривую рода n . Она параметризуется с помощью $2n+1$ произвольных величин $H_{-2n+1}^{2n+1}, H_{-2n+1}^{2n+3}, \dots, H_{+1}^{2n+1}, \dots, H_{2n+1}^{2n+1}$. Их вариация порождает бесконечное семейство гиперэллиптических кривых. Имеем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Подмножество W_{2n} в Σ_{2n} представляет собой бесконечно-мерное алгебраическое многообразие Γ_{2n} , определяемое соотношениями (60)–(62), (68). Его идеал имеет вид*

$$I_{2n+1} = \langle C_{2n+1}, l_{2n+3}^{(n)}, l_{2n+5}^{(n)}, \dots \rangle, \quad (72)$$

$$\text{где } l_{2m+1}^{(n)} = p_{2m+1} - \alpha_m(\lambda)p_{2n+1}, \quad m = n+1, n+2, n+3, \dots$$

Другими словами, многообразие Γ_{2n} является пересечением кубики $C_{2n+1} = 0$ и бесконечного множества алгебраических кривых $l_{2m+1}^{(n)}, m = n+1, n+2, n+3, \dots$. Легко видеть, что идеал I_{2n} содержит гиперэллиптические кривые высшего порядка, но все они имеют род n .

Таким образом, страта Σ_{2n} характеризуется присутствием плоских гиперэллиптических кривых C_{2n+1} рода n в замкнутом подмножестве W_{2n} . Это обусловлено наличием n щелей (элементов $p_1(z), p_3(z), \dots, p_{2n-1}(z)$) в базисе подмножества W_{2n} . В теории абелевых функций хорошо известен тот факт, что для гиперэллиптических кривых (римановых поверхностей) рода n имеется n щелей (Вейерштрасс) в точке общего положения (см., например, монографию [8]). Возможно, не так хорошо известно наблюдение, что эти щели и, следовательно, свойства соответствующих алгебраических кривых определяются структурой страт Биркгофа Σ_{2n} в $\text{Gr}^{(2)}$. В другом контексте появление гиперэллиптических кривых в стратах Биркгофа на $\text{Gr}^{(2)}$ было отмечено в работе [9].

7. СТРАТЫ Σ_{2n+1}

Страта $\Sigma_{2n+1}, n = 2, 3, 4, \dots$, характеризуется $S = \{-2n-1, -2n+1, \dots, -1, 1, 3, \dots, 2n+1, 2n+2, \dots\}$. Поэтому элементы положительного порядка канонического базиса в Σ_{2n+1} имеют вид

$$\begin{aligned} p_j(z) &= z^j + H_{-j+1}^j z^{j-2} + H_{j+2}^j z^{j-2} + \dots + H_0^j + \sum_{k \geq 1} \frac{H_k^j}{z^k}, \quad j = 1, 3, \dots, 2n-1, \\ p_j(z) &= z^j + H_{-2n}^j z^{2n} + H_{-2n+1}^j z^{2n-1} + \dots + H_0^j + \sum_{k \geq 1} \frac{H_k^j}{z^k}, \quad j = 2n+1, 2n+2, \dots \end{aligned} \quad (73)$$

Замкнутое подмножество в Σ_{2n+1} имеет различную структуру при разных n . Чтобы показать это, начнем с Σ_5 . В этом случае элементы (73) канонического базиса

имеют вид

$$\begin{aligned} p_1 &= z + H_0^1 + \sum_{k \geq 1} \frac{H_k^1}{z^k}, \\ p_3 &= z^3 + H_{-2}^3 z^2 + H_0^1 + \sum_{k \geq 1} \frac{H_k^1}{z^k}, \\ p_j &= z^j + H_{-4}^j z^4 + H_{-2}^j z^2 + H_0^j + \sum_{k \geq 1} \frac{H_k^j}{z^k} \quad j = 5, 6, 7, \dots \end{aligned} \quad (74)$$

Нетрудно видеть, что максимальным замкнутым подмножеством W_5 в Σ_5 является подмножество с базисом $(p_3, p_5, p_6, \dots)$.

ЛЕММА 6. Множество W_5 рядов Лорана $p_3, p_5, p_6, \dots$ подчиняется уравнениям

$$p_j(z)p_k(z) = \sum_{l=3,5,6,\dots} C_{jkl} p_l(z) \quad (75)$$

и условию $z^2 W_5 \subset W_5$, если и только если $H_k^j = 0$, $j = 3, 5, 6, \dots$, $k = 1, 2, 3, \dots$, т. е. все p_j являются полиномами и H_k^j , $k = -4, -2, 0$, подчиняются связям

$$\begin{aligned} H_0^5 &= 0, & H_{-2}^5 &= H_0^3, & H_{-4}^5 &= H_{-2}^3, \\ H_0^6 &= -H_0^3, & H_{-2}^6 &= -2H_0^3 H_{-2}^3, & H_{-4}^6 &= -H_{-2}^3{}^2, & \dots \end{aligned} \quad (76)$$

Доказательство полиномиальности $p_j(z)$ точно такое же, как для W_3 (лемма 4). Связи (76) следуют из уравнений (75) и условия $z^5 W_5 \subset W_5$. Например, имеем $z^2 p_3 = p_5$, $z^2 p_5 = p_7 + H_{-4}^5 p_6$ и т. д. Константы C_{jkl}^l даются выражениями

$$C_{jkl}^l = \delta_{j+k}^l + \sum_{s=0}^2 H_{-2s}^j \delta_{2s+k}^l + \sum_{s=0}^2 H_{-2s}^k \delta_{2s+j}^l + \sum_{s,r=0}^2 H_{-2s}^j H_{-2r}^k \delta_{2(r+s)}^l, \quad j, k \geq 3, \quad (77)$$

где ради экономии места мы использовали $H_{-4}^3 = 0$. Следствием этой леммы является следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Страта Σ_5 содержит максимальное подмножество W_5 , замкнутое относительно умножения: $W_5 \cdot W_5 \subset W_5$. Элементы подмножества W_5 имеют вид $w = \sum_{i=3,5,6,7,\dots} a_i p_i(z)$ с произвольными a_i , n и с H_{-4}^j , H_{-2}^j , H_0^j , подчиняющимися связям (52).

Алгебраически W_5 представляет собой бесконечномерную коммутативную ассоциативную алгебру A_5 полиномов со структурными константами, определенными выражениями (77). Геометрически W_5 представляет собой бесконечное алгебраическое многообразие Γ_5 , определяемое уравнениями (52) и (72).

Первые уравнения из набора (75) имеют вид

$$\begin{aligned} p_3^2 &= p_6 + 2H_{-2}^3 p_5 + 2H_0^3 p_3, \\ p_3 p_5 &= p_8 + 2H_{-2}^3 p_7 + H_{-2}^3{}^2 p_6 + 2H_0^3 p_5 \end{aligned} \quad (78)$$

и т. д. Тогда алгебра A_5 порождается элементами p_3 , p_5 и p_7 .

Нетрудно показать, что идеал многообразия Γ_5 содержит семейство плоских $(3, 5)$ -кривых

$$p_5^3 - p_3^5 + 2H_{-2}^3 p_3^3 p_5 - H_{-2}^3 p_3 p_5^2 + 2H_0^3 p_3^4 - 2H_0^3 H_{-2}^3 p_3^2 p_5 - H_0^3 p_3^3 = 0, \quad (79)$$

параметризованных двумя переменными H_{-2}^3 и H_0^3 . Вследствие полиномиальности p_3 и p_5 по z род кривой (79), очевидно, равен нулю. Идеал многообразия содержит другую рациональную плоскую кривую, задаваемую выражением

$$\begin{aligned} p_6^5 - p_5^6 + 6H_{-2}^3 p_5 p_6^4 + 14H_{-2}^3 p_5^2 p_6^3 - (-6H_0^3 - 16H_{-2}^3) p_5^3 p_6^2 - \\ - (-16H_0^3 H_{-2}^3 - 9H_{-2}^4) p_5^4 p_6 - (-10H_0^3 H_{-2}^3 - 2H_{-2}^5) p_5^5 + 2H_0^3 p_6^4 + \\ + 8H_0^3 H_{-2}^3 p_5 p_6^3 + 10H_{-2}^3 H_0^3 p_5^2 p_6^2 - (-14H_0^3 - 4H_{-2}^3 H_0^3) p_5^3 p_6 + \\ + 20H_0^3 H_{-2}^3 p_5^4 + H_0^4 p_6^3 + 2H_0^4 H_{-2}^3 p_5 p_6^2 + 8H_0^5 p_5^3 = 0. \end{aligned} \quad (80)$$

Страта Σ_5 демонстрирует основные свойства высших страт Σ_{4m-1} , $m = 1, 2, 3, \dots$. Максимальное замкнутое подмножество W_{4m-1} обладает базисом $(p_{2m+1}, p_{2m+3}, \dots, p_{4m-1}, p_{4m}, p_{4m+1}, \dots)$, в то время как страта Σ_{4m+1} , $m = 1, 2, 3, \dots$, обладает базисом $(p_{2m+1}, p_{2m+3}, \dots, p_{4m-1}, p_{4m+1}, p_{4m+2}, \dots)$ с соответствующими p_j . При этом можно установить аналог леммы 6 для $\Sigma_{4m\pm 1}$, который, в частности, утверждает, что все $p_j(z)$ являются полиномами по z , подчиняющимися уравнениям

$$p_j(z) p_k(z) = \sum_l C_{jk}^l p_l(z), \quad j, k, l = 2m+1, 2m+3, \dots, \quad (81)$$

а также имеют место некоторые связи для H_{-k}^j .

Следовательно, имеется замкнутое подмножество $W_{4m\pm 1}$ в $\Sigma_{4m\pm 1}$, которое алгебраически является коммутативной ассоциативной алгеброй, а геометрически представляет собой семейство алгебраических многообразий $\Gamma_{4m\pm 1}$, определяемых уравнением (81). Идеалы многообразий $\Gamma_{4m\pm 1}$ содержат плоские $(2m+1, 2m+3)$ -кривые

$$p_{2m+1}^{2m+3} - p_{2m+3}^{2m+1} + \dots = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (82)$$

нулевого рода.

Свойствам этих рациональных кривых будет посвящена отдельная работа.

Благодарности. Б.Г. Конопельченко выражает благодарность В.М. Бухштаберу и Б. Дубровину за полезные обсуждения. Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке PRIN (грант № 28002K9KXZ) и FAR 2009 (*Sistemi dinamici Integrabili e Interazioni fra campi e particelle*) Миланского университета Bicocca.

Список литературы

- [1] M. Sato, Y. Sato, "Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassmann manifold", *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science*, North-Holland Math. Stud., **81**, eds. H. Fujita, Peter D. Lax, G. Strang, North-Holland, Amsterdam, 1983, 259–271.
- [2] G. Segal, G. Wilson, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **61**:1 (1985), 5–65.

- [3] A. Pressley, G. Segal, *Loop Groups*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 1988.
- [4] B. G. Konopelchenko, G. Ortenzi, *Algebraic curves in Birkhoff strata of Sato Grassmannian*, arXiv: 1005.2053.
- [5] B. G. Konopelchenko, G. Ortenzi, *Algebraic varieties in Birkhoff strata of the Grassmannian $Gr^{(2)}$: Harrison cohomology and integrable systems*, arXiv: 1102.0700.
- [6] J. Harris, *Algebraic Geometry: A First Course*, Graduate Texts Math., **133**, Springer, Berlin, 1992.
- [7] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, В. З. Энольский, *Функц. анализ и его прил.*, **33**:2 (1999), 1–15.
- [8] H. F. Baker, *Abelian Functions*, Cambridge Math. Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [9] Y. Kodama, B. G. Konopelchenko, *J. Phys. A*, **35**:31 (2002), L489–L500, arXiv: nlin/0205012.