Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Мартина, Некоммутативная механика и экзотическая галилеева симметрия, *ТМФ*, 2011, том 167, номер 3, 484–495

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6656>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:13:00

© 2011 г.

Л. Мартина*

НЕКОММУТАТИВНАЯ МЕХАНИКА И ЭКЗОТИЧЕСКАЯ ГАЛИЛЕЕВА СИММЕТРИЯ

В терминах формализма 2-форм Лагранжа–Сурье описан обширный набор гамильтоновых динамических систем с лагранжианами первого порядка. Рассмотрение охватывает широкий класс систем, полученных в рамках различных феноменологических контекстов. Одним из естественных следствий оказывается некоммутативность координат местоположения частиц. Приведены различные явные примеры.

Ключевые слова: динамическая система, формализм Лагранжа–Сурье, гамильтонова структура.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проявляющийся в последние годы интерес к динамическим системам с некоммутирующими (не обязательно неканоническими) переменными связан с задачами физики конденсированного состояния материи [1], оптики [2] и теории струн [3]. Такие системы находят применение при описании блоховских функций электронов [4], а также аномального [5], спинного [6] и оптического [7] эффектов Холла. Приведем примеры.

1. Квазиклассические уравнения движения в $\epsilon_n(\vec{k})$ -энергетической зоне блоховского электрона в кристаллическом твердом теле имеют вид

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial \epsilon_n(\vec{k})}{\partial \vec{k}} - \dot{\vec{k}} \times \vec{\Theta}(\vec{k}), \quad \dot{\vec{k}} = -e\vec{E} - e\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}). \quad (1.1)$$

Зависящая только от импульса функция $\Theta_i(\vec{k}) = \epsilon_{ijl} \partial_{k_j} \mathcal{A}_l(\vec{k})$ представляет собой кривизну, связанную с так называемой связностью Берри $\mathcal{A}$.

2. Квазиклассические уравнения, описывающие спинный эффект Холла в полупроводниках вблизи точки вырождения валентной связи $\vec{k} = 0$, имеют вид

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial E_s(\vec{k})}{\partial \vec{k}} + \dot{\vec{k}} \times \vec{\Theta}_s, \quad \dot{\vec{k}} = -e\vec{E}, \quad (1.2)$$

*Dipartimento di Fisica, Università del Salento; Sezione INFN di Lecce, Lecce, Italy.
E-mail: Luigi.Martina@le.infn.it

где $s = \pm 1/2, \pm 3/2$ – спиновая спиральность дырок, энергия задается выражением $E_s(\vec{k}) = (\hbar^2/2m)(A - Bs^2)k^2$, а кривизна Берри в силу решеточной структуры оказывается равной $\vec{\Theta}_s = s(2s^2 - 7/2)\vec{k}/k^3$. Траектории дырок с противоположной спиральностью разделяются в процессе движения, что позволяет разрабатывать *спинтроннику*.

3. Оптический эффект Магнуса и оптический эффект Холла [2], [7], [8] описываются приближенными уравнениями

$$\dot{\vec{r}} \approx \vec{p} - \frac{s}{\omega} \text{grad} \left(\frac{1}{n} \right) \times \vec{p}, \quad \dot{\vec{p}} \approx -n^3 \omega^2 \text{grad} \left(\frac{1}{n} \right), \quad (1.3)$$

где s – спин протона. Эти уравнения параметризуют член, описывающий отклонение луча света от траектории, предсказываемой законами обычной геометрической оптики.

4. Движение боголюбовской квазичастицы в вихре сверхтекучей жидкости [9] задается системой

$$M\dot{\vec{q}} + \vec{F} \times \vec{r} = -\frac{\partial h}{\partial \vec{r}}, \quad M\dot{\vec{r}} = \frac{\partial h}{\partial \vec{q}}, \quad (1.4)$$

где эффективная масса $M_{ij} = \delta_{ij} - \partial A_i / \partial q^j$ и магнитное поле $F_{ij} = \partial A_i / \partial r^j - \partial A_j / \partial r^i$ заданы в терминах калибровочного потенциала $\vec{A} = \vec{A}(\vec{q}, \vec{r})$, а $h = H(\vec{q}, \vec{r})$ – некоторый гамильтониан.

5. Динамическая система, следующая из теории струн [10],

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{m} + \Theta_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j}, \quad \dot{p}_i = -m \frac{\partial V}{\partial x_j} + m \Theta_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (1.5)$$

для потенциала Кеплера $V \propto r^{-1}$ в слабо некоммутативном фоновом поле Θ предсказывает прецессию точки перигелия в процессе планетарного движения, задавая тем самым измеряемую величину для проверки космологических моделей.

Во всех этих моделях *импульс* удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) первого порядка в терминах силы (возможно, лоренцевого типа). Но та же самая структура возникает и в уравнениях для координаты, которые выделяются необычным соотношением скорости в силу вклада от фазы Берри, связанным с окружением, в котором происходит движение частицы, или с наличием постулированного фундаментального *масштаба площади*. Поэтому импульс может не быть пропорционален скорости.

В отсутствие всякого магнитного поля уравнения (1.1), например, сводятся к уравнениям, объясняющим аномальный эффект Холла в магнитных материалах [5]: этот эффект полностью обязан своим происхождением аномальному члену скорости. Отметим, что такое поведение было предсказано довольно давно [11]. В самом деле, было показано, что уравнение Лоренца следует из общих принципов, но соотношение между импульсом и скоростью зависит от модели. Соотношения вида $\vec{p} = m\vec{v}$ оказываются простым анзацем, не следующим из основополагающих принципов теории.

В более позднее время похожие свойства были обнаружены в двумерных системах так называемых *экзотических* частиц, т.е. частиц, связанных с кинематическим двухпараметрическим центральным расширением плоской галилеевой группы

движений [12], [13]. Снова подчеркнем, что эти модели оказываются важными при описании дробного эффекта Холла. В таких системах имеет место некая дуальность между магнитным полем $\vec{B}(\vec{r})$ и его аналогом в импульсном пространстве $\vec{\Theta}(\vec{p})$, иногда называемым дуальным магнитным полем. Вследствие этого *пуассоновы скобки переменных координат* могут оказаться ненулевыми по аналогии со скобками переменных импульса в присутствии магнитного поля.

В действительности оказывается правомерным вопрос о согласованности вышеприведенных эффективных моделей с общими принципами механики, так как эти модели выводятся в основном с помощью некоторых квазиклассических процедур деквантования, не обязательно совместных с классической механикой. Таким образом, нашей основной задачей в дальнейшем будет доказательство того, что не обязательно изобретать новую механику: все эти модели прекрасно укладываются в пресимплектическое описание классической механики (КМ), разработанное Сурье [14].

Вторая задача состоит в том, чтобы в указанном контексте сформулировать гамильтонову теорию с применением дополнительной структуры, возникающей в силу второго центрального расширения группы Галилея.

2. 2-ФОРМА ЛАГРАНЖА–СУРЬЕ

Современная геометрическая формулировка [14] исчисления переменных, восходящая к Лагранжу и углубленная Картаном [15], состоит в отображении функции Лагранжа $L = L(\vec{x}, \vec{v}, t)$, заданной на *эволюционном пространстве* $TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, в так называемую картановскую 1-форму λ , определяемую своим главным свойством

$$\int L(\gamma(t), \dot{\gamma}, t) dt = \int_{\tilde{\gamma}} \lambda, \quad \lambda = \frac{\partial L}{\partial p_i} dx^i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial p_i} p_i \right) dt, \quad (2.1)$$

где $\tilde{\gamma} = (\gamma(t), \dot{\gamma}, t)$ – поднятие мировой линии частицы на касательное расслоение над эволюционным пространством $TQ \times \mathbb{R}$. Внешняя производная картановой формы задает замкнутую 2-форму *Лагранжа–Сурье* $\sigma = d\lambda$, которая в общем случае не может быть разделена каноническим образом на симплектическую и гамильтонову части [14]. Тем не менее возникающие уравнения Эйлера–Лагранжа могут быть выражены, если определить ядро σ , т.е. с помощью уравнения $\sigma(\dot{\tilde{\gamma}}, \cdot) = 0$. Если ядро одномерно, то вариационная задача называется регулярной. В противном, сингулярном, случае требуется применить технику симплектической редукции [14]–[17]. Тем самым построение такой системы и ее гамильтоновой структуры требует применения более общей техники.

Обратно, если снова следовать Сурье [14], обобщенная механическая система задается 2-формой σ , которая замкнута, $d\sigma = 0$, и имеет постоянный ранг d . Тогда ее ядро задает интегрируемое слоение с d -мерными листами, которые можно рассматривать как обобщенные решения вариационной задачи. Более того, согласно лемме Пуанкаре, из условия $d\sigma = 0$ следует локальное существование картановой 1-формы λ . Записав ее в виде $\lambda = a_\alpha d\xi^\alpha$, можно непосредственно задать функцию Лагранжа первого порядка на эволюционном пространстве с помощью следующей формулы:

$$\mathcal{L} = a_\alpha \dot{\xi}^\alpha, \quad (2.2)$$

так что $\int \mathcal{L} dt = \int \lambda$. Поэтому вышеприведенные модели не обладают стандартной функцией Лагранжа, заданной на касательном расслоении. Иными словами, координата уже не удовлетворяет уравнению Ньютона второго порядка. Общий вопрос о существовании лагранжиана в таком случае обсуждался в работе [18].

Более того, если 2-форму Лагранжа–Сурье σ можно расщепить:

$$\sigma = \omega - dH \wedge dt, \quad (2.3)$$

где ω – замкнутая и регулярная 2-форма на фазовом пространстве TQ , а H – функция Гамильтона на $TQ \times \mathbb{R}$, то уравнения движения запишутся в виде

$$\omega(\dot{\gamma}) = dH. \quad (2.4)$$

Если ω регулярна, то матрица $(\omega^{\alpha\beta})$, обратная к симплектической матрице $\omega = \omega_{\alpha\beta}$ (т. е. $\omega^{\alpha\beta}\omega_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}$), будет задавать гамильтоновы уравнения $\dot{\xi}_i = \{\xi_i, H\}$ с помощью скобок Пуассона, определяемых соотношениями

$$\{f, g\} = \omega^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} f \partial_{\beta} g. \quad (2.5)$$

Если имеет место сингулярность, то, как сказано выше, необходимо выполнить симплектические редукции.

Таким образом, в подходе Сурье удастся сформулировать обратную задачу исчисления переменных для данных уравнений одночастичной системы при наличии зависящего от координат поля скоростей $\vec{E}$, переписав эти уравнения в виде набора 1-форм на $TQ \times \mathbb{R}$:

$$\alpha_1 = d\vec{r} - \vec{p} dt, \quad \alpha_2 = m d\vec{p} - \vec{E} dt, \quad (2.6)$$

и интерпретируя обе эти формы как гиперплоскости в эволюционном пространстве, задаваемые ядрами 1-форм α_i . Заметим, что здесь был введен кинетический импульс $\vec{p} = m\vec{v}$, который понадобится впоследствии. Теперь одновременные решения отвечают пересечению этих гиперплоскостей, описываемому ядром $\sigma(\delta y, \cdot) = 0$ внешнего произведения $\sigma = \alpha_1 \wedge \alpha_2$, где $\wedge$ обеспечивает антисимметрию. В присутствии электромагнитного поля $\vec{E}(\vec{r}, \vec{p}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, \vec{p}, t)$, действующего на заряд e , Сурье [14] обобщил предыдущую простейшую 2-форму на форму

$$\sigma = (m d\vec{v} - e\vec{E} dt) \wedge (d\vec{r} - \vec{v} dt) + e\vec{B} \cdot (d\vec{r} \times d\vec{r}), \quad (2.7)$$

где введено определение $(d\vec{r} \times d\vec{r})_k = (1/2)\epsilon_{kij} dx_i \wedge dx_j$. Тогда обычные уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле проявляются как ядро σ , снабженное условием регулярности $d\sigma = 0$, приводящим к однородным уравнениям Максвелла. Эти формулы можно непосредственно обобщить на многочастичный случай.

Теперь в том же духе выпишем лагранжеву 2-форму для частицы с массой m , находящейся под действием электромагнитных полей $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{B}(\vec{r}, t)$ и некоторого окружения, локальные характеристики которого могут зависеть от импульса.

3. (2 + 1)-МЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДЮВАЛЯ–ХОРВАТИ

Простейший пример такой ситуации – экзотическая механическая модель в двух пространственных измерениях, предложенная в работе [13] и задаваемая формой, которая обобщает форму (2.7) и может быть расщеплена аналогично формуле (2.3). Более точно, введем

$$\sigma = dp_i \wedge dx_i + \frac{1}{2} \theta \epsilon_{ij} dp_i \wedge dp_j + eB dx_1 \wedge dx_2 + d\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + eV\right) \wedge dt, \quad (3.1)$$

где $B(\vec{r})$ – магнитное поле, перпендикулярное плоскости, $V(\vec{r})$ – потенциал электрического поля (для простоты оба этих поля предполагаются не зависящими от времени), а θ – постоянная, называемая *параметром некоммутативности* по причинам, которые мы изложим ниже. Итоговые уравнения движения принимают вид [13]

$$m^* \dot{x}_i = p_i - e\theta \epsilon_{ij} E_j, \quad \dot{p}_i = eE_i + eB \epsilon_{ij} \dot{x}_j, \quad (3.2)$$

где введена эффективная масса $m^* = m(1 - e\theta B)$. Новые физические свойства модели следующие: 1) модель содержит член аномальной скорости $-e\theta \epsilon_{ij} E_j$, так что $\dot{x}_i$ и p_i в общем случае перестают быть параллельными; 2) взаимодействие между экзотической структурой и магнитным полем приводит к появлению эффективной массы m^* в выражении (3.2).

2-Форму Лагранжа–Сурье (3.1) можно получить, применив внешнюю производную к 1-форме Картана на эволюционном пространстве $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, а именно из формулы

$$\lambda = (p_i - A_i) dx_i - \frac{\vec{p}^2}{2m} dt + \frac{\theta}{2} \epsilon_{ij} p_i dp_j, \quad (3.3)$$

если определить функционал действия так же, как и в выражении (2.2). Соответственно при $m^* \neq 0$ скобки Пуассона, связанные с этим функционалом, имеют вид

$$\{x_1, x_2\} = \frac{m}{m^*} \theta, \quad \{x_i, p_j\} = \frac{m}{m^*} \delta_{ij}, \quad \{p_1, p_2\} = \frac{m}{m^*} eB. \quad (3.4)$$

Они автоматически удовлетворяют тождеству Якоби. При занулении эффективной массы, т. е. в случае, когда магнитное поле принимает критическое значение $B_{\text{crit}} = 1/e\theta$, система становится сингулярной. При этом процедура симплектической редукции приводит к двумерной системе, характеризуемой примечательной пуассоновой структурой $\{x_1, x_2\} = \theta$, напоминающей “механику модели Черна–Саймонса” [19]. Таким образом, симплектическая плоскость играет одновременно роль конфигурационного и фазового пространств. Единственными движениями оказываются те, которые происходят в соответствии с *законом Холла*. Более того, при квантовании редуцированной системы не только перестают коммутировать операторы координат, но квантованные уравнения движения приводят к волновым функциям Лавлина [20], которые представляют собой вакуумные состояния дробного квантового эффекта Холла. Поэтому можно ожидать, что классическим аналогом анионов окажутся на самом деле экзотические частицы в системе (3.2). В обзорной статье [21] обсуждались несколько примеров двумерных моделей, обобщающих форму (3.1) и уравнения (3.2). Здесь же мы отметим, что пуассонову структуру (3.4) можно получить, применяя ли-алгебраический метод Кириллова–Костанта–Сурье при построении динамических систем для (2 + 1)-мерной двукратно центрально-расширенной

группе Галилея [22], [23]. Двумя параметрами когомологий оказываются масса и второй, “экзотический”, параметр, отождествляемый с постоянной кривизной Берри в контексте физики конденсированного состояния, или же с нерелятивистским пределом спина (см. работу [21] и библиографию к ней). Последняя интерпретация подчеркивается некоммутативностью операторов галилеевских бустов:

$$[K_1, K_2] = i\theta m^2. \quad (3.5)$$

4. МОДЕЛЬ ОБЩЕГО ВИДА В РАЗМЕРНОСТИ 3 + 1

После вышеприведенного отступления к двумерным моделям рассмотрим теперь дальнейшие обобщения 2-формы (2.7) с полями, зависящими от *импульсов* [24]–[28]. Из прямых алгебраических соображений следует, что необходимо задать на эволюционном пространстве-импульсе-времени явно антисимметричный ковариантный 2-тензор

$$\begin{aligned} \sigma = & [(1 - \mu_i) dp_i - eE_i dt] \wedge (dr_i - g_i dt) + \frac{1}{2} eB_k \epsilon_{kij} dr_i \wedge dr_j + \\ & + \frac{1}{2} \kappa_k \epsilon_{kij} dp_i \wedge dp_j + q_k \epsilon_{kij} dr_i \wedge dp_j, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где явно присутствует лоренцев вклад в лагранжиан, величины $\vec{g}$, $\vec{\kappa}$ и $\vec{q}$ – 3-векторы, $Q = \text{diag}(\mu_i)$ – матрица размера 3×3 . Они зависят от всех независимых переменных и должны быть определены таким образом, чтобы форма σ была замкнута и имела постоянный ранг. Выражение $1 - \mu_i$ введено для того, чтобы иметь возможность отличать “голую” массу, нормированную на единицу, от возможных переменных вкладов. Интересно отметить, что по сравнению с выражениями, полученными в работах [13], [14], возникает необходимость введения 1-формы $dr_i - g_i dt$, задающей новый сопряженный импульс.

Уравнения движения записываются в виде ядра формы Лагранжа–Сурье $\sigma(\delta y, \cdot) = 0$ для касательного вектора $\delta y = (\delta \vec{r}, \delta \vec{p}, \delta t)$. При этом получают уравнения

$$e\delta \vec{r} \cdot \vec{E} - (1 - Q)\delta \vec{p} \cdot \vec{g} = 0, \quad (4.2)$$

$$(1 - Q - Q_A)\delta \vec{p} = e(\vec{E}\delta t + \delta \vec{r} \times \vec{B}), \quad (4.3)$$

$$(1 - Q)(\delta \vec{r} - \vec{g}\delta t) = -\delta \vec{r} \times \vec{q} - \delta \vec{p} \times \vec{\kappa}, \quad (4.4)$$

в которых введена антисимметричная матрица $(Q_A)_{ij} = \epsilon_{ijk}q_k$. Эти уравнения решаются относительно вектора $\delta \vec{p}$ с помощью уравнения (4.3), если массовая матрица $M = \mathbf{1} - Q - Q_A$ обратима, т. е. если $\det(M) \neq 0$. При таком предположении и наложении условия $\det(m - Q) \neq 0$ можно заменить $\delta \vec{p}$ в уравнении (4.4), что приводит к уравнению для касательного вектора координаты $\delta \vec{r}$ вида

$$M^*\delta \vec{r} = ((1 - Q)\vec{g} + e\mathcal{K}M^{-1}\vec{E})\delta t, \quad (4.5)$$

где матрица эффективных масс задается выражением

$$M^* = M + (2Q_A - e\Theta M^{-1}\mathcal{B}), \quad \Theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\kappa_k, \quad \mathcal{B}_{ij} = \epsilon_{ijk}B_k. \quad (4.6)$$

Как M^* , так и уравнение (4.5) обобщают выражения, полученные в работе [13] и приводящие к уравнениям (3.2). Сингулярности движения могут появляться как при занулении $\det(M)$, так и при вырождении первого множителя в эффективной массе (4.6), т. е. при $\det(M^*) = 0$. Тем не менее, если этого не происходит, уравнение (4.5) можно решить относительно $\delta\vec{r}$ и показать, что 1) уравнение (4.2) выполняется тождественно независимо от конкретного выбора вектора $\vec{g}$; 2) уравнение (4.3) принимает вид

$$M^* \delta\vec{p} = \frac{e}{\text{Det}(M)} (R\vec{E} - \vec{g}^T N \vec{B}) \delta t, \quad (4.7)$$

где матрицы R и N обладают сложной зависимостью от m , $\vec{B}$, $\vec{\kappa}$, Q и Q_A , которая описывается ниже.

Таким образом, имеет место система одновременных дифференциальных уравнений первого порядка: уравнение (4.5) для скорости частицы $\delta\vec{r}/\delta t$ и уравнение (4.7) для вариации импульса $\delta\vec{p}/\delta t$. Заметим, что эти два уравнения сводятся к уравнениям (8) и (9) из работы [13], когда Q и Q_A стремятся к 0 и $\vec{g} \equiv \vec{p}$.

Теперь условие замкнутости в эволюционном пространстве $d\sigma = 0$ (также называемое Сурье “принципом Максвелла” [14]) формы Лагранжа–Сурье σ в формуле (4.1) определяет коэффициенты независимых 3-форм. Представляется вполне естественным наложить следующие условия на рассматриваемые функции: $\partial_{p_i} E_j = \partial_{p_i} B_j = 0$. При этом получаются уравнения

$$\partial_{r_j} B_j = 0, \quad \varepsilon_{kij} \partial_{r_i} E_j = -\partial_t B_k, \quad (4.8)$$

$$\partial_{p_j} \kappa_j = 0, \quad \varepsilon_{kij} \partial_{p_i} [(1 - \mu_j) g_j] = \partial_t \kappa_k, \quad (4.9)$$

$$\partial_t \mu_i = \partial_{r_i} [(1 - \mu_i) g_i], \quad \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \partial_{r_i} [(1 - \mu_j) g_j] = \partial_t q_k, \quad (4.10)$$

$$\partial_{r_i} \mu_j = \varepsilon_{ijk} \partial_{r_j} q_k, \quad \partial_{r_i} \kappa_j = \varepsilon_{ijk} \partial_{p_k} \mu_i + \partial_{p_i} q_j - \delta_{ij} \partial_{p_k} q_k \quad (4.11)$$

с остаточными условиями замкнутости (по повторяющимся индексам суммирования не предполагается)

$$\partial_{r_i} [(1 - \mu_i) g_i] + \partial_{r_i} [(1 - \mu_j) g_j] = 0, \quad i \neq j = 1, 2, 3. \quad (4.12)$$

Можно заметить, что однородные уравнения Максвелла (4.8) оказываются единственным ограничением на электромагнитные поля $(\vec{E}, \vec{B})$. Уравнения (4.9) представляют собой аналоги предшествующих соотношений в пространстве скоростей (импульсов) для векторного поля $\vec{\kappa}$, которое измеряет, в какой степени пространственные координаты перестают коммутировать в трехмерном пространстве, как будет показано в гамильтоновом формализме. По этой причине поле $\vec{\kappa}$ иногда называется дуальным магнитным полем.

Если $\vec{\kappa}$ имеет нетривиальную зависимость от времени, то зависимость потока масс $(1 - Q)\vec{g}$ от скорости изменяется, как и предписывается вторым уравнением системы (4.9). В свою очередь уравнения (4.10) описывают изменение массы частицы в зависимости от времени. Это может показаться необычным, но такую ситуацию пока нельзя списывать со счетов. С другой стороны, первый набор из трех уравнений в (4.10) имеет вид независимых уравнений непрерывности, приводящих к глобальному закону сохранения полной массы, т. е. $\partial_t (\sum_i \mu_i) + \partial_{r_i} [(1 - \mu_i) g_i] = 0$, который, однако, выполняется по отдельности в каждом направлении. В силу $\vec{q}$ зависимость

от времени может проявляться и в антисимметричных вкладах в матрицу масс M , но эти вклады могут приводить к изменениям потока масс в пространственных направлениях в соответствии с вторым набором уравнений в (4.10).

Интерпретация уравнений системы (4.11) менее очевидна: они задают условия согласования зависимостей элементов матрицы масс и дуального магнитного поля от координат и скоростей. Подставив эти выражения в уравнения движения в виде (4.3), (4.4), можно чисто аксиоматическим способом перевести уравнения, полученные в работе [4] в контексте квазиклассического движения волновых пакетов электронов.

Для частицы в плоском эволюционном пространстве, т. е. когда $\mu_i \equiv 0$ и импульс $p_i = g_i$, можно легко получить, что $\vec{\kappa}$ и $\vec{q}$ должны быть постоянными. Анализируя условия замкнутости (4.10), (4.11), получим выражения $\kappa_i = \sum_{j \neq i} (x_j \partial_{p_j} q_i - x_i \partial_{p_j} q_j) + \chi_i$, в которых q_i и χ_i зависят только от скоростей, и, кроме того, должно выполняться условие нулевой дивергенции $\partial_{p_j} \chi_j = 0$. Замечательным примером феноменологического приложения этих выражений оказывается поле монополя в импульсном пространстве $\vec{\kappa} = \theta \vec{p}/|\vec{p}|^3$, которое оказывается единственной конфигурацией, совместной со сферической симметрией и с каноническими соотношениями $\{r_i, p_j\} = \delta_{ij}$ [26]. Эти выражения оказываются согласованными, по крайней мере качественно, с данными, полученными в работе [5] и в спиновом эффекте Холла [6], [27].

Ограничившись случаем двух пространственных измерений и положив $\kappa_3 = \text{const}$, получим, что свободная частица обладает на самом деле “экзотической” двухпараметрически расширенной галилеевой группой в качестве группы симметрий. В более общем случае надо исследовать зависящее от импульса некоммутативное поле $\kappa_3 = \kappa(\vec{p})$ в духе того, как это было сделано в работе [29] с $\kappa = -(\theta/(1 + \theta p^2))\varepsilon_{ij} p_i r_j$ (и $\mu_i \equiv 0$) или $\kappa^{\alpha\beta} = (s/2)p_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\gamma}/(p^2)^{3/2}$ для планарной релятивистской модели закрученной частицы (представляющей собой снова частицу типа монополя в релятивистском импульсном пространстве) [30], [31].

Наконец, в подмногообразии сингулярностей фазового пространства, заданном условием $M^* = 0$, необходимо наложить подходящие ограничения на векторные поля $\delta\vec{p}$ и $\delta\vec{r}$ с тем, чтобы не допустить движения с бесконечными скоростями. В частности, в двух измерениях, предполагая, что единственными ненулевыми компонентами магнитного и дуального магнитного полей, а также поля $\vec{q}$ будут составляющие, ортогональные плоскости движения с $\det(1 - Q) \neq 0$, получим, что многообразие сингулярностей масс будет задаваться уравнениями

$$B_{\text{crit}} = \frac{q^2 + (m - \mu_1)(m - \mu_2)}{e\kappa}. \quad (4.13)$$

Для простоты предположим, что все вышеприведенные величины не зависят от переменных пространства-скорости. Уравнения движения (4.2)–(4.4) и условия замкнутости будут выполняться при наложении следующих условий на поток массы и компоненты электрического поля:

$$(1 - \mu_i)g_i = -\frac{e\kappa(qE_i - \epsilon_{ij}E_j(1 - \mu_i))}{q^2 + (1 - \mu_1)(1 - \mu_2)} = \frac{(qE_i - \epsilon_{ij}E_j(1 - \mu_i))}{B_{\text{crit}}}, \quad (4.14)$$

$$(1 - \mu_2)\partial_{r_1}E_1 + (\mu_1 - 1)\partial_{r_2}E_2 + q(\partial_{r_1}E_2 + \partial_{r_2}E_1) = 0. \quad (4.15)$$

Заметим, что последнее соотношение следует из условия замкнутости массовых членов (4.12), а не из закона Фарадея (4.8), который выполняется тождественно. Поскольку те же самые уравнения описывают эволюцию массового члена и величины κ во времени, то единственно возможная остающаяся свобода позволяет электрическому полю зависеть от пространственных координат не более чем линейно, что согласуется с (4.15). Наконец уравнение (4.14) является обобщением закона Холла, обсуждавшегося в предыдущем разделе.

5. ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА

Сравнение системы (4.5)–(4.7) с предыдущими уравнениями (3.2) обнаруживает общую структуру, присущую этим системам, полученным с помощью одного и того же объединяющего подхода Лагранжа–Сурье, основанного на 2-форме (4.1), хотя особенность в виде двойного накрытия центрального расширения имеет место только в размерности два.

2-форму σ можно получить как внешнюю производную 1-формы Картана

$$\lambda = (\vec{p} + \vec{A}) \cdot d\vec{r} + \vec{\mathcal{R}} \cdot d\vec{p} - \mathcal{T} dt. \quad (5.1)$$

В этой формуле поле $\vec{A}(\vec{r}, t)$ – обычный потенциал электромагнитного поля, так что $\vec{B} = \nabla_{\vec{r}} \times \vec{A}$, и этот потенциал по предположению содержит зависимость только от пространства-времени и допускает подходящие калибровочные преобразования. Тогда электрическое поле (как и всякое силовое поле, зависящее от переменных пространства-времени) задается выражением $\vec{E} = -\nabla_{\vec{r}} \mathcal{T} - \partial_t \vec{A}$, в котором предполагается следующее разложение скалярной функции: $\mathcal{T}(\vec{r}, \vec{p}, t) = \mathcal{E}(\vec{p}, t) + \varphi(\vec{r}, t)$, которое совместно с предыдущими ограничениями на зависимость от поля $\vec{E}$. С другой стороны, поле $\vec{\mathcal{R}}(\vec{r}, \vec{p}, t)$ задает дуальное магнитное поле $\vec{k} = \nabla_{\vec{p}} \times \vec{\mathcal{R}}$, а поток масс задается выражением $(1 - Q)\vec{g} = -\nabla_{\vec{p}} \mathcal{T} - \partial_t \vec{\mathcal{R}}$, $\mu_i = \partial_{r_i} \mathcal{R}_i$ и $q_k = \partial_{r_i} \mathcal{R}_j = -\partial_{r_j} \mathcal{R}_i$, где k, i, j предполагаются циклически упорядоченными. Из последнего равенства следует набор ограничений на $\vec{\mathcal{R}}$, после чего 2-форма Лагранжа–Сурье принимает в точности вид (4.1). Из вышеприведенных ограничений следуют некоторые ограничения второго порядка, обеспечивающие выполнение первого набора условия замкнутости в системе (4.11), а именно

$$\begin{aligned} \partial_{r_i} \partial_{r_j} \mathcal{R}_k &= 0, & i, j, k \text{ циклически упорядоченны,} \\ \partial_{r_i}^2 \mathcal{R}_j &= -\partial_{r_i} \partial_{r_j} \mathcal{R}_i, & i \neq j, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где в последнем уравнении снова не предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Остающиеся условия замкнутости в системе (4.11) выполняются тождественно, а условия в (4.10) требуют наложения дополнительных ограничений на производные по времени:

$$\partial_t (\partial_{p_i} \mathcal{R}_j + 2\partial_{p_j} \mathcal{R}_i) = 0, \quad i \neq j. \quad (5.3)$$

Из-за предполагаемого специального вида силы и магнитного поля вышеприведенные условия на $\vec{\mathcal{R}}$ ограничивают его зависимость от пространственно-временных переменных, но оставляют калибровочную свободу относительно переменных импульсов.

Таким образом, в терминах потенциалов, или связностей, введенных в формуле (5.1), уравнения движения (4.3), (4.4) принимают вид

$$\begin{aligned}(\delta_{ij} + \Xi_{ij})\dot{r}_j + \Theta_{ij}\dot{p}_j &= \partial_{v_i}\mathcal{E} + \partial_t\mathcal{R}_i, \\ \mathcal{B}_{ij}\dot{r}_j + (\delta_{ij} + \Xi_{ij})\dot{p}_j &= -\partial_{r_i}\varphi - \partial_t\mathcal{A}_i,\end{aligned}\quad (5.4)$$

где были использованы матрицы (см. также уравнение (4.6))

$$\Xi_{ij} = \begin{cases} -\partial_{r_j}\mathcal{R}_i, & i \leq j, \\ \partial_{r_i}\mathcal{R}_j, & i > j, \end{cases} \quad \mathcal{B}_{ij} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlk}\partial_{r_l}\mathcal{A}_k, \quad \Theta_{ij} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlk}\partial_{p_l}\mathcal{R}_k. \quad (5.5)$$

В отличие от системы (4.3), (4.4) на эволюционном пространстве, динамическая система (5.4) оказывается теперь заданной на пространстве $TQ \equiv \{\xi = (\vec{r}, \vec{p})\}$, касательном к фазовому пространству. Но если $\partial_t\vec{\mathcal{A}} = \partial_t\vec{\mathcal{R}} \equiv 0$, то форму (4.1) можно представить в виде $\sigma = \omega - dH \wedge dt$ с помощью введения симплектической 2-формы на TQ

$$\omega = (\delta_{ij} + \Xi_{ij}) dr_i \wedge dp_j + \frac{1}{2}[\mathcal{B}_{ij} dr_i \wedge dr_j - \Theta_{ij} dp_i \wedge dp_j] \quad (5.6)$$

и функции Гамильтона $H \equiv \mathcal{T} = \mathcal{E}(\vec{p}, t) + \varphi(\vec{r}, t)$.

Таким образом, замкнутость формы $\omega = \omega_{\alpha\beta} d\xi_\alpha \wedge d\xi_\beta$ следует из замкнутости формы σ , т. е. из уравнений (4.8)–(4.12) вкупе с ограничением (5.2). При этом пространство TQ становится пуассоновым многообразием, скобки Пуассона на котором задаются так же, как и в формуле (2.5), косимплектической матрицей

$$\begin{aligned}\omega^{\alpha,\beta} &= \left(1 - \frac{1}{2} \text{Tr}(\Xi^2 + X(1 + 2\Xi)\Theta)\right)^{-1} \times \\ &\times \left\{ \begin{pmatrix} \Theta + [\Xi, \Theta] & 0 \\ 0 & -\mathcal{B} + [\Xi, \mathcal{B}] \end{pmatrix} + \left[1 - \frac{1}{6} \text{Tr}(\Xi^2 + \mathcal{B}\Theta)\right] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ &\left. + \begin{pmatrix} 0 & (\Xi^2 + X\Theta)^T \\ -(\Xi^2 + \mathcal{B}\Theta) & 0 \end{pmatrix} \right\},\end{aligned}\quad (5.7)$$

которая невырождена при $\sqrt{\det(\omega_{\alpha\beta})} = 1 - (1/2) \text{Tr}(\Xi^2 + \mathcal{B}(1 + 2\Xi)\Theta) \neq 0$. Этот множитель обобщает знаменатель, присутствующий в пуассоновых скобках (3.4) или (4.6). Более того, он играет главную роль в выражении для инвариантного пространства – в объеме пространства, обеспечивая тем самым выполнение теоремы Лиувилля. Наконец, отметим, что пуассонова структура определяется только с помощью калибровочно-инвариантных величин, а скобки, содержащие координаты местоположения частицы r_i , в общем случае оказываются некоммутативными. Как было отмечено в других работах [21], можно выполнить замену переменных, приводящую к тому, что координаты частицы становятся коммутирующими объектами, с помощью локального преобразования вида $r_i \rightarrow r'_i = r_i - \mathcal{R}_i(\vec{r}, \vec{p})$. Однако векторное поле $\vec{\mathcal{R}}$ определено с точностью до калибровочного преобразования, порождаемого произвольной функцией на $(\vec{r}, \vec{p})$. Поэтому точный смысл понятия координаты частицы оказывается плохо определенным в данном контексте.

В случае, когда заряд задается только монополем с напряженностью поля θ в импульсном пространстве и в однородном электрическом поле, полученные уравнения

движения (5.8) можно явно проинтегрировать [27]. При этом частица оказывается сдвинутой на $\Delta = 2\theta/p_0$ в направлении $\vec{E} \times \vec{p}_0$, а $\vec{p}_0$ имеет смысл исходного линейного кинетического импульса. Эта величина обсуждалась во введении.

С другой стороны, если заряд гамильтониана $H = |\vec{p}|^2/2$ переносится только магнитным полем и полем дуального монополя, уравнения принимают вид

$$\frac{M^*}{|\vec{r}|^3|\vec{p}|^3}\dot{r}_i = p_i - e\theta \frac{r_i}{|\vec{p}||\vec{r}|^3}, \quad (5.8)$$

$$\frac{M^*}{|\vec{r}|^3|\vec{p}|^3}\dot{p}_i = e\varepsilon_{ijk} \frac{p_j r_k}{|\vec{r}|^3}, \quad (5.9)$$

где $M^* = |\vec{r}|^3|\vec{p}|^3 - e\theta\vec{r} \cdot \vec{p}$.

Сделаем заключительное замечание относительно взаимодействия с электромагнитным полем, задаваемого выражением (4.1), которое иногда называется минимальным дополнением и приводит к вышеприведенному гамильтониану $\mathcal{T}$. Это выражение весьма сильно отличается от обычного минимального взаимодействия и приводит к совершенно другой пуассоновой структуре. В связи с двумерными системами этот вопрос освещался в работе [21]. В частности, было показано, что эти две формулировки становятся эквивалентными, если произвести классическое преобразование Зайберга–Виттена для электромагнитного поля. Пока не получено никаких результатов для моделей, обсуждаемых в настоящей работе.

В заключение отметим, что в работе был построен обширный класс динамических систем в размерности три в рамках подхода Лагранжа–Сурье. Этот подход можно непосредственно обобщить на старшие размерности степеней свободы. Были приведены условия, обеспечивающие существование гамильтоновой формулировки, на основе которой анализ свойств интегрируемости может быть проведен напрямую с использованием стандартных методов.

Благодарности. Автор глубоко признателен П. Хорвати за постановку задачи и постоянные стимулирующие обсуждения. Некоторые из приведенных результатов были получены в сотрудничестве с Ч. Дювалем, З. Хорвацем и П. Стичелем. Работа была частично поддержана INFN–Sezione di Lecce (проект LE41).

Список литературы

- [1] D. Xiao, M.-C. Chang, Q. Niu, *Rev. Modern Phys.*, **82**:3 (2010), 1959–2007, arXiv: 0907.2021.
- [2] K. Y. Bliokh, *J. Opt. A*, **11**:9 (2009), 094009, 14 pp., arXiv: 0903.1910.
- [3] R. J. Szabo, *Phys. Rep.*, **378**:4 (2003), 207–299, arXiv: hep-th/0109162.
- [4] A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu, J. Zwanziger, *The Geometric Phase in Quantum Systems. Foundations, Mathematical Concepts, and Applications in Molecular and Condensed Matter Physics*, Ch. 12, Texts Monogr. Phys., Springer, Berlin, 2003.
- [5] Z. Fang, N. Nagaosa, K. S. Takahashi, A. Asamitsu, R. Mathieu, T. Ogasawara, H. Yamada, M. Kawasaki, Y. Tokura, K. Terakura, *Science*, **302**:5642 (2003), 92–95, arXiv: cond-mat/0310232.
- [6] S. Murakami, N. Nagaosa, S.-C. Zhang, *Science*, **301**:5638 (2003), 1348–1351, arXiv: cond-mat/0308167.
- [7] K. Yu. Bliokh, Yu. P. Bliokh, *JETP Lett.*, **79**:11 (2004), 519–522; *Phys. Lett. A*, **333**:3–4 (2004), 181–186, arXiv: physics/0402110; Н. П. Садыков, *ТМФ*, **135**:2 (2003), 280–288;

- M. Onoda, S. Murakami, N. Nagaosa, *Phys. Rev. Lett.*, **93**:8 (2004), 083901, 4 pp., arXiv: cond-mat/0405129.
- [8] C. Duval, Z. Horváth, P. A. Horváthy, *Phys. Rev. D*, **74**:2 (2006), 021701, arXiv: cond-mat/0509636; *J. Geom. Phys.*, **57**:3 (2007), 925–941, arXiv: math-ph/0509031.
- [9] C.-W. Zhang, A. M. Dudarev, Q. Niu, *Phys. Rev. Lett.*, **97**:4 (2006), 040401, 4 pp., arXiv: cond-mat/0507125.
- [10] J. M. Romero, J. D. Vergara, *Modern Phys. Lett. A*, **18**:24 (2003), 1673–1680, arXiv: hep-th/0303064.
- [11] W. G. Dixon, *Il Nuovo Cimento*, **38**:4 (1965), 1616–1643; J.-M. Souriau, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **20** (1974), 315–364; C. Duval, P. A. Horváthy, *Phys. Lett. B*, **594**:3–4 (2004), 402–409, arXiv: hep-th/0402191; К. Дюваль, П. А. Хорвати, *ТМФ*, **144**:1 (2005), 26–34, arXiv: hep-th/0407010.
- [12] J. Lukierski, P. C. Stichel, W. J. Zakrzewski, *Ann. Phys.*, **260**:2 (1997), 224–249, arXiv: hep-th/9612017; *Ann. Phys.*, **306**:1 (2003), 78–95, arXiv: hep-th/0207149.
- [13] C. Duval, P. A. Horváthy, *Phys. Lett. B*, **479**:1–3 (2000), 284–290, arXiv: hep-th/0002233; *J. Phys. A*, **34**:47 (2001), 10097–10107, arXiv: hep-th/0106089.
- [14] J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.
- [15] É. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, Hermann, 1971.
- [16] L. D. Faddeev, R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.*, **60**:17 (1988), 1692–1694.
- [17] P. A. Horváthy, *Ann. Phys.*, **299**:1 (2002), 128–140, arXiv: hep-th/0201007.
- [18] P. A. Horváthy, *J. Math. Phys.*, **20**:1 (1979), 49–52.
- [19] G. V. Dunne, R. Jackiw, C. A. Trugenberger, *Phys. Rev. D*, **41**:2 (1990), 661–666.
- [20] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.*, **50**:18 (1983), 1395–1398.
- [21] P. A. Horváthy, L. Martina, P. C. Stichel, *SIGMA*, **6** (2010), 060, 26 pp., arXiv: 1002.4772.
- [22] D. R. Grigore, *J. Math. Phys.*, **37**:1 (1996), 460–473, arXiv: hep-th/9312048.
- [23] A. Ballesteros, M. Gadella, M. A. del Olmo, *J. Math. Phys.*, **33**:10 (1992), 3379–3386; Y. Brihaye, C. Gónner, S. Giller, P. Kosinski, *Galilean invariance in 2 + 1 dimensions*, arXiv: hep-th/9503046.
- [24] C. Duval, Z. Horváth, P. A. Horváthy, L. Martina, P. C. Stichel, *Modern Phys. Lett. B*, **20**:7 (2006), 373–378, arXiv: cond-mat/0506051; *Phys. Rev. Lett.*, **96**:9 (2006), 099701, 1 pp., arXiv: cond-mat/0509806.
- [25] D. Xiao, J. Shi, Q. Niu, *Phys. Rev. Lett.*, **95**:13 (2005), 137204, 4 pp., arXiv: cond-mat/0502340.
- [26] A. Bérard, H. Mohrbach, *Phys. Rev. D*, **69**:12 (2004), 127701, 4 pp., arXiv: hep-th/0310167; P. Gosselin, F. Ménas, A. Bérard, H. Mohrbach, *Europhys. Lett.*, **76**:4 (2006), 651–656, arXiv: cond-mat/0601472.
- [27] P. A. Horváthy, *Phys. Lett. A*, **359**:6 (2006), 705–706, arXiv: cond-mat/0606472.
- [28] K. Yu. Bliokh, *Phys. Lett. A*, **351**:3 (2006), 123–124, arXiv: cond-mat/0507499.
- [29] H. S. Snyder, *Phys. Rev.*, **71**:1 (1947), 38–41.
- [30] R. Jackiw, V. P. Nair, *Phys. Rev. D*, **43**:6 (1991), 1933–1942; M. S. Plyushchay, *Phys. Lett. B*, **248**:1–2 (1990), 107–112.
- [31] M. S. Plyushchay, *Phys. Lett. B*, **273**:3 (1991), 250–254; **262**:1 (1991), 71–78; P. A. Horváthy, M. S. Plyushchay, *JHEP*, **06** (2002), 033, 11 pp., arXiv: hep-th/0201228; P. A. Horváthy, M. S. Plyushchay, M. Valenzuela, *Ann. Phys.*, **325**:9 (2010), 1931–1975, arXiv: 1001.0274.