Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, Свойства солитонных потенциалов оператора теплопроводности, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 1, 13–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6660>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:29:56

© 2011 г. М. Бойти*, Ф. Пемпинелли*, А. К. Погребков†
**СВОЙСТВА СОЛИТОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ
ОПЕРАТОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Подробно рассмотрены свойства чисто солитонных тау-функций и потенциала уравнения теплопроводности. Описано асимптотическое поведение потенциала и установлена зависимость лучевой структуры этого асимптотического поведения на плоскости (x_1, x_2) от параметров потенциала.

Ключевые слова: уравнение Кадомцева–Петвиашвили, солитоны, асимптотика потенциала.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП) было выведено как модель слабо двумерных волн с малой амплитудой и большой длиной волны в слабо диспергирующей среде [1]. Это уравнение есть $(2+1)$ -мерное обобщение знаменитого уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ), и с начала 70-х годов известно [2], [3], что оно интегрируемо. Существуют две неэквивалентные версии уравнения КП: уравнения КП-I и КП-II. В настоящей работе мы рассматриваем уравнение КП-II

$$(u_t - 6uu_{x_1} + u_{x_1x_1x_1})_{x_1} = -3u_{x_2x_2} \quad (1.1)$$

(уравнение КП-I имеет знак плюс в правой части), где $u = u(x, t)$, $x = (x_1, x_2)$, индексы x_1 , x_2 и t означают частные производные. Уравнение КП-II интегрируемо, поскольку может быть представлено как условие совместности $[\mathcal{L}, \mathcal{T}] = 0$ для пары Лакса $\mathcal{L}$ и $\mathcal{T}$, где оператор

$$\mathcal{L}(x, \partial_x) = -\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2 - u(x) \quad (1.2)$$

задает хорошо известное уравнение теплопроводности, а оператор $\mathcal{T}$ имеет вид

$$\mathcal{T}(x, \partial_x, \partial_t) = \partial_t + 4\partial_{x_1}^3 - 6u\partial_{x_1} - 3u_{x_1} - 3\partial_{x_1}^{-1}u_{x_2}. \quad (1.3)$$

Спектральная теория оператора (1.2) в случае вещественного потенциала $u(x)$, быстро убывающего на пространственной бесконечности, была развита в рабо-

*Dipartimento di Fisica, Università del Salento and Sezione INFN, Lecce, Italy

†Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.

E-mail: pogreb@mi.ras.ru

тах [4]–[7]. Однако этот случай не является наиболее интересным, поскольку уравнение КП-II было предложено в работе [1] именно для рассмотрения слабого двумерного поперечного возмущения односолитонного решения уравнения КдФ. Действительно, если функция $u_1(t, x_1)$ удовлетворяет уравнению КдФ, то функция $u(t, x_1, x_2) = u_1(t, x_1 + \mu x_2 - 3\mu^2 t)$ является решением уравнения КП-II для произвольной константы $\mu \in \mathbb{R}$. В частности, уравнение КП-II допускает односолитонное решение вида

$$u(x, t) = -\frac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} x_1 + \frac{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}{2} x_2 - 2(\kappa_1^3 - \kappa_2^3) t \right], \quad (1.4)$$

где κ_1 и κ_2 суть вещественные произвольные константы.

Спектральная теория оператора теплопроводности (1.2), включающая также и солитоны, еще ждет своего построения. В случае потенциала $u(x)$, быстро спадающего на пространственной бесконечности, согласно работам [4]–[7] основными инструментами построения спектральной теории оператора (1.2), как и в одномерном случае, являются интегральные уравнения, задающие решения Йоста. Однако, если потенциал $u(x)$ не убывает на пространственной бесконечности, как в случае солитонных потенциалов (см., например, решение (1.4)), эти интегральные уравнения плохо определены, поэтому необходим более общий подход. В ходе решения аналогичной проблемы для нестационарного оператора Шредингера, ассоциированного с уравнением КП-I, был введен метод расширенной резольвенты [8]. Соответственно, спектральную теорию уравнения КП-II, также включающую солитоны, следует изучать с помощью резольвентного подхода. На этой основе оказалось возможным развить метод обратной задачи для решения, описывающего один солитон на произвольном быстроубывающем фоне [9], и исследовать существование (расширенной) резольвенты для (некоторых) многосолитонных решений [10].

Однако общий случай N солитонов остается открытым. Это обусловлено, в частности, сложным асимптотическим поведением чисто солитонных потенциалов на плоскости (x_1, x_2) . В настоящей работе мы даем детальное описание этого поведения в терминах солитонных параметров. Общая форма многосолитонного потенциала была выведена посредством рациональных преобразований данных рассеяния в работе [11] и посредством сплетающего преобразования в работе [10]. В работе [12] мы доказали, что результаты обеих этих конструкций совпадают друг с другом, а также с формой многосолитонных потенциалов, полученной в терминах тау-функции (см. обзорную статью [13] и приведенные в ней ссылки).

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы приводим многосолитонные потенциалы. Они характеризуются двумя целыми числами (топологическими зарядами) N_a и N_b , удовлетворяющими условию

$$N_a, N_b \geq 1, \quad (1.5)$$

и имеют на больших расстояниях N_b “входящих” лучей и N_a “выходящих” лучей. Используя обозначения работы [12], мы даем для этих потенциалов два дуальных представления через тау-функции, зависящие от $\mathcal{N}$ вещественных параметров κ_n , где

$$\mathcal{N} = N_a + N_b \quad (1.6)$$

(так что $\mathcal{N} \geq 2$), и от постоянной $(N_a \times N_b)$ -матрицы d . В разделе 3 мы подробно исследуем асимптотическое поведение многосолитонных потенциалов при больших x и показываем, что круговой угол в начале координат может быть разделен на $\mathcal{N}$ угловых секторов таких, что в направлениях ограничивающих их лучей потенциал имеет постоянное солитоноподобное поведение, в то время как по направлениям внутри секторов потенциал имеет экспоненциально убывающее поведение, которое мы приводим в явном виде. В частности, для специального подкласса солитонных потенциалов мы описываем структуру лучей явно в терминах параметров κ_n .

2. МНОГОСОЛИТОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Пусть заданы $\mathcal{N}$ вещественных параметров

$$\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_{\mathcal{N}}. \quad (2.1)$$

Введем функции

$$K_n(x) = \kappa_n x_1 + \kappa_n^2 x_2, \quad n = 1, \dots, \mathcal{N}. \quad (2.2)$$

Пусть $e^{K(x)} = \text{diag} \{e^{K_n(x)}\}_{n=1}^{\mathcal{N}}$ – диагональная $(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ -матрица, $\mathcal{D}$ – постоянная вещественная $(\mathcal{N} \times N_b)$ -матрица с по крайней мере двумя ненулевыми максимальными минорами, а $\mathcal{V}$ – “неполная матрица Вандермонда”, т. е. $(N_b \times \mathcal{N})$ -матрица вида

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_1^{N_b-1} & \dots & \kappa_{\mathcal{N}}^{N_b-1} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Тогда солитонный потенциал записывается как

$$u(x) = -2\partial_{x_1}^2 \ln \tau(x), \quad (2.4)$$

где тау-функция равна

$$\tau(x) = \det(\mathcal{V} e^{K(x)} \mathcal{D}) \quad (2.5)$$

(см. обзорную статью [13], ссылки в ней, а также работу [12], где использованы те же обозначения).

Существует (см. статьи [10], [12], [14]) дуальное представление для потенциала в терминах тау-функции:

$$\tau'(x) = \det(\mathcal{D}' e^{-K(x)} \gamma \mathcal{V}'). \quad (2.6)$$

Здесь $\mathcal{D}'$ – постоянная вещественная $(N_a \times \mathcal{N})$ -матрица, которая подобно матрице $\mathcal{D}$ имеет по крайней мере два ненулевых максимальных минора и ортогональна матрице $\mathcal{D}$ в том смысле, что

$$\mathcal{D}' \mathcal{D} = 0, \quad (2.7)$$

причем ноль в правой части – это $(N_a \times N_b)$ -матрица. В формуле (2.6) матрица $\mathcal{V}'$ – это $(\mathcal{N} \times N_b)$ -матрица вида

$$\mathcal{V}' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \kappa_1^{N_a-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \kappa_{\mathcal{N}}^{N_a-1} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

а γ – постоянная диагональная вещественная $(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ -матрица:

$$\gamma = \text{diag} \{ \gamma_n \}_{n=1}^{\mathcal{N}}, \quad \gamma_n = \prod_{\substack{n'=1, \\ n' \neq n}}^{\mathcal{N}} (\kappa_n - \kappa_{n'})^{-1}. \quad (2.9)$$

Дуальное представление получается, если заметить, что

$$\tau(x) = (-1)^{N_a N_b + N_a(N_a - 1)/2} \left(\prod_{n=1}^{\mathcal{N}} e^{K_n(x)} \right) V(\kappa_1, \dots, \kappa_{N_a + N_b}) \tau'(x), \quad (2.10)$$

где V означает детерминант Вандермонда,

$$V(\kappa_1, \dots, \kappa_{\mathcal{N}}) = \prod_{1 \leq m < n \leq \mathcal{N}} (\kappa_n - \kappa_m). \quad (2.11)$$

Матрицы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ обладают довольно интересными свойствами [12]. Принимая во внимание, что матрица $\mathcal{D}$ имеет ненулевые максимальные миноры, мы всегда можем записать ее в виде $\mathcal{D} = \pi \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, где π – $(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ -матрица перестановки такая, что $(N_b \times N_b)$ -матрица d_2 несингулярна. Тогда мы можем переписать последнее равенство в виде

$$\mathcal{D} = \pi \begin{pmatrix} d \\ E_{N_b} \end{pmatrix} d_2, \quad (2.12)$$

где $d = d_1 d_2^{-1}$ – постоянная вещественная $(N_a \times N_b)$ -матрица, а E_{N_b} – единичная $(N_b \times N_b)$ -матрица.

Заметим (см. [13]), что выражение для потенциала в (2.4), равно как и условие (2.7), остаются неизменными, если соответственно в (2.5) и (2.6) мы умножим $(\mathcal{N} \times N_b)$ -матрицу $\mathcal{D}$ справа на несингулярную постоянную $(N_b \times N_b)$ -матрицу, а $(N_a \times \mathcal{N})$ -матрицу $\mathcal{D}'$ – слева на несингулярную постоянную $(N_a \times N_a)$ -матрицу. Мы заключаем, что матрица d_2 несущественна, и матрица $\mathcal{D}$ может быть выбрана имеющей простую блочную структуру. Понятно, однако, что выбор матриц π и d не единствен, поскольку матрица $\mathcal{D}$ может иметь различные ненулевые максимальные миноры.

Запишем теперь $\mathcal{D}'\pi = \begin{pmatrix} d'_1 & d'_2 \end{pmatrix}$, где d'_1 – $(N_a \times N_a)$ -матрица и d'_2 – $(N_a \times N_b)$ -матрица. Тогда в силу (2.7) мы имеем $d'_2 = -d'_1 d$, где d – та же $(N_a \times N_b)$ -матрица, что и в (2.12). Итак, для матрицы $\mathcal{D}'$ мы получаем блочную структуру,

$$\mathcal{D}' = d'_1 \begin{pmatrix} E_{N_a} & -d \end{pmatrix} \pi^\dagger, \quad (2.13)$$

и благодаря эквивалентности τ и τ' имеем, что $\det d'_1 \neq 0$, а тогда и $\mathcal{D}'$ может быть выбрана имеющей простую блочную структуру.

Более того, вследствие блочной структуры матриц $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$, данной в (2.12) и (2.13), мы получаем, что

$$\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D} = d_2^\dagger (E_{N_b} + d^\dagger d) d_2, \quad \mathcal{D}' \mathcal{D}'^\dagger = d'_1 (E_{N_a} + d d^\dagger) d_1'^\dagger, \quad (2.14)$$

где $\dagger$ означает эрмитово сопряжение матрицы (на самом деле, здесь транспонирование). Итак, обе матрицы $\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}$ и $\mathcal{D}' \mathcal{D}'^\dagger$ положительны, а потому $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ имеют соответственно левые и правые обратные [15]. А именно,

$$(\mathcal{D})^{(-1)} \mathcal{D} = E_{N_b}, \quad \mathcal{D}' (\mathcal{D}')^{(-1)} = E_{N_a},$$

причем

$$(\mathcal{D})^{(-1)} = (\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D})^{-1} \mathcal{D}^\dagger, \quad (\mathcal{D}')^{(-1)} = \mathcal{D}'^\dagger (\mathcal{D}' \mathcal{D}'^\dagger)^{-1}.$$

Произведения матриц в обратном порядке дают вещественные эрмитовы $(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ -матрицы

$$\begin{aligned} P &= \mathcal{D}(\mathcal{D})^{(-1)} = \mathcal{D}(\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D})^{-1} (\mathcal{D})^\dagger, \\ P' &= (\mathcal{D}')^{(-1)} \mathcal{D}' = (\mathcal{D}')^\dagger (\mathcal{D}' \mathcal{D}'^\dagger)^{-1} \mathcal{D}', \end{aligned}$$

которые являются ортогональными проекторами, т. е. $P^2 = P$, $(P')^2 = P'$ и $PP' = 0 = P'P$, дополнительными в том смысле, что $P + P' = E_{\mathcal{N}}$. Взаимная ортогональность проекторов следует из (2.7), а последнее равенство вытекает из очевидных соотношений типа $(E_{N_b} + d^\dagger d)^{-1} d^\dagger = d^\dagger (E_{N_a} + dd^\dagger)^{-1}$. Заметим, наконец, что если все максимальные миноры матрицы $\mathcal{D}$ отличны от нуля, то перестановка π в (2.12) и (2.13) может быть выбрана произвольной, например ее можно взять тождественной, что дает упрощенные представления

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} d \\ E_{N_b} \end{pmatrix} d_2, \quad \mathcal{D}' = d'_1 \begin{pmatrix} E_{N_a} & -d \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

так что в данном частном случае без потери общности можно выбрать

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} d \\ E_{N_b} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}' = \begin{pmatrix} E_{N_a} & -d \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Для изучения свойств потенциала удобно использовать явное представление определителя (2.5). Используя формулу Бине–Коши для определителя произведения матриц, мы получаем

$$\tau(x) = \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_{N_b} \leq \mathcal{N}} f_{n_1, \dots, n_{N_b}} \prod_{l=1}^{N_b} e^{K_{n_l}(x)}, \quad (2.17)$$

где коэффициенты $f_{n_1, \dots, n_{N_b}}$ записываются как

$$f_{n_1, \dots, n_{N_b}} = V(\kappa_{n_1}, \dots, \kappa_{n_{N_b}}) \mathcal{D}(n_1, \dots, n_{N_b}). \quad (2.18)$$

Здесь мы использовали определитель Вандермонда (2.11) и обозначение

$$\mathcal{D}(n_1, \dots, n_{N_b}) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{n_1,1} & \dots & \mathcal{D}_{n_1,N_b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{D}_{n_{N_b},1} & \dots & \mathcal{D}_{n_{N_b},N_b} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

для максимальных миноров матрицы $\mathcal{D}$. Отметим, что эти коэффициенты инвариантны относительно перестановки индексов.

Из (2.17) непосредственно следует, что условие

$$f_{n_1, \dots, n_{N_b}} \geq 0, \quad 1 \leq n_1 < \dots < n_{N_b} \leq \mathcal{N}, \quad (2.20)$$

достаточно [13] для регулярности потенциала $u(x)$, т. е. для отсутствия нулей функции $\tau(x)$ на плоскости (x_1, x_2) . В силу (2.1), (2.11) и (2.18) это условие эквивалентно

тому, что все максимальные миноры матрицы $\mathcal{D}$ неотрицательны. В работе [12] отмечалось, что условие (2.20) также необходимо для регулярности потенциала при эволюции по произвольному числу высших времен иерархии КП. В работе [13] было предложено разбить солитонные решения уравнения КП-II на подклассы, ассоциированные с ячейками Шуберта на грассманиане, и доказано, что условие (2.20) необходимо для регулярности всех решений, ассоциированных с одной ячейкой. Однако проблема нахождения условий, необходимых для регулярности многосолитонного решения при эволюции только по одному времени, отвечающему уравнению КП-II, все еще открыта.

Если матрица $\mathcal{D}$ может быть выбрана, как в (2.16), то, вводя новую $(N_a \times N_b)$ -матрицу $\tilde{d}$ с элементами

$$\tilde{d}_{n,l} = d_{N_a+1-n,l}(-1)^{l+1}, \quad n = 1, \dots, N_a, \quad l = 1, \dots, N_b,$$

мы легко получаем с учетом (2.19), что

$$\mathcal{D}(n_1, \dots, n_{N_b}) = \det \|\tilde{d}_{n_i,l}\|, \\ i = 1, \dots, k, \quad l = 1, \dots, N_b, \quad l \neq n_j - N_a, \quad j = k+1, \dots, N_b,$$

где номер k , $1 \leq k \leq N_b$, определяется условием $n_k \leq N_a < n_{k+1}$. Это доказывает, что если мы налагаем условие (2.20) на коэффициенты $f_{n_1, \dots, n_{N_b}}$, то $\tilde{d}$ – совершенно неотрицательная (положительная, если все неравенства в (2.20) строгие) матрица [16], [17].

Для дальнейших рассуждений удобно продолжить индексы величин κ_n , $f_{n_1, \dots, n_{N_b}}$ и пр. периодически по $\mathcal{N}$ на всё $\mathbb{Z}$ условием

$$n \longrightarrow n \pmod{\mathcal{N}}. \quad (2.21)$$

Тогда равенство (2.17) можно записать в виде

$$\tau(x) = \sum_{n \leq n_1 < \dots < n_{N_b} \leq \mathcal{N}+n-1} f_{n_1, \dots, n_{N_b}} \prod_{l=1}^{N_b} e^{K_{n_l}(x)}, \quad (2.22)$$

где правая часть не зависит от n , а коэффициенты $f_{n_1, \dots, n_{N_b}}$ определены по формуле (2.18) с учетом (2.21). Благодаря (2.1) и (2.21) мы можем доказать следующую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть

$$g_{l,m,n} = (\kappa_l - \kappa_m)(\kappa_n - \kappa_{n+N_b})(\kappa_l + \kappa_m - \kappa_n - \kappa_{n+N_b}). \quad (2.23)$$

Тогда

$$g_{l,m,n} \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad l = n, \dots, n + N_b, \quad m = n + N_b, \dots, \mathcal{N} + n, \quad (2.24)$$

причем равенство имеет место только тогда, когда l и m независимо принимают значения n или $n + N_b$ по модулю $\mathcal{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.21) достаточно доказать лемму для $n = 1, \dots, \mathcal{N}$. Для этих значений n параметры κ_n упорядочены, как в (2.1). Для других значений упорядочение получается за счет перехода по формуле (2.21) к значениям, принадлежащим интервалу $1 \leq n \leq \mathcal{N}$. Итак, если $n = 1, \dots, N_a$, то n , $n + N_b$ и l не превосходят $\mathcal{N}$ (см. (1.6)), но вместо интервала $n + N_b \leq m \leq \mathcal{N} + n$, данного в (2.24), мы имеем два интервала: $n + N_b \leq m \leq \mathcal{N}$ и $1 \leq m \leq n$. Тогда для данных значений n , l при значениях m , лежащих в первом интервале, утверждение леммы выполнено, поскольку первый множитель в (2.23) неположителен, второй отрицателен, а третий неотрицателен. Первый множитель может быть равен нулю только при $l = m$, и тогда $l = m = n + N_b$, а третий множитель равен нулю только при $l = n$ и $m = n + N_b$ (все равенства по модулю $\mathcal{N}$). Для m , лежащих во втором интервале, первый множитель неотрицателен (равен нулю только при $l = m = n \pmod{\mathcal{N}}$), второй множитель отрицателен, а третий множитель неположителен (равен нулю только при $l = n + N_b$ и $m = n$). В интервале значений $N_a + 1 \leq n \leq \mathcal{N}$ мы имеем с учетом (2.21) $\kappa_{n+N_b} = \kappa_{n-N_a}$, так что снова n и $n - N_a$ принадлежат интервалу $1, \dots, \mathcal{N}$. Теперь интервал значений $n \leq l \leq n + N_b$, данный в (2.24), распадается на два интервала $n \leq l \leq \mathcal{N}$ и $1 \leq l \leq n - N_a$, в то время как $m = n - N_a, \dots, n$, так что m положительно и меньше $\mathcal{N}$. Тогда для этих значений n , m при значениях l , лежащих в первом интервале, благодаря (2.1) первый множитель в (2.23) неотрицателен (равен нулю только при $l = m = n \pmod{\mathcal{N}}$), второй множитель положителен, а третий неотрицателен (равен нулю только при $l = n$ и $m = n + N_b$). В случае второго интервала значений l первый множитель неположителен (равен нулю только при $l = m = n - N_a = n + N_b \pmod{\mathcal{N}}$), второй положителен, а третий неположителен (равен нулю только при $l = n - N_a = n + N_b \pmod{\mathcal{N}}$ и $m = n$). Лемма доказана.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТАУ-ФУНКЦИИ И ПОТЕНЦИАЛА $u(x)$

Здесь мы рассмотрим асимптотическое поведение функции $\tau(x)$, которое в силу (2.17) определено соотношениями между функциями $K_n(x)$ при различных n . Вследствие (2.2) мы имеем

$$K_l(x) - K_m(x) = (\kappa_l - \kappa_m)(x_1 + (\kappa_l + \kappa_m)x_2) \quad (3.1)$$

для любых $l, m \in \mathbb{Z}$, т. е. эти разности линейны по пространственным переменным, поэтому асимптотическое поведение должно иметь секторную структуру на плоскости (x_1, x_2) . Для описания этой структуры введем лучи

$$r_n = \{x: x_1 + (\kappa_{n+N_b} + \kappa_n)x_2 = 0, (\kappa_{n+N_b} - \kappa_n)x_2 < 0\}, \quad n = 1, \dots, \mathcal{N}, \quad (3.2)$$

которые пересекают линии $x_2 = 1$ и $x_2 = -1$ в точках $(\kappa_{n+N_b} + \kappa_n, -1)$, $n = 1, \dots, N_a$, и в точках $(-\kappa_{n+N_b} - \kappa_n, 1)$, $n = N_a + 1, \dots, \mathcal{N}$, соответственно. В силу (2.1) и (2.21) мы имеем $\kappa_{n+N_b} - \kappa_n > 0$ при $n = 1, \dots, N_a$ и $\kappa_{n+N_b} - \kappa_n < 0$ при $n = N_a + 1, \dots, \mathcal{N}$, а потому при возрастании n от 1 до N_a луч вращается против часовой стрелки в нижней полуплоскости плоскости (x_1, x_2) , пересекает положительную часть оси x_1 при подходе к $n = N_a + 1$, а затем вращается против часовой стрелки в верхней полуплоскости плоскости (x_1, x_2) до $n = \mathcal{N}$ и, наконец, пересекая отрицательную часть оси x_1 , при $n = \mathcal{N} + 1$ опять возвращается в луч r_1 в силу (2.21).

Секторы σ_n , соответствующие $N_a + 2 \leq n \leq \mathcal{N}$.

Допустим, что некоторые лучи, скажем r_m и r_n , где для определенности $m < n$, параллельны. По определению (3.2) это означает, что $\kappa_{m+N_b} + \kappa_m = \kappa_{n+N_b} + \kappa_n$, т. е. $\kappa_n - \kappa_m = \kappa_{m+N_b} - \kappa_{n+N_b}$, где левая часть равенства положительна по формуле (2.1). Тогда в силу (2.21) легко видеть, что правая часть может быть положительна, только если $1 \leq m \leq N_a < n \leq \mathcal{N}$, так что вследствие определения (3.2) луч r_m лежит в нижней полуплоскости, а луч r_n – в верхней. Итак, лучи могут быть параллельны, только если они принадлежат различным полуплоскостям, но в случае $N_a \neq N_b$ это возможно только при специальном выборе параметров κ_n . Напротив, в случае $N_a = N_b$ все пары r_n и r_{n+N_a} , $n = 1, \dots, N_a$, и только эти пары дают параллельные лучи. В частном случае $N_a = N_b = 1$ мы имеем два луча, дающих прямую линию $x_1 + (\kappa_1 + \kappa_2)x_2 = 0$, делящую плоскость (x_1, x_2) на две полуплоскости.

Теперь мы вводим секторы σ_n на плоскости (x_1, x_2) :

$$\sigma_n = \{x: K_{n-1}(x) < K_{n+N_b-1}(x), K_n(x) > K_{n+N_b}(x)\}, \quad n = 1, \dots, \mathcal{N}. \quad (3.3)$$

В силу (3.1) и предыдущего обсуждения σ_n являются секторами с острыми (при $\mathcal{N} > 2$) углами и вершинами в начале координат; они ограничены справа (если смотреть из начала координат) лучом r_{n-1} и слева лучом r_n . С ростом n секторы σ_n упорядочены против часовой стрелки, начиная “слева” с сектора σ_1 , включающего отрицательную часть оси x_1 , затем следуют секторы σ_n , $n = 2, \dots, N_a$, в нижней полуплоскости, сектор σ_{N_a+1} “справа”, включающий положительную часть оси x_1 , и секторы σ_n , $n = N_a + 2, \dots, \mathcal{N}$, в верхней полуплоскости, заканчивающиеся сектором $\sigma_{\mathcal{N}}$, касательным сектору σ_1 (см. рисунок). Таким образом, указанные секторы покрывают образом всю плоскость (x_1, x_2) за исключением ограничивающих лучей r_n . Поэтому секторы σ_n определяют разбиение кругового угла в начале координат на $\mathcal{N}$ частей, причем n играет роль дискретной угловой переменной. Очевидно, что при анализе асимптотического поведения тау-функции мы рассматриваем плоскость (x_1, x_2) как векторное пространство, поскольку при $x \rightarrow \infty$ существенны только направления вектора $x = (x_1, x_2)$. Для фиксации направлений лучей r_n и секторов σ_n мы вводим векторы

$$y_n = (\kappa_{n+N_b}^2 - \kappa_n^2, \kappa_n - \kappa_{n+N_b}), \quad n = 1, \dots, \mathcal{N}, \quad (3.4)$$

позволяющие дать следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что $x \rightarrow \infty$ *вдоль луча* r_n , если $x \rightarrow \infty$ и существует такая функция $\alpha(x) \rightarrow +\infty$, что вектор $x - \alpha(x)y_n$ ограничен. Это будет обозначаться как $x \xrightarrow{r_n} \infty$.

Будем говорить, что $x \rightarrow \infty$ *в секторе* σ_n , если $x \rightarrow \infty$ и существуют такие функции $\alpha(x) \rightarrow +\infty$ и $\beta(x) \rightarrow +\infty$, что вектор $x - \alpha(x)y_{n-1} - \beta(x)y_n$ ограничен. Это будет обозначаться как $x \xrightarrow{\sigma_n} \infty$.

Отметим, что при $x \xrightarrow{r_n} \infty$ разность $K_n(x) - K_{n+N_b}(x)$ ограничена, а также $(\kappa_{n+N_b} - \kappa_n)x_2 \rightarrow -\infty$, а при $x \xrightarrow{\sigma_n} \infty$ мы имеем $K_{n+N_b-1}(x) - K_{n-1}(x) \rightarrow +\infty$ и $K_n(x) - K_{n+N_b}(x) \rightarrow +\infty$, что вытекает непосредственно из определения. На самом деле, можно доказать более общее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть $N_a, N_b \geq 1$ и $n \in \mathbb{Z}$ произвольно. Тогда:

1) если $x \xrightarrow{r_n} \infty$, то $K_l(x) - K_m(x)$ либо стремится к $+\infty$, либо ограничено при любых $l = n, \dots, n + N_b$ и $m = n + N_b, \dots, \mathcal{N} + n$, причем ограниченность имеет место тогда и только тогда, когда пара индексов (l, m) принимает значения (n, n) , $(n, n + N_b)$, $(n + N_b, n)$, $(n + N_b, n + N_b)$;

2) если $x \xrightarrow{\sigma_n} \infty$, то $K_l(x) - K_m(x) \rightarrow +\infty$ для любых $l = n, \dots, n + N_b - 1$ и $m = n + N_b, \dots, \mathcal{N} + n - 1$, где суммирование в индексах всегда понимается по модулю $\mathcal{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие (3.1) и (3.4) имеем $K_l(y_n) - K_m(y_n) = g_{l,m,n}$. Тогда первое утверждение леммы следует непосредственно из определения и леммы 1. Аналогично получаем, что $K_l(x) - K_m(x) = \alpha g_{l,m,n-1} + \beta g_{l,m,n}$ при подстановке $x = \alpha y_{n-1} + \beta y_n$. Тогда второе утверждение леммы следует из второго утверждения леммы 1, в то время как интервалы для l и m появляются как пересечения соответствующих интервалов в (2.24) для n и $n \rightarrow n - 1$. Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Асимптотическое поведение функции $\tau(x)$ при $x \rightarrow \infty$ задается следующими соотношениями:

$$x \xrightarrow{r_n} \infty : \quad \tau(x) = (z_n + z_{n+1} e^{K_{N_b+n}(x) - K_n(x)} + o(1)) \exp \left(\sum_{j=n}^{n+N_b-1} K_j(x) \right), \quad (3.5)$$

$$x \xrightarrow{\sigma_n} \infty : \quad \tau(x) = (z_n + o(1)) \exp \left(\sum_{l=n}^{n+N_b-1} K_l(x) \right) \quad (3.6)$$

для любого $n \in \mathbb{Z}$, где коэффициенты z_n определены как

$$z_n = f_{n, \dots, n+N_b-1} \equiv V(\kappa_n, \dots, \kappa_{n+N_b-1}) \mathcal{D}(n, \dots, n + N_b - 1) \quad (3.7)$$

(ср. (2.18)). При этом члены $o(1)$ убывают экспоненциально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя представление (2.22), можно записать

$$\begin{aligned} \exp \left(- \sum_{l=n}^{n+N_b-1} K_l(x) \right) \tau(x) &= \\ &= \sum_{n \leq n_1 < \dots < n_{N_b} \leq \mathcal{N} + n - 1} f_{n_1, \dots, n_{N_b}} \exp \left(\sum_{j=1}^{N_b} K_{n_j}(x) - \sum_{l=n}^{n+N_b-1} K_l(x) \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала асимптотику при $x \xrightarrow{\sigma_n} \infty$. Тогда каждый член $K_{n_j}(x)$ либо сокращается с некоторым членом в последней сумме, когда $n_j = l \pmod{\mathcal{N}}$, где некоторый индекс l принадлежит интервалу $\{n, \dots, n + N_b - 1\}$ (т. е. интервалу для индекса l во втором утверждении леммы 2), либо индекс n_j принадлежит интервалу $\{n + N_b, \dots, \mathcal{N} + n - 1\}$. Тогда по лемме 2 все эти показатели на бесконечности отрицательны за единственным исключением $\{n_1, \dots, n_{N_b}\} = \{n, \dots, n + N_b - 1\} \pmod{\mathcal{N}}$. Это доказывает (3.6). Доказательство асимптотики (3.5) проводится аналогично, с единственным отличием, что используется первое утверждение леммы 2. Утверждение об асимптотическом поведении членов типа $o(1)$ очевидно по построению. Теорема доказана.

Как видно из соотношений (3.5) и (3.6), лидирующее асимптотическое поведение фиксируется этой теоремой, только если

$$z_n > 0, \quad n = 1, \dots, \mathcal{N}. \quad (3.8)$$

Это условие достаточно для регулярности потенциала при больших x , но конкретные примеры показывают, что оно недостаточно для регулярности потенциала на всей плоскости (x_1, x_2) . Мы видим также, что асимптотика вдоль луча r_n дается суммой лидирующих членов, полученных для $x \xrightarrow{\sigma_n} \infty$ и $x \xrightarrow{\sigma_{n+1}} \infty$. Поскольку экспоненциальный фактор исчезает при подстановке разложения (3.5) для $\tau(x)$ в (2.4), множитель в скобках дает поведение потенциала $u(x)$ на бесконечности вдоль лучей. Итак, если наложено условие (3.8), то потенциал $u(x)$ имеет в точности $\mathcal{N}$ лучей r_n , дающих нетривиальное асимптотическое поведение односолитонного потенциала (ср. с потенциалом (1.4)) с параметрами κ_n и κ_{n+N_b} . Принимая во внимание (2.21), мы получаем в явном виде следующую структуру лучей и асимптотическое поведение вдоль лучей: если $x_2 \rightarrow -\infty$, $x_1 + (\kappa_n + \kappa_{n+N_b})x_2$ ограничено, то

$$u(x) \cong -2\partial_{x_1}^2 \ln(z_n + z_{n+1}e^{K_{n+N_b}(x) - K_n(x)}), \quad n = 1, \dots, N_a; \quad (3.9)$$

если $x_2 \rightarrow +\infty$, $x_1 + (\kappa_n + \kappa_{n+N_a})x_2$ ограничено, то

$$u(x) \cong -2\partial_{x_1}^2 \ln(z_{n+N_a} + z_{n+N_a+1}e^{K_n(x) - K_{n+N_a}(x)}), \quad n = 1, \dots, N_b, \quad (3.10)$$

т. е. мы имеем N_a асимптотических лучей в нижней полуплоскости и N_b лучей в верхней полуплоскости. Асимптотическое поведение внутри секторов σ_n дается соотношением (3.6), где единственный зависящий от x член – это экспоненциальный множитель. Принимая во внимание его линейную зависимость от x и условие (3.8), получаем, что $u(x)$ экспоненциально убывает по всем направлениям во всех секторах.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Полученное в настоящей работе асимптотическое поведение тау-функции и потенциала основано на условии (3.8), допускающем обращение в ноль или отрицательные значения для коэффициентов в (2.17), отличных от z_n (см. (3.7)). Используя условие (3.8), мы смогли найти, что направления лучей в явном виде даются суммами $\kappa_n + \kappa_{n+N_b}$ при $n = 1, \dots, \mathcal{N}$ и вывести точное асимптотическое поведение тау-функций на плоскости (x_1, x_2) . Отметим, что аналогичный результат был

получен в работе [18] для очень специального подкласса солитонных потенциалов, задаваемых матрицей $\mathcal{D}$ в (2.5), равной произведению диагональной матрицы на матрицу, транспонированную к $\mathcal{V}$. Как было отмечено выше, условие (3.8), в противоположность (2.20), не гарантирует отсутствие сингулярностей потенциала $u(x)$. Но формулы (3.5) и (3.6) доказывают, что в силу (3.8) сингулярности потенциала (2.4) не могут появиться в асимптотике, поскольку внутри секторов потенциал $u(x)$ стремится к нулю, а вдоль лучей r_n он ведет себя в соответствии с (3.9) и (3.10) и также конечен в силу (3.8). Подчеркнем, что параметры N_a и N_b , которые задают числа лучей тау-функции и потенциала в соответственно нижней и верхней полуплоскостях, появились в работе [10] как числа полюсов решения Йоста и дуального решения Йоста. И, наконец, отметим, что доказанная в настоящей работе теорема также верна, когда все неравенства в условии регулярности (2.20) являются строгими, т. е. все максимальные миноры матрицы $\mathcal{D}$ положительны, поскольку это условие сильнее, чем (3.8), которое было достаточно для доказательства теоремы.

Благодарности. Работа частично поддержана РФФИ (гранты № 08-01-00501, 09-01-92433-КЭ), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-8265.2010.1), Программой РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”, INFN (грант PRIN 2008 “Geometrical methods in the theory of nonlinear integrable systems”) и Консорциумом E.I.N.S.T.E.I.N. А. К. Погребков благодарит факультет физики Университета Саленто (Лечче) за гостеприимство.

Список литературы

- [1] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, *Докл. АН СССР*, **192** (1970), 753–756.
- [2] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53.
- [3] В. С. Дрюма, *Письма в ЖЭТФ*, **19**:12 (1974), 753–755.
- [4] M. J. Ablowitz, D. Bar Yaacov, A. S. Fokas, *Stud. Appl. Math.*, **69**:2 (1983), 135–143.
- [5] В. Д. Липовский, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:4 (1986), 35–45.
- [6] M. V. Wickerhauser, *Comm. Math. Phys.*, **108**:1 (1987), 67–89.
- [7] П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:1 (1988), 23–33.
- [8] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, *J. Math. Phys.*, **47**:12 (2006), 123510, 43 pp.
- [9] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, B. Prinari, *J. Math. Phys.*, **43**:2 (2002), 1044–1062.
- [10] М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, Б. Принари, *ТМФ*, **159**:3 (2009), 364–378, arXiv:0901.3857.
- [11] M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov, B. Prinari, *Inverse Problems*, **17**:4 (2001), 937–957.
- [12] М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, Б. Принари, *ТМФ*, **165**:1 (2010), 3–24, arXiv:0911.1675.
- [13] Y. Kodama, *J. Phys. A*, **43**:43 (2010), 434004, 54 pp., arXiv:1004.4607.
- [14] G. Biondini, S. Chakravarty, *Math. Comput. Simulation*, **74**:2–3 (2007), 237–250.
- [15] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.
- [16] T. Ando, *Linear Algebra Appl.*, **90** (1987), 165–219.
- [17] Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, *Осцилляционные матрицы и ядра, и малые колебания механических систем*, ГТТИ, М., Л., 1950.
- [18] G. Biondini, Y. Kodama, *J. Phys. A*, **36**:42 (2003), 10519–10536, arXiv:nlin/0306003.