Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Брузон, М. Л. Гандариас, Классические и неклассические симметрии уравнения Кричевера–Новикова, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 1, 24–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6661>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:35:52

© 2011 г.

М. С. Брузон*, М. Л. Гандариас*

КЛАССИЧЕСКИЕ И НЕКЛАССИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ КРИЧЕВЕРА–НОВИКОВА

Уравнение Кричевера–Новикова исследуется с точки зрения теории симметричных редукций дифференциальных уравнений в частных производных. Получена классификация групп Ли. Кроме того, получены некоторые точные решения и применен неклассический метод.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, симметрии, точные решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] представлен список интегрируемых уравнений вида

$$u_t = u_{xxx} + f(x, u_x, u_{xx}).$$

В работе [2] завершена классификация скалярных квазилинейных интегрируемых эволюционных уравнений третьего порядка, включающих так называемое уравнение Кричевера–Новикова (КН)

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2} \frac{u_{xx}^2}{u_x} + \frac{1}{u_x} + au_x - \frac{3}{2} \mathcal{P}(u)u_x^3. \quad (1)$$

В работе [3] рассматривались симметрии низших порядков квазилинейных эволюционных уравнений третьего порядка, а в работе [4] исследовались преобразования Беклунда для уравнения КН вида

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2} \frac{u_{xx}^2}{u_x} + \frac{f(u)}{u_x} + au_x. \quad (2)$$

Это уравнение при $f(u) = 4u^3 + bu + c$, где $a, b, c \in \mathbb{C}$, появилось в работе [5] в связи с исследованием конечнозонных решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили. В работе [6] описаны зависящие от u, u_x, u_{xx}, u_{xxx} структуры продолжения Вальквиста–Эстабрука для уравнения (2) в случае, когда $f(u)$ – многочлен без кратных

*Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, Cádiz, Spain.
E-mail: matematicas.casem@uca.es, marialuz.gandarias@uca.es

корней, $f(u) = 4u^3 + bu + c$. В работе [7] выведена формула для решения уравнения КН с помощью последовательной мультипотенциализации. В работах [1], [8] изучались законы сохранения и интегрируемость этого уравнения, а в работе [9] представлена пара Лакса для уравнения (2) и рассмотрен его эллиптический вид.

Не существует общего метода решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Классический метод нахождения симметричных редукций ДУЧП – это метод групп Ли [10]–[14]. Фундаментальная основа данного метода состоит в том, что если дифференциальное уравнение инвариантно относительно некоторой группы Ли преобразований, то существует преобразование редукции. Для ДУЧП с двумя независимыми переменными одна групповая редукция преобразует ДУЧП в обыкновенные дифференциальные уравнения, которые, вообще говоря, легче решить. Поскольку при этом вычисления обычно достаточно объемны, их целесообразно выполнять с помощью компьютерных программ символьных вычислений. В нашей работе мы используем программу `MAXIMA symmgrp2009.max`, созданную Хереманом. Большую часть необходимых теоретических сведений и описание метода можно найти в работах [11], [12].

Исходя из того что симметричные редукции для многих ДУЧП нельзя получить, используя классические симметрии, было предложено несколько обобщений классического метода групп Ли для симметричных редукций. Неклассический метод впервые был введен в работе [13] при исследовании симметричных редукций уравнения теплопроводности. Описание данного метода можно найти в [13], [14].

В настоящей работе мы с точки зрения теории симметричных редукций ДУЧП изучаем уравнение (2), в котором u – функция двух вещественных переменных x, t , а $f(u)$ – произвольная аналитическая функция переменной u . С использованием указанной теории мы находим, что для уравнения КН некоторые решения подобия являются решениями, представляющими физический интерес.

Структура настоящей работы следующая. В разделе 2 мы рассматриваем симметрии Ли уравнения КН, его алгебру Ли, а также соответствующую оптимальную систему. Мы также представляем результаты, касающиеся редукции, которая получается из оптимальной системы подалгебр. Эти уравнения допускают симметрии, приводящие к дальнейшим редукциям. В разделе 3 для нахождения дополнительных редукций мы применяем к уравнению (2) неклассический метод.

2. КЛАССИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ

Чтобы применить к уравнению (2) классический метод Ли, рассмотрим однопараметрическую группу Ли инфинитезимальных преобразований по переменным (x, t, u) :

$$\begin{aligned}x^* &= x + \epsilon \xi(x, t, u) + O(\epsilon^2), \\t^* &= t + \epsilon \tau(x, t, u) + O(\epsilon^2), \\u^* &= u + \epsilon \eta(x, t, u) + O(\epsilon^2),\end{aligned}$$

где ϵ – параметр группы. Потребуем, чтобы множество решений уравнения (2) было инвариантно относительно этого преобразования. Инвариантность уравнения (2) относительно действия групп Ли точечных преобразований приводит к следующей

системе из девяти определяющих уравнений:

$$\begin{aligned} \tau_u = 0, \quad \tau_x = 0, \quad \xi_u = 0, \quad \eta_x = 0, \quad \eta_{uuu} = 0, \quad \eta_t = 0, \\ \tau_u - 3\xi_x = 0, \quad -\xi_{xxx} + 2a\xi_x + \xi_t = 0, \quad 2f\eta_u - f_u\eta - 4\xi_x f = 0. \end{aligned}$$

Из этой системы получаем, что $\xi = \xi(x, t)$, $\tau = \tau(t)$, причем функции ξ , τ , η и f связаны следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \xi_{xxx} - 2a\xi_x - \xi_t = 0, \quad \tau_t - 3\xi_x = 0, \\ 2f\eta_u - f_u\eta - 4\xi_x f = 0, \quad \eta_{uuu} = 0. \end{aligned}$$

Из этой системы получаем, что

$$\xi = \frac{k_3}{3}(x - 2at) + k_1, \quad \tau = k_3t + k_2, \quad \eta = k_4u^2 + k_5u + k_6, \quad (3)$$

функция f должна удовлетворять уравнению

$$3f_uk_4u^2 + 3f_uk_5u - 12fk_4u + 3f_uk_6 - 6fk_5 + 4fk_3 = 0. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 1 (групповая классификационная теорема). *Группа точечных симметрий Ли уравнения КН (2) с произвольной функцией $f(u)$ определяется операторами*

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = \partial_t. \quad (5)$$

При некотором специальном выборе функции $f(u)$ группу Ли можно продолжить. Выпишем только генераторы, дополнительные к (5).

1. Если $f = 0$, то дополнительные генераторы суть $\mathbf{v}_3 = (x - 2at)\partial_x + 3t\partial_t$, $\mathbf{v}_4 = \partial_u$, $\mathbf{v}_5 = u\partial_u$, $\mathbf{v}_6 = u^2\partial_u$.

2. Если $f = c$, где c – константа, $c \neq 0$, то дополнительные генераторы суть $\mathbf{v}_3^1 = (x - 2at)\partial_x + 3t\partial_t + 2u\partial_u$ и $\mathbf{v}_4$.

3. Если $f = cu^2$, то дополнительный генератор есть $\mathbf{v}_5$.

4. Если $f = cu^4$, то дополнительные генераторы суть $\mathbf{v}_3^2 = (x - 2at)\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial_u$ и $\mathbf{v}_6$.

5. Если $f = ce^{-4u}$, дополнительный генератор есть $\mathbf{v}_3^3 = (x - 2at)\partial_x + 3t\partial_t + \partial_u$.

6. Если $f = c(u^2 + u + 1)^2 \exp\left\{-\frac{8}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$, то дополнительный генератор есть $\mathbf{v}_3^4 = (x - 2at)\partial_x + 3t\partial_t + (u^2 + u + 1)\partial_u$.

7. Если $f = u^n$, $n \neq 2, 4$, дополнительный генератор есть $\mathbf{v}_3^5 = (x - 2at)\partial_x + 3t\partial_t - 4/(n - 2) \cdot u\partial_u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f – произвольная функция, то для выполнения уравнения (4) необходимо, чтобы $k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 0$. Тогда из соотношения (3) получаем, что $\xi = k_1$, $\tau = k_2$ и $\phi = 0$. При этом симметрия порождается группой трансляций по x и t . В других случаях симметрии получаются в результате подстановки заданных в теореме функций в уравнение (4) и решения получающегося уравнения.

2.1. Оптимальная система. Как хорошо известно, теоретический метод, основанный на группах Ли, играет важную роль при нахождении точных решений и симметрийных редукций дифференциальных уравнений. Поскольку любая линейная комбинация инфинитезимальных генераторов также является инфинитезимальным генератором, всегда существуют бесконечно много различных подгрупп симметрии для дифференциального уравнения. Таким образом, требуется средство, позволяющее определять, какие подгруппы приводят к существенно различным типам решений; такое средство важно для полного понимания инвариантных решений. Любое преобразование из полной группы симметрии переводит решение в решение, поэтому достаточно найти инвариантные решения, которые не связаны преобразованиями из полной группы симметрии. Это приводит к концепции оптимальной системы [11]. Для получения оптимальной системы для уравнения (2) выпишем ненулевые скобки Ли.

ТЕОРЕМА 2. *Ненулевые скобки Ли алгебры Ли $\mathcal{G}$ для уравнения (2) имеют следующий вид.*

1. При $f = 0$

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3] &= \mathbf{v}_1, & [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] &= -2a\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2, & [\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5] &= \mathbf{v}_4, \\ [\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_6] &= 2\mathbf{v}_5, & [\mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6] &= \mathbf{v}_6, & [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1] &= -\mathbf{v}_1, \\ [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2] &= 2a\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2, & [\mathbf{v}_5, \mathbf{v}_4] &= -\mathbf{v}_4, & [\mathbf{v}_6, \mathbf{v}_4] &= -2\mathbf{v}_5, & [\mathbf{v}_6, \mathbf{v}_5] &= -\mathbf{v}_6. \end{aligned}$$

2. При $f = c \neq 0$,

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3^1] &= \mathbf{v}_1, & [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3^1] &= -2a\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2, & [\mathbf{v}_3^1, \mathbf{v}_4] &= -2\mathbf{v}_4, \\ [\mathbf{v}_3^1, \mathbf{v}_1] &= -\mathbf{v}_1, & [\mathbf{v}_3^1, \mathbf{v}_2] &= 2a\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2, & [\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_3^1] &= 2\mathbf{v}_4. \end{aligned}$$

3. При $f = cu^4$

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3^2] &= \mathbf{v}_1, & [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3^2] &= -2a\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2, & [\mathbf{v}_3^2, \mathbf{v}_6] &= -2\mathbf{v}_6, \\ [\mathbf{v}_3^2, \mathbf{v}_1] &= -\mathbf{v}_1, & [\mathbf{v}_3^2, \mathbf{v}_2] &= 2a\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2, & [\mathbf{v}_6, \mathbf{v}_3^2] &= 2\mathbf{v}_6. \end{aligned}$$

4. При $f = ce^{-4u}$

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3^3] &= \mathbf{v}_1, & [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3^3] &= -2a\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2, \\ [\mathbf{v}_3^3, \mathbf{v}_1] &= -\mathbf{v}_1, & [\mathbf{v}_3^3, \mathbf{v}_2] &= 2a\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

5. При $f = c(u^2 + u + 1)^2 \exp\left\{-\frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3^4] &= \mathbf{v}_1, & [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3^4] &= -2a\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2, \\ [\mathbf{v}_3^4, \mathbf{v}_1] &= -\mathbf{v}_1, & [\mathbf{v}_3^4, \mathbf{v}_2] &= 2a\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Скобки Ли получаются из соотношения

$$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = \mathbf{v}_i(\mathbf{v}_j) - \mathbf{v}_j(\mathbf{v}_i).$$

ТЕОРЕМА 3. Присоединенное действие алгебры Ли $\mathcal{G}$ для уравнения (2) имеет следующий вид.

1. При $f = 0$

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_3) &= \mathbf{v}_3 - \epsilon \mathbf{v}_1, & \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_3) &= \mathbf{v}_3 + 2\epsilon \mathbf{v}_1 - 3\epsilon \mathbf{v}_2, \\ \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_4) \mathbf{v}_5) &= \mathbf{v}_5 - \epsilon \mathbf{v}_4, & \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_4) \mathbf{v}_6) &= \mathbf{v}_6 - 2\epsilon \mathbf{v}_5 + \epsilon^2 \mathbf{v}_4, \\ \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_5) \mathbf{v}_6) &= e^{-\epsilon} \mathbf{v}_6, & \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_1) &= e^{\epsilon} \mathbf{v}_1, \\ \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_5) \mathbf{v}_4) &= e^{\epsilon} \mathbf{v}_4, & \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_6) \mathbf{v}_4) &= \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5(e^{2\epsilon} - 1), \\ & \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_6) \mathbf{v}_5) &= \mathbf{v}_5 + \epsilon \mathbf{v}_6, \\ \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_2 e^{3\epsilon} - 2a \mathbf{v}_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} \sum_{k=0}^{m-1} 3^k. \end{aligned}$$

2. При $f = c$

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_3^1) &= \mathbf{v}_3^1 - \epsilon \mathbf{v}_1, & \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_3^1) &= \mathbf{v}_3^1 + 2a\epsilon \mathbf{v}_1 - 3\epsilon \mathbf{v}_2, \\ \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_4) &= e^{2\epsilon} \mathbf{v}_4, & \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_1) &= e^{\epsilon} \mathbf{v}_1, \\ & \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_4) \mathbf{v}_3^1) &= \mathbf{v}_3^1 - 2\epsilon \mathbf{v}_4, \\ \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_2 e^{3\epsilon} - 2a \mathbf{v}_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} \sum_{k=0}^{m-1} 3^k. \end{aligned}$$

3. При $f = cu^2$

$$\text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_j, \quad i, j = 1, 2, 5.$$

4. При $f = cu^4$

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_3^2) &= \mathbf{v}_3^2 - \epsilon \mathbf{v}_1, & \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_3^2) &= \mathbf{v}_3^2 + 2a\epsilon \mathbf{v}_1 - 3\epsilon \mathbf{v}_2, \\ \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_6) &= e^{2\epsilon} \mathbf{v}_6, & \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_1) &= e^{\epsilon} \mathbf{v}_1, \\ & \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_6) \mathbf{v}_3^1) &= \mathbf{v}_3^2 - 2\epsilon \mathbf{v}_6. \\ \text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_2 e^{3\epsilon} - 2a \mathbf{v}_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} \sum_{k=0}^{m-1} 3^k. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Присоединенное действие выражается в виде ряда Ли:

$$\text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_j - \epsilon [\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] + \frac{\epsilon^2}{2} [\mathbf{v}_i, [\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]] - \dots,$$

где $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$, $i, j = 1, \dots, 6$, – коммутатор в алгебре Ли, а ϵ – параметр. Мы приводим случаи, в которых $\text{Ad}(\exp(\epsilon \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_j) \neq \mathbf{v}_j$.

ТЕОРЕМА 4. Одномерная оптимальная система для уравнения (2) имеет вид

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_6, & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, & \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, & \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_5, & & & & & \\ \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_6, & \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, & \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_5, & \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_6, & \mathbf{v}_3^1, & \mathbf{v}_3^2, & \mathbf{v}_3^3, & \mathbf{v}_3^4, & \mathbf{v}_3^5, \end{array}$$

где λ, μ – произвольные действительные числа.

Рис. 1. Решение $u(x, t) = \text{sech}^2(x - t)$ при $t = 0, 2, 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{G}$ – алгебра симметрии уравнения (2) с присоединенным представлением, определенным в теореме 3, а $\mathbf{v} = a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_6 \mathbf{v}_6$ – ненулевое векторное поле, отвечающее $\mathcal{G}$. В каждом случае мы упрощаем насколько возможно коэффициенты a_i , $i = 1, \dots, 6$, путем должного применения присоединенного действия к $\mathbf{v}$.

2.2. Симметричные редукции. Симметричные переменные ищутся путем решения уравнения, определяющего инвариантную поверхность:

$$\xi \partial_x + \tau \partial_t - \eta = 0. \quad (6)$$

РЕДУКЦИЯ 1. Из $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ получаем редукции бегущей волны

$$z = \mu x - \lambda t, \quad u = h(z),$$

где $h(z)$ удовлетворяет уравнению

$$h' h''' - \frac{3}{2} (h'')^2 + \frac{a\mu + \lambda}{\mu^3} (h')^2 + \frac{1}{\mu^4} f = 0. \quad (7)$$

Поскольку производные эллиптических функций Якоби выражаются через сами эти функции, можно выбрать f как алгебраическую функцию переменной h , тогда уравнение (7) имеет эллиптические функции Якоби $\text{sn}^n h$ и $\text{cn}^n h$ в качестве решений. Следовательно, можно получить функцию f , для которой уравнение (2) имеет решения в терминах эллиптических функций Якоби. Например, $u(x, t) = \text{sech}^2(x - t)$ есть решение уравнения (2) при $f(u) = 6u^4 + 4(a - 1)u^3 + 4(1 - a)u^2$. На рис. 1 представлен график данного решения при $t = 0, 2, 4$; он описывает солитонное решение.

РЕДУКЦИЯ 2. При $f = c$ из $\lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$ получаем преобразование

$$z = \mu x - \lambda t, \quad u = h(z) - \frac{1}{\mu} t,$$

где $h(z)$ удовлетворяет уравнению

$$h' h''' - \frac{3}{2} (h'')^2 + \frac{\lambda + a\mu}{\mu^3} (h')^2 + \frac{1}{\mu^4} h' + \frac{c}{\mu^4} = 0.$$

При $g = h'$ это уравнение редуцируется к уравнению

$$g g'' - \frac{3}{2} (g')^2 + \frac{\lambda + a\mu}{\mu^3} g^2 + \frac{1}{\mu^4} g + \frac{c}{\mu^4} = 0. \quad (8)$$

Рис. 2. Функции Уиттекера $M(\mu, \nu, y)$ при $\mu = 2$, $\nu = 1/2$, $\mu = 3$ (пунктир), $\nu = 1/3$ (сплошная линия), $\mu = 4$, $\nu = 1/4$ (штриховая линия).

Мы применяем классический метод Ли к этому уравнению; как можно видеть, он допускает единственную группу, соответствующую оператору $W_1 = \partial_z$. Для новых переменных (инвариантов первого продолжения W_1) $y = h$ и $w = h'$ уравнение (8) принимает вид

$$w' - \frac{3}{2y}w^2 + \frac{\lambda + a\mu}{\mu^3}y + \frac{c}{\mu^4} \frac{1}{y} + \frac{1}{\mu^4} = 0.$$

Это уравнение допускает решения в терминах М-функции Уиттекера [15],

$$M(\mu, \nu, y) = e^{-y/2} y^{\nu+1/2} {}_1F_1(\nu - \mu + 1/2, 2\nu + 1; y).$$

На рис. 2 показаны графики трех элементарных функций Уиттекера $M(2, 1/2, y)$, $M(3, 1/3, y)$ и $M(4, 1/4, y)$.

РЕДУКЦИЯ 3. При $f = 0$ из $\lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_5$ получаем преобразование

$$z = \mu x - \lambda t, \quad u = e^{t/\mu} h(z),$$

где $h(z)$ удовлетворяет уравнению

$$h'h''' - \frac{3}{2}(h'')^2 + \frac{\lambda + a\mu}{\mu^3}(h')^2 - \frac{1}{\mu^4}hh' = 0.$$

РЕДУКЦИЯ 4. При $f = 0$ из $\lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_6$ получаем преобразование

$$z = \mu x - \lambda t, \quad u = -\frac{\mu}{t + h(z)}, \quad (9)$$

где $h(z)$ удовлетворяет уравнению

$$h'h''' - \frac{3}{2}(h'')^2 + \frac{\lambda + a\mu}{\mu^3}(h')^2 - \frac{1}{\mu^3}h' = 0.$$

При $g = h'$ данное уравнение редуцируется к уравнению

$$gg'' - \frac{3}{2}(g')^2 + \frac{\lambda + a\mu}{\mu^3}g^2 - \frac{1}{\mu^3}g = 0,$$

которое имеет решения в терминах эллиптической функции Якоби:

при $a = -(\lambda + 2\mu^3(m+1))/\mu$ решение есть $g(z) = -(1/4\mu^3)\operatorname{sn}^2(z, m)$;

при $a = (2(2m-1)\mu^3 - \lambda)/\mu$ решение есть $g(z) = (1/4\mu^3)\operatorname{cn}^{-2}(z, m)$.

РЕДУКЦИЯ 5. При $f = 0$ из $\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = (x - 2at)\partial_x + 3t\partial_t + \partial_u$ получаем преобразование

$$z = \frac{x + at}{t^{1/3}}, \quad u = \frac{1}{3} \ln t + h(z),$$

где $h(z)$ удовлетворяет уравнению

$$h'h''' - \frac{3}{2}(h'')^2 + \frac{z}{3}(h')^2 - \frac{1}{3}h' = 0.$$

При $g = h'$ данное уравнение редуцируется к уравнению

$$gg'' - \frac{3}{2}(g')^2 + \frac{z}{3}g^2 - \frac{1}{3}g = 0.$$

РЕДУКЦИЯ 6. При $f = 0$ из $\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_5 = (x - 2at)\partial_x + 3t\partial_t + u\partial_u$ получаем преобразование

$$z = \frac{x + at}{t^{1/3}}, \quad u = t^{1/3}h(z),$$

где $h(z)$ удовлетворяет уравнению

$$h'h''' - \frac{3}{2}(h'')^2 + \frac{z}{3}(h')^2 - \frac{1}{3}hh' = 0.$$

РЕДУКЦИЯ 7. При $f = 0$ из $\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_6 = (x - 2at)\partial_x + 3t\partial_t + u^2\partial_u$ получаем преобразование

$$z = \frac{x + at}{t^{1/3}}, \quad u = -\frac{3}{\ln t + h(z)},$$

где $h(z)$ удовлетворяет уравнению

$$h'h''' - \frac{3}{2}(h'')^2 + \frac{z}{3}(h')^2 - h' = 0.$$

При $g = h'$ данное уравнение редуцируется к уравнению

$$gg'' - \frac{3}{2}(g')^2 + \frac{z}{3}g^2 - g = 0.$$

РЕДУКЦИЯ 8. При $f = c$ из $\mathbf{v}_3^1 = (x - 2at)\partial_x + 3t\partial_t + 2u\partial_u$ получаем преобразование

$$z = \frac{x + at}{t^{1/3}}, \quad u = t^{2/3}h(z),$$

где $h(z)$ удовлетворяет уравнению

$$h'h''' - \frac{3}{2}(h'')^2 + \frac{z}{3}(h')^2 - \frac{2}{3}hh' + c = 0.$$

РЕДУКЦИЯ 9. При $f = cu^2$ из $\lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_5 = \partial_x + \partial_t + u\partial_u$ получаем преобразование

$$z = \mu x - \lambda t, \quad u = e^{t/\mu}h(z),$$

где $h(z)$ удовлетворяет уравнению

$$h'h''' - \frac{3}{2}(h'')^2 + \frac{\lambda + a\mu}{\mu^3}(h')^2 + \frac{c}{\mu^4}h^2 - \frac{1}{\mu^4}hh' = 0.$$

РЕДУКЦИЯ 10. При $f = cu^4$ из $\mathbf{v}_3^2 = (x - 2at)\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial_u$ получаем преобразование

$$z = \frac{x + at}{t^{1/3}}, \quad u = t^{-2/3}h(z),$$

где $h(z)$ удовлетворяет уравнению

$$h'h''' - \frac{3}{2}(h'')^2 + \frac{z}{3}(h')^2 + \frac{2}{3}hh' + ch^4 = 0.$$

РЕДУКЦИЯ 11. При $f = ce^{-4u}$ из $\mathbf{v}_3^3 = (x - 2at)\partial_x + 3t\partial_t + \partial_u$ получаем преобразование

$$z = \frac{x + at}{t^{1/3}}, \quad u = \frac{1}{3} \ln t + h(z),$$

где $h(z)$ удовлетворяет уравнению

$$h'h''' - \frac{3}{2}(h'')^2 + \frac{z}{3}(h')^2 - \frac{1}{3}h' + ce^{-4h} = 0.$$

РЕДУКЦИЯ 12. При $f = c(u^2 + u + 1)^2 \exp\left\{-\frac{8}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ из $\mathbf{v}_3^4$ получаем преобразование

$$z = \frac{x + at}{t^{1/3}}, \quad u = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \left(\frac{\ln t}{2\sqrt{3}} + \frac{h}{2\sqrt{3}} \right) - 1 \right),$$

где $h(z)$ удовлетворяет уравнению

$$h'h''' - \frac{3}{2}(h'')^2 + \frac{1}{6}(h')^4 + \frac{z}{3}(h')^2 - h' + 9ce^{-4h/3} = 0.$$

3. НЕКЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД

Основная идея неклассического метода состоит в том, что ДУЧП (2) дополняется уравнением инвариантной поверхности

$$\xi u_x + \tau u_t - \eta = 0, \quad (10)$$

которое связано с векторным полем

$$V = \xi(x, t, u)\partial_x + \tau(x, t, u)\partial_t + \eta(x, t, u)\partial_u. \quad (11)$$

Требование, чтобы и уравнение (2), и уравнение (10) были инвариантны относительно преобразований с инфинитезимальным генератором (11) приводит к переопределенной системе нелинейных уравнений относительно инфинитезимальных элементов $\xi(x, t, u)$, $\tau(x, t, u)$ и $\eta(x, t, u)$. Число определяющих уравнений, возникающих в неклассическом методе, меньше, чем в классическом методе, потому что мы имеем меньше линейно независимых выражений, содержащих производные. Поскольку все решения классических определяющих уравнений с необходимостью удовлетворяют неклассическим определяющим уравнениям, множество решений может в неклассическом случае оказаться больше [16].

В работе [17] был предложен алгоритм вычисления определяющих уравнений, связанный с неклассическим методом: система ДУЧП дополняется уравнениями инвариантной поверхности, неклассические симметрии ищутся как классические симметрии расширенной системы при дополнительном условии, чтобы оператор симметрий был связан с уравнением инвариантной поверхности. В работе [18] это требование было отброшено. Развита в [18] процедура состоит в редуцировании дополненной системы ДУЧП к инволютивному виду, а затем в применении классического метода Ли к редуцированному ДУЧП, но с произвольным оператором симметрии, который больше не связан с уравнением инвариантной поверхности. В работе [19] описанный в [18] алгоритм поиска неклассических симметрий ДУЧП распространен на определенный частный случай. Было замечено, что для любого уравнения, которое можно записать в виде $u_t = \mathcal{A}(x, t, u)$, $u_{tt} = \mathcal{A}(x, t, u)$ или

$\mathcal{A}(x, y, t, u)u_y + u_{ty} + \mathcal{B}(x, y, t, u) = 0$, неклассические определяющие уравнения можно вывести путем подстановки соответствующих функций $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, приведенных в работе [19].

Чтобы применить неклассический метод к уравнению (2), потребуем, чтобы и уравнение (2), и уравнение поверхности (10) были инвариантны относительно инфинитезимального генератора (11). Можно выделить два случая: $\tau \neq 0$ и $\tau = 0$.

Применим описанный в работе [18] алгоритм к случаю $\tau \neq 0$. Без потери общности можно положить $\tau = 1$. Подставляя уравнение инвариантной поверхности $u_t = \eta - \xi u_x$ в (2), переписываем (2) в эквивалентном виде

$$u_{xxx} - \frac{3}{2} \frac{u_{xx}^2}{u_x} + \frac{f(u)}{u_x} + \mathcal{A}(x, t, u)u_x + \mathcal{B}(x, t, u) = 0, \quad (12)$$

где $\mathcal{A} = a + \xi$ и $\mathcal{B} = -\eta$. Применим классический метод Ли к данному уравнению. Потребуем, чтобы инфинитезимальный генератор

$$X = \xi_1(x, t, u)\partial_x + \xi_2(x, t, u)\partial_t + \phi(x, t, u)\partial_u$$

оставлял множество решений уравнения (12) инвариантным. Это приводит к системе из восьми определяющих уравнений относительно инфинитезимальных элементов $\xi_1(x, t, u)$, $\xi_2(x, t, u)$ и $\phi(x, t, u)$:

$$\begin{aligned} \xi_{2,x} &= 0, & \xi_{2,u} &= 0, & \xi_{1,u} &= 0, & \phi_x &= 0, & \phi_{uuu} &= 0, \\ & & -4f\xi_{1,x} + 2f\phi_u - f_u\phi &= 0, \\ \mathcal{A}_t\xi_2 - \xi_{1,xxx} + 2\mathcal{A}\xi_{1,x} + \mathcal{A}_x\xi_1 + \mathcal{A}_u\phi &= 0, \\ -\mathcal{B}_t\xi_2 - 3\mathcal{B}\xi_{1,x} - \mathcal{B}_x\xi_1 + \mathcal{B}\phi_u - \mathcal{B}_u\phi &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя $\xi_1 = \xi(x, t, u)$, $\xi_2 = 1$, $\phi = \eta(x, t, u)$ и $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в эти уравнения, выводим определяющие уравнения неклассического метода:

$$\begin{aligned} \xi_u &= 0, & \eta_x &= 0, & \eta_{uuu} &= 0, & 3\eta\xi_x + \eta_t &= 0, \\ -4f\xi_x - \eta f_u + 2\eta_u f &= 0, & -\xi_{xxx} + 3\xi\xi_x + 2a\xi_x + \xi_t &= 0. \end{aligned}$$

В этом случае мы не получаем новых симметрий.

Пусть теперь $\tau = 0$. В этом случае мы действуем так, как описано в работе [19]. Без потери общности положим $\xi = 1$. Используя уравнение инвариантной поверхности $u_x = \eta$ и его производные, запишем (2) в эквивалентном виде $u_t = \mathcal{A}$, где

$$\mathcal{A} = \frac{f}{\eta} + \eta_{xx} - \frac{3(\eta_x)^2}{2\eta} - 2\eta_u\eta_x + \eta^2\eta_{uu} + 2\eta\eta_{ux} - \frac{\eta(\eta_u)^2}{2} + a\eta.$$

Подставляя $\mathcal{A}$ в полученные в работе [19] определяющие уравнения неклассического метода,

$$\mathcal{A}\eta_u + \eta_t - \mathcal{A}_u\eta - \mathcal{A}_x = 0,$$

находим определяющее уравнение для уравнения (2):

$$\begin{aligned} \frac{\eta_x f}{\eta^2} + \frac{2\eta_u f}{\eta} - \eta_{xxx} + \frac{3\eta_x\eta_{xx}}{\eta} + 3\eta_u\eta_{xx} - \frac{3(\eta_x)^3}{2\eta^2} - \frac{3\eta_u(\eta_x)^2}{\eta} + 3\eta_{ux}\eta_x - \\ - \frac{3(\eta_u)^2\eta_x}{2} - a\eta_x - \eta^3\eta_{uuu} - 3\eta^2\eta_{uux} - 3\eta\eta_{uxx} + 3\eta\eta_u\eta_{ux} + \eta_{tt} = 0. \end{aligned}$$

Выбирая $\eta(x, t, u)$ различного вида, получаем функцию f , подставляя которую в уравнение (2), имеем следующие инфинитезимальные элементы: если $f = u^n$, то $\eta = k_1 t + k_2$; если $f = (n^2 - 3n + 2)/2 \cdot u^{4n-2}$, то $\eta = u^n$.

Можно заметить, что для уравнения КН неклассический метод является более общим, чем классический метод Ли.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили полную классификацию групп Ли для уравнения КН (2). Построена оптимальная система и выведены соответствующие редуцированные уравнения. Мы использовали алгоритм, который был описан в работе [18], а в работе [19] получил дальнейшее развитие для определения неклассических симметрий. Мы доказали, что для уравнения КН неклассический метод является более общим, чем классический метод Ли.

Благодарности. Авторы благодарят рецензента за ценные замечания. Работа была поддержана со стороны Junta de Andalucía group FQM-201 и Ministerio de Ciencia e Innovación (проект MTM2009-11875).

Список литературы

- [1] С. И. Свинолупов, В. В. Соколов, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:4 (1982), 86–87.
- [2] R. Hernández Heredero, V. V. Sokolov, S. I. Svinolupov, *Physica D*, **87**:1–4 (1995), 32–36.
- [3] В. В. Соколов, *УМН*, **43**:5(263) (1988), 133–163.
- [4] V. E. Adler, *Int. Math. Res. Not.*, **1** (1998), 1–4, arXiv: solv-int/9707015.
- [5] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *УМН*, **35**:6(216) (1980), 47–68.
- [6] S. Igonin, R. Martini, *J. Phys. A*, **35**:46 (2002), 9801–9810, arXiv: nlin/0208006.
- [7] N. Euler, M. Euler, *J. Nonlin. Math. Phys.*, **16**, Suppl. 1 (2009), 93–106.
- [8] С. И. Свинолупов, В. В. Соколов, Р. И. Ямилов, *Докл. АН СССР*, **271**:4 (1983), 802–805, arXiv: nlin/0110027.
- [9] F. W. Nijhoff, *Phys. Lett. A*, **297**:1–2 (2002), 49–58.
- [10] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.
- [11] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1983.
- [12] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [13] G. W. Bluman, J. D. Cole, *J. Math. Mech.*, **18** (1969), 1025–1042.
- [14] G. W. Bluman, S. Kumei, *Symmetries and differential equations*, 1989.
- [15] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям*, Наука, М., 1979.
- [16] P. A. Clarkson, *Chaos, Solitons and Fractals*, **2261–2301**:12 (1995).
- [17] P. A. Clarkson, E. L. Mansfield, *SIAM J. Appl. Math.*, **54**:6 (1994), 1693–1719, arXiv: solv-int/9409003.
- [18] N. Bilă, J. Niesen, *J. Symbolic Comput.*, **38**:6 (2004), 1523–1533.
- [19] M. S. Bruzón, M. L. Gandarias, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **13**:3 (2008), 517–523.