Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Вербус, Л. Мартина, А. П. Протогенов, Цепочка взаимодействующих $SU(2)_4$ -энионов и квантовые $SU(2)_k \times \overline{SU(2)_k}$ дубли, *ТМФ*, 2011, том 167, номер 3, 514–528

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6658>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:57:49

© 2011 г. В. А. Вербус*, Л. Мартина[†], А. П. Протогенов[‡]

ЦЕПОЧКА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ $SU(2)_4$ -ЭНИОНОВ И КВАНТОВЫЕ $SU(2)_k \times \overline{SU(2)}_k$ ДУБЛИ

Рассматривается цепочка $SU(2)_4$ -энионов, содержащая переход в топологически упорядоченное фазовое состояние. Для полуцелых и целых значений индекса сорта сильно коррелированных возбуждений найден эффективный низкоэнергетический гамильтониан, являющийся аналогом стандартного гамильтониана Гейзенберга квантовых магнетиков. Описаны свойства гильбертовых пространств собственных состояний системы. С помощью численных вычислений показано, что в случае квантовых $SU(2)_k \times \overline{SU(2)}_k$ дублей Дринфельда наибольшие собственные значения матриц смежности для графов, представляющих собой расширенные диаграммы Дынкина, совпадают с полными квантовыми размерностями для изученных значений уровня $k = 2, 3, 4, 5$. Сформулирована гипотеза о причине универсального поведения системы в длинноволновом пределе.

Ключевые слова: модулярные тензорные категории, квантовые дубли, энионы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В базисных моделях квантовых магнетиков состояния частиц с полуцелым или целым значением спина, распределенные по узлам решетки, соответствуют фундаментальному или присоединенному неприводимому представлению группы $SU(2)$ и классифицируются в соответствии с нечетными и четными представлениями группы перестановок. В пространственно одномерных или двумерных системах вместо группы перестановок мы рассматриваем группу кос с ее абелевыми и неабелевыми неприводимыми представлениями. Поэтому при обобщении моделей Гейзенберга или Изинга по узлам решетки распределяются не фермионы или бозоны, а квантовые состояния частиц, реализующие неприводимые представления группы кос и подчиняющихся дробной статистике.

В набор так называемых энионных состояний входят числа, которые специфицируют структуру квантовых групп, например $SU(2)_k$, где k – уровень $SU(2)_k$ -теории

*Институт физики микроструктур РАН, Нижний Новгород, Россия

[†]Dipartimento di Fisica dell'Universita di Lecce, INFN, Sezione di Lecce, Lecce, Italy.
E-mail: luigi.martina@le.infn.it

[‡]Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия.
E-mail: alprot@appl.sci-nnov.ru

Весса–Зумино–Виттена–Новикова. Это число, совпадающее с коэффициентом в действии Черна–Саймонса, определяет степень переплетения мировых линий $(2 + 1)D$ -возбуждений. Мировые линии в случае фермионов, когда $k = 1$, параллельны. Если $k = 2$, то мировые линии переплетены однократно и мы сталкиваемся с полуфермионными квазичастицами, так называемыми семионами. Такие энионы входят в состав примарных полей $SU(2)_2$ конформной теории поля и модели Изинга в поперечном магнитном поле в критической точке [1]–[3].

Состояния с $k = 3$ образуют семейство энионов Фибоначчи. Подробный анализ этих неабелевых состояний [1], [4], а также обобщение гамильтониана Гейзенберга на случай взаимодействующих энионов Фибоначчи содержатся в работах [5], [6]. Исследованию коллективных состояний при большем значении уровня k в цепочке взаимодействующих $SU(2)_5$ -энионов, принадлежащих сектору с целочисленными значениями спина, посвящена работа [7]. Характерной особенностью энионных систем при $k > 2$ является наличие в гамильтониане слагаемого, описывающего трехточечное взаимодействие. Другой важной особенностью является целочисленность квадрата полной квантовой размерности состояний при $k = 1, 2, 4$. В этом случае плотность представлений группы кос такова, что не обеспечивает универсальность квантовых вычислений [8], [9]. При $k \rightarrow \infty$ для частиц со спином $1/2$ восстанавливается гамильтониан Гейзенберга, а для частиц с произвольным значением спина – его полиномиальный вариант [10]. В настоящей работе с целью прояснить гамильтонову структуру теории в случае промежуточных значений уровня k мы сконцентрируемся на изучении теории энионов на цепочке при $k = 4$.

Изучение энионных систем при малых значениях уровня k важно в силу ряда причин. Прежде всего, существует возможность использовать их в квантовых вычислениях с защитой от воздействия, приводящего к сбою фазы волновой функции неабелевых возбуждений [11]. По этой причине энионы поперечной модели Изинга и $SU(2)_k$ -теории с $k = 2$, которые отличаются значением индикатора Фробениуса–Шура, а также энионы Фибоначчи при $k = 3$ были подвергнуты тщательному анализу [12] как возможные кандидаты на роль неабелевых состояний в дробном квантовом эффекте Холла с фактором заполнения $\nu = 2 + k/(k+2)$. Исследованию фазовых эффектов в интерферометрии [13], [14] и туннелировании [15] неабелевых энионных состояний для нахождения экспериментально проверяемых следствий был посвящен ряд недавних работ (см. также обзор [1]). Установление критерия деконфайнмента энионных состояний [16], поиск соответствий решеточной теории в критической точке с конформной теорией поля с ее определением на косет-пространствах как источника эффектов возникновения зародышей в родительской двумерной спиновой жидкости и краевых мод на их границах [7], [17], а также детальное описание управляемых за счет изменяющейся топологии [18] квантовых фазовых переходов в системах с инвариантностью относительно инверсии времени (в квантовых дублях) составляют содержание недавних работ в этой актуальной области.

В настоящей работе с помощью подхода, развитого в работах [6], [7], мы нашли гамильтониан и гильбертово пространство состояний в $SU(2)_4$ -теории на цепочке в случае полуцелых и целых значений спина, перечисляющего секторы взаимодействующих энионов. Поскольку нас интересует низкоэнергетическая часть пространства состояний, эффективный низкоэнергетический гамильтониан имеет форму проекторов на фиксированное по спину основное состояние. Некоторые сторо-

ны проблемы, связанные с представлением гамильтониана через проекторы алгебры Темперли–Либа, уже обсуждались в литературе [5], [18]. Установлению соотношений эквивалентности между гамильтонианами [19], [20] точно решаемых квантовых моделей [11], [21], изучению корреляционных функций [22], а также классификации топологического порядка [23] и квантовых фазовых переходов посвящены работы в этой области.

Мы обратим основное внимание на некоторые универсальные черты внешне различных моделей, обсудим связь с длинноволновым подходом конформной теории поля при описании эффектов переплетения. Основные используемые средства относятся к теории модулярных тензорных категорий, в терминах которой формулируется теория энионов в настоящее время. Поэтому в разделе 2 приводятся некоторые технические средства из теории модулярных тензорных категорий для описания гамильтониана и пространства собственных состояний, которому посвящены разделы 3 и 4. В разделе 5 показано, что полная квантовая размерность при $k = 2, 3, 4, 5$ совпадает с наибольшим собственным значением матрицы смежности расширенных диаграмм Дынкина для квантовых $SU(2)_k \times \overline{SU}(2)_k$ дублей Дринфельда. В разделе 6 обсуждаются нерешенные проблемы, связанные с универсальным представлением гамильтоновой динамики точно интегрируемых спиновых моделей, описывающих топологически упорядоченные фазовые состояния и характеризующихся неабелевыми энионными возбуждениями.

2. ЦЕПОЧКА $SU(2)_4$ -ЭНИОНОВ

Рассмотрим семейство гамильтонианов клейновского типа [24]

$$H = - \sum_{i=1;j}^N g_j P_i^{(j)}, \quad (1)$$

где индекс i нумерует звенья цепочки, $\{g_j\}$ – константы связи, $P_i^{(j)}$ – проекторы на состояния со спином j .

В системах с неабелевыми квазичастицами сильно коррелированные состояния формируют некоторую часть низкоэнергетического гильбертова пространства. Поскольку нас интересует в основном низкоэнергетический предел, это свойство неабелевых энионов является основанием для представления эффективного гамильтониана (1) через операторы с двумя собственными значениями, которые отвечают основному и возбужденному состояниям. Кроме того, в ситуациях, когда рассматриваемые квазичастицы пространственно разделены, низкоэнергетическое пространство оказывается вырожденным, а на степень вырождения наложены ограничения, характеризующиеся топологическими квантовыми числами.

Метод описания эффектов топологии, связанных с переплетением мировых линий квазичастиц, основан на использовании операторов алгебры Темперли–Либа. Операторы Темперли–Либа e_i удовлетворяют коммутационным соотношениям [25]

$$\begin{aligned} e_i^2 &= de_i, \\ e_i e_{i+1} e_i &= e_i, \quad e_i e_j = e_j e_i, \quad j \neq i \pm 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что операторы $P_i = e_i/d$ являются проекторами: $P_i^2 = P_i$. Здесь изотопический параметр $d = 2 \cos(\pi/(k+2))$.

Гамильтониан при малых значениях параметра анизотропии x может быть получен с помощью трансфер-матрицы $T = \tau_1 \tau_3 \dots \tau_{2N-1} I_0 \tau_2 \tau_4 \dots \tau_{2N-2} I_{2N}$ с $\tau_i = I_i + x e_i$ и единичной матрицей I_i . Операторы e_i алгебры Темперли–Либба определены [26]–[28] здесь как

$$\begin{aligned} \mathbf{e}[i] |j_{i-1} j_i j_{i+1}\rangle &= \sum_{j'_i} (\mathbf{e}[i]_{j_{i-1}}^{j_{i+1}})_{j_i}^{j'_i} |j_{i-1} j'_i j_{i+1}\rangle, \\ (\mathbf{e}[i]_{j_{i-1}}^{j_{i+1}})_{j_i}^{j'_i} &= \delta_{j_{i-1}, j_{i+1}} \sqrt{\frac{S_{j_i}^0 S_{j'_i}^0}{S_{j_{i-1}}^0 S_{j_{i+1}}^0}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$S_j^{j'} = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin\left(\pi \frac{(2j+1)(2j'+1)}{k+2}\right)$$

– модулярная S -матрица конформной $SU(2)_k$ -теории поля.

Из выражений (2) следует, что в рассматриваемом весовом представлении операторов e_i энионные степени свободы распределены по трем соседним звеньям $(i-1, i, i+1)$ цепочки. Их заполнение некоторым значением спина a из совокупности $j = 0, 1/2, 1, \dots, k/2$ энионных сортов будет в дальнейшем использоваться в качестве коллективной метки $|a, b, c\rangle$ для обозначения квантовых состояний $|j_{i-1}, j_i, j_{i+1}\rangle$. Соотношение между допустимыми значениями из множества $\{a, b, c\}$ значений углового момента определяется правилами слияния (тензорного умножения) двух энионных состояний в $SU(2)_k$ -теории:

$$j_1 \times j_2 = |j_1 - j_2| + (|j_1 - j_2| + 1) + \dots + \min(j_1 + j_2, k - j_1 - j_2). \quad (3)$$

Ограниченный конечным значением уровня k состав полей после слияния таков, что вместо стандартного результата в случае $SU(2)$ -тензорного умножения мы имеем на выходе меньшее число полей.

Правила слияния $a \times b = \sum_c N_{ab}^c c$ примарных полей для возможных значений индекса j при $k = 4$, квантовые размерности

$$d_j = [2j+1]_q = \sin\left[\frac{\pi(2j+1)}{k+2}\right] \bigg/ \sin\left[\frac{\pi}{k+2}\right],$$

являющиеся наибольшими собственными значениями матрицы $(N_a)_b^\xi$, с полной квантовой размерностью

$$\mathcal{D} = \sqrt{\sum_a d_a^2} = \frac{\sqrt{(k+2)/2}}{\sin(\pi/(k+2))} = 2\sqrt{3},$$

а также масштабные конформные размерности $h_j = j(j+1)/(k+2)$, определяющие значения топологического спина $\theta_j = e^{2\pi i h_j}$, приведены в таблице.

При слиянии (расщеплении) двух полей возникает векторное пространство V_{ab}^c (V_c^{ab}) с размерностью $\dim V_{ab}^c$, равной N_{ab}^c . В нашем случае $N_{ab}^c = 0, 1$. Для неабелевых состояний, индексируемых в таблице значениями спина j , справедливо $d_j > 1$.

Сорта энионов, нумеруемые значениями индекса j , значения квантовых и конформных размерностей, а также правила слияния для $SU(2)_4$ -теории.

$j = 0$	$d_0 = 1$	$h_0 = 0$
$j = 1/2$	$d_{1/2} = \sqrt{3}$	$h_{1/2} = 1/8$
$j = 1$	$d_1 = 2$	$h_1 = 1/3$
$j = 3/2$	$d_{3/2} = \sqrt{3}$	$h_{3/2} = 5/8$
$j = 2$	$d_2 = 1$	$h_2 = 1$

$1/2 \times 0 = 1/2$			
$1/2 \times 1/2 = 0 + 1$	$1 \times 0 = 1$		
$1/2 \times 1 = 1/2 + 3/2$	$1 \times 1 = 0 + 1 + 2$	$3/2 \times 0 = 3/2$	
$1/2 \times 3/2 = 1 + 2$	$1 \times 3/2 = 1/2 + 3/2$	$3/2 \times 3/2 = 0 + 1$	$2 \times 0 = 2$
$1/2 \times 2 = 3/2$	$1 \times 2 = 1$	$3/2 \times 2 = 1/2$	$2 \times 2 = 0$

Неабелевы энионы характеризуются также множественностью разрешенных каналов слияния (расщепления) ($\dim(\bigoplus_c V_{ab}^c) = \sum_c N_{ab}^c \geq 2$ для некоторой пары индексов a, b).

Расщепление эниона d на энионные состояния со спинами a, b, c соответствует пространству V_d^{abc} , которое может быть представлено в виде тензорных произведений двух расщепляемых энионных пространств с суммированием по подходящим промежуточным парам индексов. Это можно сделать двумя изоморфно эквивалентными способами:

$$V_d^{abc} \cong \bigoplus_e V_e^{ab} \otimes V_d^{ec} \cong \bigoplus_f V_d^{af} \otimes V_f^{bc}. \quad (4)$$

Чтобы ввести понятие ассоциативности на уровне расщепляющихся пространств, необходимо описать совокупность унитарных изоморфизмов между различными разложениями, которые можно рассматривать как замену базиса. Эти изоморфные преобразования можно записать с помощью так называемой F -матрицы следующим образом:

$$\begin{array}{c} b \quad c \\ | \quad | \\ a \quad e \quad d \end{array} = \sum_f F_{def}^{abc} \begin{array}{c} b \quad c \\ \diagdown \diagup \\ f \\ | \\ a \quad d \end{array}. \quad (5)$$

F -матрица удовлетворяет пентагонному уравнению

$$\sum_n F_{kpn}^{mlq} F_{mns}^{jip} F_{lkr}^{jsn} = F_{qkr}^{jip} F_{mns}^{riq}, \quad (6)$$

которое имеет решение, пропорциональное q -деформированному аналогу $6j$ -символов:

$$F_{j_{12}j_{23}j_{31}}^{j_1j_2j_3} = (-1)^{j_1+j_2+j_3+j} \sqrt{[2j_{12}+1]_q [2j_{23}+1]_q} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}_q, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q &= \Delta(j_1, j_2, j_{12}) \Delta(j_{12}, j_3, j) \Delta(j_2, j_3, j_{23}) \Delta(j_1, j_{23}, j) \times \\
&\times \sum_n \left\{ \frac{(-1)^n [n+1]_q!}{[n-j_1-j_2-j_{12}]_q! [n-j_{12}-j_3-j]_q! [n-j_2-j_3-j_{23}]_q! [n-j_1-j_{23}-j]_q!} \times \right. \\
&\times \left. \frac{1}{[j_1+j_2+j_3+j-n]_q! [j_1+j_{12}+j_3+j_{23}-n]_q! [j_2+j_{12}+j+j_{23}-n]_q!} \right\}, \\
\Delta(j_1, j_2, j_3) &= \sqrt{\frac{[-j_1+j_2+j_3]_q! [j_1-j_2+j_3]_q! [j_1+j_2-j_3]_q!}{[j_1+j_2+j_3+1]_q!}}, \quad [n]_q! \equiv \prod_{m=1}^n [m]_q.
\end{aligned}$$

В тех случаях, когда F -матрица отлична от нуля и единицы, для ее вычисления в следующих двух разделах мы обратимся к последним формулам. Мы не привели здесь явные выражения для матрицы замены двух энионов R_{ab}^c и гексагонное уравнение, куда она входит. Последнее является следствием пентагонного уравнения [29].

3. ГАМИЛЬТониан И СОБСТВЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ

В настоящей работе при построении эффективного гамильтониана (1) мы будем опираться на представление [5]

$$\langle a', f', d' | P^{(j)} | a, e, d \rangle = F_{d'jf'}^{a'bc} F_{dej}^{abc} \delta_{a,a'} \delta_{d,d'} \quad (8)$$

для проекторов в канале с полным спином j , использующее F -матрицу. В формуле (8) суммирование по повторяющимся индексам отсутствует. В случае гамильтониана Гейзенберга $H = \sum_i (\mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+1})$ для спина, равного единице, мы имеем $(\mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+1}) = 3P_i^{(2)} + P_i^{(1)} - 2$. Для модели Афлека–Кеннеди–Либа–Тасаки $H = \sum_i P_i^{(2)}$. В нашем случае верхние индексы (b, c) в формуле (8) будут принимать значение $1/2$, а в секторе с целым значением индекса $b = c = 1$.

Рассмотрим сначала полуцелые значения $b = c = 1/2$ энионного индекса в F -матрице. При этом допустимое четырнадцатимерное пространство состояний $\{|a, f, d\rangle\}$ представляет собой следующую совокупность состояний, показанных в правой части формулы (5):

$$\begin{aligned}
&\{|0, 0, 0\rangle, |0, 1, 1\rangle, |1/2, 0, 1/2\rangle, |1/2, 1, 1/2\rangle, |1/2, 1, 3/2\rangle, |1, 1, 0\rangle, |1, 0, 1\rangle, \\
&|1, 1, 1\rangle, |1, 1, 2\rangle, |3/2, 1, 1/2\rangle, |3/2, 0, 3/2\rangle, |3/2, 1, 3/2\rangle, |2, 1, 1\rangle, |2, 0, 2\rangle\}. \quad (9)
\end{aligned}$$

Гильбертово пространство состояний $\{|a, e, d\rangle\}$, принадлежащее левой части формулы (5), состоит из следующих состояний:

$$\begin{aligned}
&\{|0, 1/2, 0\rangle, |0, 1/2, 1\rangle, |1/2, 0, 1/2\rangle, |1/2, 1, 1/2\rangle, |1/2, 1, 3/2\rangle, |1, 1/2, 0\rangle, |1, 1/2, 1\rangle, \\
&|1, 3/2, 1\rangle, |1, 3/2, 2\rangle, |3/2, 1, 1/2\rangle, |3/2, 1, 3/2\rangle, |3/2, 2, 3/2\rangle, |2, 3/2, 1\rangle, |2, 3/2, 2\rangle\}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Выпишем те компоненты F -матрицы, которые равны единице:

$$F_{0\frac{1}{2}0}^{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = F_{1\frac{1}{2}1}^{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = F_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = F_{0\frac{1}{2}1}^{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = F_{2\frac{3}{2}1}^{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = F_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}1}^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = F_{1\frac{3}{2}1}^{2\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = F_{2\frac{3}{2}0}^{2\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 1. \quad (11)$$

Нетривиальный вклад в структуру F -матрицы в случае $k = 4$ и $b = c = 1/2$ вносят три (2×2) -матрицы M_j , имеющие вид

$$\begin{aligned} M_{\frac{1}{2}} &= F_{\frac{1}{2}ef}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} F_{\frac{1}{2}00}^{\frac{1}{2}} & F_{\frac{1}{2}01}^{\frac{1}{2}} \\ F_{\frac{1}{2}10}^{\frac{1}{2}} & F_{\frac{1}{2}11}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \\ M_1 &= F_{1ef}^{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} F_{1\frac{1}{2}0}^1 & F_{1\frac{1}{2}1}^1 \\ F_{1\frac{3}{2}0}^1 & F_{1\frac{3}{2}1}^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ M_{\frac{3}{2}} &= F_{\frac{3}{2}ef}^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} F_{\frac{3}{2}10}^{\frac{3}{2}} & F_{\frac{3}{2}11}^{\frac{3}{2}} \\ F_{\frac{3}{2}20}^{\frac{3}{2}} & F_{\frac{3}{2}21}^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -1 & \frac{3^{1/4}}{2} \\ \frac{3^{1/4}}{2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Мы опустили для простоты обозначений в последних трех формулах фиксированные индексы матричных элементов F -матриц. При вычислении матричных элементов в этих формулах мы воспользовались явным выражением (7) для q -деформированных значений $6j$ -символов.

Воспользуемся приведенными значениями F -матрицы для вычисления проекторов (8). В случае уровня $k = 4$ не равными нулю оказываются следующие два проектора:

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= \text{diag}(0, 0, A, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ P^{(1)} &= \text{diag}(0, 0, B, 1, 0, 0, 0, 0, 1, C, 0), \end{aligned} \quad (13)$$

где на диагоналях стоят (2×2) -матрицы A, B, C , которые имеют вид

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} (F_{\frac{1}{2}00}^{\frac{1}{2}})^2 & F_{\frac{1}{2}00}^{\frac{1}{2}} F_{\frac{1}{2}01}^{\frac{1}{2}} \\ F_{\frac{1}{2}10}^{\frac{1}{2}} F_{\frac{1}{2}00}^{\frac{1}{2}} & F_{\frac{1}{2}01}^{\frac{1}{2}} F_{\frac{1}{2}10}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} F_{\frac{1}{2}10}^{\frac{1}{2}} F_{\frac{1}{2}01}^{\frac{1}{2}} & F_{\frac{1}{2}10}^{\frac{1}{2}} F_{\frac{1}{2}11}^{\frac{1}{2}} \\ F_{\frac{1}{2}11}^{\frac{1}{2}} F_{\frac{1}{2}10}^{\frac{1}{2}} & (F_{\frac{1}{2}11}^{\frac{1}{2}})^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} F_{\frac{3}{2}10}^{\frac{3}{2}} F_{\frac{3}{2}11}^{\frac{3}{2}} & F_{\frac{3}{2}10}^{\frac{3}{2}} F_{\frac{3}{2}21}^{\frac{3}{2}} \\ (F_{\frac{3}{2}11}^{\frac{3}{2}})^2 & F_{\frac{3}{2}11}^{\frac{3}{2}} F_{\frac{3}{2}21}^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Нумерация в формулах (13) находится в соответствии с перечислением состояний в (10). В результате гамильтониан цепочки $SU(2)_4$ -энионов имеет следующий вид:

$$H = - \sum_{i=1}^N (g_0 P_i^{(0)} + g_1 P_i^{(1)}) \quad (15)$$

с проекторами (13).

4. ЦЕЛЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИНДЕКСА

В этом разделе мы рассмотрим целые значения индекса $c = b = 1$ энионных сортов. Допустимое пространство состояний $\{|a, f, d\rangle\}$ в этом случае девятнадцатимерно и представляет собой следующую совокупность состояний, показанных в правой части формулы (5):

$$\begin{aligned} &\{|0, 0, 0\rangle, |0, 1, 1\rangle, |0, 2, 2\rangle, |1/2, 0, 1/2\rangle, |1/2, 1, 1/2\rangle, |1/2, 1, 3/2\rangle, |1/2, 2, 3/2\rangle, \\ &|1, 0, 1\rangle, |1, 1, 1\rangle, |1, 2, 1\rangle, |1, 1, 0\rangle, |1, 1, 2\rangle, |3/2, 1, 1/2\rangle, |3/2, 2, 1/2\rangle, \\ &|3/2, 0, 3/2\rangle, |3/2, 1, 3/2\rangle, |2, 2, 0\rangle, |2, 1, 1\rangle, |2, 0, 2\rangle\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Гильбертово пространство состояний $\{|a, e, d\rangle\}$, изображенных в левой части формулы (5), состоит из следующих состояний:

$$\begin{aligned} &\{|0, 1, 0\rangle, |0, 1, 1\rangle, |0, 1, 2\rangle, |1/2, 1/2, 1/2\rangle, |1/2, 3/2, 1/2\rangle, |1/2, 1/2, 3/2\rangle, \\ &|1/2, 3/2, 3/2\rangle, |1, 0, 1\rangle, |1, 1, 1\rangle, |1, 2, 1\rangle, |1, 1, 0\rangle, |1, 1, 2\rangle, |3/2, 1/2, 1/2\rangle, \\ &|3/2, 3/2, 1/2\rangle, |3/2, 1/2, 3/2\rangle, |3/2, 3/2, 3/2\rangle, |2, 1, 0\rangle, |2, 1, 1\rangle, |2, 1, 2\rangle\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Одномерные F -матрицы, которые равны единице, соответствуют следующей последовательности индексов:

$$F_{010}^{011} = F_{1\frac{1}{2}1}^{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = F_{\frac{3}{2}11}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = F_{0\frac{1}{2}1}^{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = F_{2\frac{3}{2}1}^{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = F_{\frac{1}{2}11}^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = F_{1\frac{3}{2}1}^{2\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = F_{2\frac{3}{2}0}^{2\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 1. \quad (18)$$

Четыре двумерные F -матрицы $\widehat{M}_j$ равны

$$\begin{aligned} \widehat{M}_{\frac{1}{2}} &= F_{\frac{1}{2}ef}^{\frac{1}{2}11} = \begin{pmatrix} F_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}} & F_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}} \\ F_{\frac{1}{2}\frac{3}{2}0}^{\frac{1}{2}} & F_{\frac{1}{2}\frac{3}{2}1}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \widehat{M}'_{\frac{1}{2}} &= F_{\frac{1}{2}ef}^{\frac{1}{2}11} = \begin{pmatrix} F_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}} & F_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}2}^{\frac{1}{2}} \\ F_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}1}^{\frac{1}{2}} & F_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}2}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \widehat{M}_{\frac{3}{2}} &= F_{\frac{1}{2}ef}^{\frac{3}{2}11} = \begin{pmatrix} F_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1}^{\frac{3}{2}} & F_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}2}^{\frac{3}{2}} \\ F_{\frac{1}{2}\frac{3}{2}1}^{\frac{3}{2}} & F_{\frac{1}{2}\frac{3}{2}2}^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \widehat{M}'_{\frac{3}{2}} &= F_{\frac{1}{2}ef}^{\frac{3}{2}11} = \begin{pmatrix} F_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}0}^{\frac{3}{2}} & F_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}1}^{\frac{3}{2}} \\ F_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}0}^{\frac{3}{2}} & F_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}1}^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

F -символ содержит также трехмерную матрицу, которая имеет вид

$$\widehat{M}_1 = F_{1ef}^{111} = \begin{pmatrix} F_{100}^1 & F_{101}^1 & F_{102}^1 \\ F_{110}^1 & F_{111}^1 & F_{112}^1 \\ F_{120}^1 & F_{121}^1 & F_{122}^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Определяющиеся последним выражением проекторы $\hat{P}^{(j)}$ при $j = 0, 1, 2$ и $e = 0, 1, 2$, $f = 0, 1, 2$ в трехмерном подпространстве равны

$$\begin{aligned}\hat{P}^{(0)} &= F_{1e0}^{111} F_{10f}^{111} = \begin{pmatrix} F_{00}F_{00} & F_{00}F_{01} & F_{00}F_{02} \\ F_{10}F_{00} & F_{10}F_{01} & F_{10}F_{02} \\ F_{20}F_{00} & F_{20}F_{01} & F_{20}F_{02} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{P}^{(1)} &= F_{1e1}^{111} F_{11f}^{111} = \begin{pmatrix} F_{01}F_{10} & F_{01}F_{11} & F_{01}F_{12} \\ F_{11}F_{10} & F_{11}F_{11} & F_{11}F_{12} \\ F_{21}F_{10} & F_{21}F_{11} & F_{21}F_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{P}^{(2)} &= F_{1e2}^{111} F_{12f}^{111} = \begin{pmatrix} F_{02}F_{20} & F_{02}F_{21} & F_{02}F_{22} \\ F_{12}F_{20} & F_{12}F_{21} & F_{12}F_{22} \\ F_{22}F_{20} & F_{22}F_{21} & F_{22}F_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (21)$$

Зависящие от матрицы $\widehat{M}_j$ проекторы $\hat{P}^{(j)}$ в двумерных подпространствах с полуцелыми значениями индексов a и d равны нулю: $\hat{P}^{(1/2)} = \hat{P}'^{(1/2)} = \hat{P}^{(3/2)} = \hat{P}'^{(3/2)} = 0$.

В результате при $k = 4$ и $a = b = 1$ мы имеем $\bar{P}^{(j)} = 0$ для полуцелых значений сорта энионов и следующие ненулевые проекторы в целочисленном секторе:

$$\begin{aligned}\bar{P}^{(0)} &= \text{diag}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \hat{P}^{(0)}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \bar{P}^{(1)} &= \text{diag}(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \hat{P}^{(1)}, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), \\ \bar{P}^{(2)} &= \text{diag}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \hat{P}^{(2)}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),\end{aligned}\quad (22)$$

где на диагоналях расположены трехмерные матрицы $\hat{P}^{(j)}$.

Все перечисленное означает, что гамильтониан цепочки целочисленных по лестничным индексам b, c $SU(2)_4$ -энионов имеет следующий вид:

$$H = - \sum_{i=1}^N (g_0 \bar{P}_i^{(0)} + g_1 \bar{P}_i^{(1)} + g_2 \bar{P}_i^{(2)}) \quad (23)$$

с проекторами (22).

5. КВАНТОВЫЕ $SU(2)_K \times \overline{SU(2)_K}$ ДУБЛИ ДРИНФЕЛЬДА И ПОЛНАЯ КВАНТОВАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

В двумерных системах с границей энтропия в основном состоянии зависит от характерного масштаба L границы как $S = \alpha L - \gamma + \dots$, где α – некоторая неуниверсальная константа, а многоточием обозначены слагаемые, которые обращаются в нуль при $L \rightarrow \infty$. Универсальная константа γ называется топологической энтропией. Для области с топологией диска $\gamma = \ln \mathcal{D}$, где $\mathcal{D} = \sqrt{\sum_{j=0}^{k/2} d_j^2}$ – полная квантовая размерность [30], [31]. Топологически тривиальным фазам с невырожденным основным состоянием при $j = 0$ отвечает квантовая размерность $d_0 = 1$. Поэтому в этом случае $\mathcal{D} = 1$ и $\gamma = 0$. По этой причине ненулевое значение константы γ является индикатором топологического порядка. Величина γ указывает на степень сложности топологического порядка, которая определяет степень запутанности гильбертова пространства состояний, когда полное пространство состояний не может быть

Рис. 1. Расширенные диаграммы Дынкина $\hat{D}_4$ и $\hat{D}_6$, ассоциированные с двумя секторами гильбертова пространства соответственно для полуцелых (слева) и целых (справа) значений квантовых чисел.

представлено как прямое произведение пространств состояний подсистем. В частности, полная квантовая размерность и число различных топологических секторов указывают на то, содержит ли рассматриваемая система неабелевы энионы, так как для них квантовая размерность $d_j > 1$. Для $SU(2)_k$ -теории полная квантовая размерность равна $\mathcal{D} = \sqrt{(k+2)/2 \sin(\pi/(k+2))}$, что для $k = 2, 3, 4, 5$ дает следующие значения: $2, \sqrt{2 + (1 + \sqrt{5})}/2, 2\sqrt{3}, 4.31182$.

В системах, где нарушение инвариантности относительно инверсии времени отсутствует, квантовые состояния классифицируются с помощью пар квантовых чисел, принадлежащих квантовому $SU(2)_k \times \overline{SU(2)}_k$ дублю. Второй множитель в этом произведении алгебр содержит данные, которые комплексно сопряжены по отношению к данным из первого множителя. В этом разделе с помощью численных вычислений мы покажем, что матрица смежности для расширенной диаграммы Дынкина в теории квантового дубля Дринфельда имеет старшее собственное значение, которое совпадает с полной квантовой размерностью для всех рассмотренных нами значений уровня $k = 2, 3, 4, 5$.

Для уровня $k = 2$, когда $d_0 = 1$, $d_{1/2} = \sqrt{2}$, $d_1 = 1$ и $\mathcal{D} = \sqrt{d_0^2 + d_{1/2}^2 + d_1^2} = 2$, расширенные диаграммы Дынкина [32] рассматривались в работе [33] (см. рис. 1). При изображении расширенной диаграммы Дынкина в виде графа здесь и ниже мы будем придерживаться следующего правила: графы будут содержать систему линий, которые соединяют точки и изображают все возможные неориентированные переходы между состояниями $(\alpha, \beta) \leftrightarrow \gamma$ с разрешенными значениями квантовых чисел α, β, γ . Переход мы считаем разрешенным (и в этом случае изображаем его линией на графе), если он совместим с правилами слияния для рассматриваемого значения k . Например, разрешенным является переход $(1/2, 1/2) \leftrightarrow (1)$.

Для рассматриваемого случая $k = 2$ матрицы смежности в секторе с полуцелыми значениями квантовых чисел имеют вид

$$A_{\hat{D}_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где матричные индексы ассоциированы с пятью различными совокупностями квантовых чисел, расположенных в следующем порядке: $(1/2, 1), (1, 1/2), (1/2), (1/2, 0)$,

Рис. 2. Диаграмма Дынкина D_6 , ассоциированная с гильбертовым пространством квантового дубля с энионами Фибоначчи.

$(0, 1/2)$, в секторе с целыми значениями они имеют вид

$$A_{\widehat{D}_6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где матричные индексы связаны с семью различными совокупностями квантовых чисел, расположенных в следующем порядке: $(0, 0)$, $(1, 1)$, (0) , $(1/2, 1/2)$, (1) , $(0, 1)$, $(1, 0)$. Наибольшее собственное значение этих матриц, найденное с помощью программы Mathematica, равно 2.

Для теории $SU(2)_3 \times \overline{SU(2)}_3$ с энионами Фибоначчи [18] диаграмма Дынкина D_6 показана на рис. 2. Для нее матрица смежности равна

$$A_{k=3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Индексы этой матрицы соответствуют следующему выбору порядка квантовых чисел: $(0, 0)$, (0) , $(1/2, 1/2)$, $(1/2)$, $(0, 1/2)$, $(1/2, 0)$. Использование пакета Mathematica при вычислении наибольшего собственного значения матрицы $A_{k=3}$ приводит к значению $\sqrt{2 + (1 + \sqrt{5})/2}$, уже известному нам из формулы для полной квантовой размерности.

С увеличением значения уровня, например в случае $k = 4$, расширенные диаграммы Дынкина как для целых (I), так и для полуцелых (II) значений квантовых чисел являются громоздкими. Поэтому мы приведем здесь только матрицы смежности. Отличными от нуля и равными единице являются следующие матричные элементы этих симметричных матриц:

$$(A_{k=4}^I)_{i,k} = \{A_{1,3}, A_{2,3}, A_{2,9}, A_{2,14}, A_{3,4}, A_{3,5}, A_{3,6}, A_{5,9}, A_{6,9}, A_{7,9}, A_{8,9}, A_{9,10}, \\ A_{9,11}, A_{9,12}, A_{9,13}, A_{12,14}, A_{13,14}, A_{14,15}, A_{14,16}\},$$

где индексы матричных элементов соответствуют упорядочению квантовых чисел $(0, 0)$, $(1, 1)$, (0) , $(2, 2)$, $(3/2, 3/2)$, $(1/2, 1/2)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, (1) , $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1/2, 3/2)$, $(3/2, 1/2)$, (2) , $(2, 0)$, $(0, 2)$, и

$$(A_{k=4}^{\text{HI}})_{i,k} = \{A_{1,5}, A_{2,5}, A_{3,5}, A_{4,5}, A_{5,6}, A_{5,7}, A_{5,8}, A_{5,9}, A_{6,10}, A_{7,10}, \\ A_{8,10}, A_{9,10}, A_{10,11}, A_{10,12}, A_{10,13}, A_{10,14}\},$$

где индексы матричных элементов соответствуют упорядочению квантовых чисел $(0, 1/2)$, $(1/2, 0)$, $(3/2, 2)$, $(2, 3/2)$, $(1/2)$, $(1, 1/2)$, $(1/2, 1)$, $(1, 3/2)$, $(3/2, 1)$, $(3/2)$, $(2, 1/2)$, $(1/2, 2)$, $(3/2, 0)$, $(0, 3/2)$. Для этих двух матриц наибольшее собственное значение, как показывает расчет с помощью пакета Mathematica, равно $2\sqrt{3}$.

Если $k = 5$, то расширенная диаграмма Дынкина и матрица смежности (ранг последней равен 42) являются еще более громоздкими. Поэтому для рассматриваемого случая $k = 5$ мы их не приводим. Отметим только, что характеристический полином матрицы смежности $A_{k=5}$ имеет вид

$$P(\lambda) = \text{Det} |A_{k=5} - \lambda \mathbf{1}| = \lambda^{30}(\lambda^2 - a^2)^2(\lambda^2 - b^2)^2(\lambda^2 - c^2)^2$$

с наибольшим собственным значением, равным $a = 4.31182$.

Таким образом, как показали численные расчеты, для всех указанных выше значений уровня k наибольшее собственное значение матрицы смежности совпадает с полной квантовой размерностью $\mathcal{D}$. Аналитическое доказательство этого утверждения у нас отсутствует.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Особенности гамильтоновой динамики $SU(2)_4$ -теории можно продемонстрировать, сравнивая ее с $SU(2)_3$ -случаем энионов Фибоначчи [5] и $SU(2)_5$ -теорией [6]. В последнем случае при $b = c = 1$ обращает на себя внимание отсутствие вклада в выражения для полных проекторов (22) от проекторов в двумерном подпространстве. По сравнению с гамильтонианом энионов Фибоначчи в гамильтониане $SU(2)_4$ -теории при приписывании состоянию с $j = 1$ энергии, равной нулю, отсутствует вклад одномерного проектора.

При совпадающих константах связи в гамильтониане (23) мы имеем модель, которая в непрерывном пределе совпадает с рациональной конформной теорией поля с центральным зарядом $c = 4/5$. Для противоположных по знаку констант связи рассматриваемому случаю $k = 4$ в непрерывном пределе отвечает Z_4 -теория парафермионов с центральным зарядом $c = 1$. Если константы связи не совпадают, то, приписав фазовому состоянию со спином $j = 1$ в гамильтониане (15) энергию, равную нулю, т.е. считая $g_1 = 0$ в (15) и $g_0 = 0$ для спина $j = 0$ в (23), мы можем проанализировать тип щелевых фазовых состояний. Это можно сделать, изменяя угол θ при параметризации констант связи $g_1 = \sin \theta$, $g_2 = \cos \theta$ в (23) так, как это сделано в работах [7], [6]. Мы планируем обратиться к этой проблеме в отдельной работе. Здесь мы сконцентрируемся на изучении возможности представления гамильтониана точно интегрируемых энионных систем в форме проекторов в более общей постановке.

При обсуждении весового представления (2) операторов алгебры Темперли–Либа мы уже упоминали, что гамильтониан в предельно анизотропном случае на границе

некоторых режимов точно интегрируемой RSOS-модели¹⁾ [34], [35] может быть получен с помощью R -матрицы. Последняя удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \quad (27)$$

Мы использовали в этом уравнении стандартные обозначения $R_{12} = R \otimes R \otimes 1$ и т. д. с матрицей R , реализующей отображение пространства $V \otimes V \hookrightarrow V$ в себя.

В свою очередь, R -матрица моделей, описывающих топологически упорядоченные фазовые состояния, может быть построена с помощью решения [36]

$$R_{12,34} = (F_{14}^{t_4})^{-1} F_{13} F_{24}^t (F_{23}^{-1})^{t_2} \quad (28)$$

пентагонального уравнения

$$F_{12}F_{13}F_{23} = F_{23}F_{12}. \quad (29)$$

Здесь $R_{12,34} \in W \otimes W$, где $W = V \otimes V^*$, индексы t и t_i означают соответственно полную и частичную транспозицию в i -м пространстве. Индексы F -матрицы в выражениях (28) и (29) принадлежат четырем граням тетраэдра. В общем случае F -матрица зависит также от спектрального параметра x [36], [37], разложение в ряд по малому значению которого приводит к гамильтониану. Например, случай [37]

$$R(x) = [x - 1]_q + [x]_q e_1 \quad (30)$$

приводит к уже известным ответам [18], [38].

Рассмотрим $(2+1)D$ -модели и тензор T_{ijkl} , который зависит от индексов (i, j, k, l) , принадлежащих граням тетраэдра. Каждый из этих индексов является собирательной (коллективной) меткой, содержащей в себе переменные из совокупностей (a, b, c, d, e, f) , (i_s, j_s, k_s, l_s) , $s = 1, 2, 3, 4$, индексов, относящихся соответственно к ребрам и вершинам каждой грани тетраэдра. С помощью тензоров T_{ijkl} можно найти статистическую сумму [39], [40]

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H} = \sum_{i,j,k,l} T_{jfei} T_{hgjk} T_{qklr} T_{lits} \dots = \text{tTr} \bigotimes_i T, \quad (31)$$

вычислив тензорный след $\text{tTr} \bigotimes_i T$. Чтобы выполнить вычисления, анзац для тензора T_{ijkl} может быть записан следующим образом:

$$T_{[i][j][k][l]} = F_{def}^{abc} \cdot \lambda(i_1, j_1, k_1) \cdot \lambda(i_2, j_2, l_2) \cdot \lambda(i_3, k_3, l_3) \cdot \lambda(j_4, k_4, l_4). \quad (32)$$

Поскольку нас обычно интересует поведение системы на расстояниях, много больших постоянной решетки, то и сейчас мы будем рассматривать конечную стадию ренормгруппового потока, которая не содержит данных о распределении степеней свободы на малых расстояниях. Фиксированная поверхность на этой конечной стадии, состоящая из фиксированных точек ренормгруппового потока, в терминах функций из (32) отвечает условию, что все функции локальных переменных стремятся к константам. Другими словами, с точностью до нормировки все функции $\lambda \rightarrow 1$. Эта гипотеза означает, что топологическая универсальность поведения системы на больших расстояниях возникает в инфракрасном пределе благодаря специальному

¹⁾Restricted solid on solid.

вкладу в статистическую сумму, который зависит только от F -матрицы. Практическая реализация программы вычислений результата такого ренормгруппового потока связана с проблемой нахождения удобной связи между переменными, принадлежащими граням тетраэдра, и переменными, находящимися на ребрах и в вершинах тетраэдра. Мы планируем обратиться к ней в будущем.

Благодарности. Авторы благодарны Р. М. Кашаеву, В. Г. Тураеву, Э. Ардонну, С. Саймону, Й. Слингерланду за полезные обсуждения. Работа была частично поддержана РФФИ (гранты № 09-01-92426, 09-01-00268) и программой “Проблемы нелинейной динамики” Президиума РАН. Авторы выражают благодарность INFN за частичную поддержку в рамках проекта LE41, а также Международному центру теоретической физики им. Абдуса Салама в Триесте, Институту теоретической физики им. Галилео Галилея во Флоренции, а также NORDITA за гостеприимство.

Список литературы

- [1] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, S. Das Sarma, *Rev. Modern Phys.*, **80**:3 (2008), 1083–1159, arXiv: 0707.1889.
- [2] E. Rowell, R. Stong, Z. Wang, *Comm. Math. Phys.*, **292**:2 (2009), 343–389, arXiv: 0712.1377.
- [3] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [4] J. Preskill, *Topological quantum computation, lecture notes*, 2004.
<http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph219/topological.ps>.
- [5] A. Feiguin, S. Trebst, A. W. W. Ludwig, M. Troyer, A. Kitaev, Z. Wang, M. H. Freedman, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:16 (2007), 160409, 4 pp., arXiv: cond-mat/0612341.
- [6] S. Trebst, M. Troyer, Z. Wang, A. W. W. Ludwig, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, **176** (2008), 384–407, arXiv: 0902.3275.
- [7] C. Gils, E. Ardonne, S. Trebst, A. W. W. Ludwig, M. Troyer, Z. Wang, *Phys. Rev. Lett.*, **103**:7 (2009), 070401, 4 pp., arXiv: 0810.2277.
- [8] M. H. Freedman, M. Larsen, Z. Wang, *Comm. Math. Phys.*, **227**:3 (2002), 605–622.
- [9] M. H. Freedman, M. J. Larsen, Z. Wang, *Comm. Math. Phys.*, **228**:1 (2002), 177–199, arXiv: math/0103200.
- [10] L. D. Faddeev, “How the algebraic Bethe ansatz works for integrable models”, *Symétries Quantiques*, eds. A. Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam, 1998, 149–219, arXiv: hep-th/9605187.
- [11] A. Yu. Kitaev, *Ann. Phys.*, **303**:1 (2003), 2–30, arXiv: quant-ph/9707021.
- [12] S. Trebst, E. Ardonne, A. Feiguin, D. A. Huse, A. W. W. Ludwig, M. Troyer, *Phys. Rev. Lett.*, **101**:5 (2008), 050401, 4 pp., arXiv: 0801.4602.
- [13] P. Bonderson, K. Shtengel, J. K. Slingerland, *Ann. Phys.*, **323**:11 (2008), 2709–2755, arXiv: 0707.4206.
- [14] P. Bonderson, M. Freedman, C. Nayak, *Ann. Phys.*, **324**:4 (2009), 787–826, arXiv: 0808.1933.
- [15] P. Bonderson, *Phys. Rev. Lett.*, **103**:11 (2009), 110403, 4 pp., arXiv: 0905.2726.
- [16] F. A. Bais, J. K. Slingerland, *Phys. Rev. B*, **79**:4 (2009), 045316, 27 pp., arXiv: 0808.0627.
- [17] F. A. Bais, J. K. Slingerland, S. M. Haaker, *Phys. Rev. Lett.*, **102**:22 (2009), 220403, 4 pp., arXiv: 0812.4596.
- [18] C. Gils, S. Trebst, A. Kitaev, A. W. W. Ludwig, M. Troyer, Z. Wang, *Nature Phys.*, **5**:11 (2009), 834–839, arXiv: 0906.1579.
- [19] S. Trebst, P. Werner, M. Troyer, K. Shtengel, C. Nayak, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:7 (2007), 070602, 4 pp., arXiv: cond-mat/0609048.

- [20] H. Yao, S. A. Kivelson, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:24 (2007), 247203, 4 pp., arXiv: 0708.0040.
- [21] A. Yu. Kitaev, *Ann. Phys.*, **321**:1 (2006), 2–111, arXiv: cond-mat/0506438.
- [22] G. Baskaran, S. Mandal, R. Shankar, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:24 (2007), 247201, 4 pp., arXiv: cond-mat/0611547.
- [23] S.-P. Kou, X.-G. Wen, *Projected p-wave superconducting wave-functions for topological orders*, arXiv: 0711.0571.
- [24] D. J. Klein, *J. Phys. A*, **15**:2 (1982), 661–671.
- [25] H. N. V. Temperley, E. H. Lieb, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **322**:1549 (1971), 251–280.
- [26] V. Jones, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **298**:20 (1984), 505–508.
- [27] A. Kuniba, Y. Akutsu, M. Wadati, *J. Phys. Soc. Japan*, **55**:10 (1986), 3285–3288.
- [28] V. Pasquier, *Nucl. Phys. B*, **285**:1 (1987), 162–172.
- [29] H. Furusho, *Ann. Math.*, **171**:1 (2010), 545–556, arXiv: math/0702128.
- [30] A. Kitaev, J. Preskill, *Phys. Rev. Lett.*, **96**:11 (2006), 110404, 4 pp., arXiv: hep-th/0510092.
- [31] M. Levin, X.-G. Wen, *Phys. Rev. Lett.*, **96**:11 (2006), 110405, 4 pp., arXiv: cond-mat/0510613.
- [32] P. Ginsparg, *Nucl. Phys. B*, **295**:2 (1988), 153–170.
- [33] C. Gils, *J. Stat. Mech.*, **2009**:7 (2009), P07019, 21 pp., arXiv: 0902.0168.
- [34] G. E. Andrews, R. J. Baxter, P. J. Forrester, *J. Stat. Phys.*, **35**:3–4 (1984), 193–266.
- [35] P. Fendley, *J. Phys. A*, **39**:50 (2006), 15445–15475, arXiv: cond-mat/0609435.
- [36] R. M. Kashaev, *Heisenberg double and pentagon relation*, arXiv: q-alg/9503005.
- [37] I. B. Frenkel, V. G. Turaev, “Trigonometric solutions of the Yang–Baxter equation, nets, and hypergeometric functions”, *Functional Analysis on the Eve of the 21st Century*, v. 1, Progr. Math., **131**, eds. S. Gindikin, J. Lepowsky, R. L. Wilson, Birkhauser, Boston, MA, 1995, 65–118.
- [38] P. Fendley, E. Fradkin, *Phys. Rev. B*, **72**:2 (2005), 024412, 19 pp., arXiv: cond-mat/0502071.
- [39] Z.-C. Gu, X.-G. Wen, *Phys. Rev. B*, **80**:15 (2009), 155131, 23 pp., arXiv: 0903.1069.
- [40] M. Levin, C. P. Nave, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:12 (2007), 120601, 4 pp., arXiv: cond-mat/0611687.