Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Демонтис, Точные решения модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 1, 35–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6662>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 03:58:11

© 2011 г.

Ф. Демонтис*

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

С помощью метода обратной задачи рассеяния получена формула для некоторых точных решений модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза. Ядро соответствующего интегрального уравнения Марченко записывается с помощью матричных экспонент в виде $\Omega(x+y; t) = Ce^{-(x+y)A}e^{8A^3t}B$, где триплет вещественных матриц (A, B, C) состоит из постоянной матрицы A размера $p \times p$, собственные значения которой имеют положительные вещественные части, из постоянной матрицы B размера $p \times 1$ и из постоянной матрицы C размера $1 \times p$, где p – положительное целое число. С помощью метода разделения переменных в явном виде найдено решение интегрального уравнения Марченко, что дает точные решения модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза. Эти решения строятся в терминах единственного решения P уравнения Сильвестра $AP + PA = BC$ или в терминах единственных решений Q и N уравнений Ляпунова $A^\dagger Q + QA = C^\dagger C$ и $AN + NA^\dagger = BB^\dagger$, где через $B^\dagger$ обозначена сопряженная транспонированная матрица. Рассмотрены два интересных примера.

Ключевые слова: метод обратной задачи рассеяния, уравнение Ляпунова, явное решение модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (мКдФ) с фокусировкой

$$u_t + u_{xxx} + 6|u|^2u_x = 0, \quad (1.1)$$

где нижние индексы x и t обозначают соответствующие частные производные, u представляет собой вещественную скалярную функцию, $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

Уравнение мКдФ возникает при описании динамики тонких упругих стержней [1], фононов на ангармонических решетках [2], меандрирующих океанических течений [3], дорожных пробок [4]–[7], гиперболических поверхностей [8], акустических ионных солитонов [9], волн Альвена в бесстолкновительных плазмах [10], поверхностей раздела шлак–металл в мартеновской ванне [11] и кривых пересечения барьера Шоттки [12].

*Dipartimento Matematica, Università di Cagliari, Cagliari, Italy.
E-mail: fdemontis@unica.it

В настоящей работе предлагается метод построения некоторых точных решений уравнения (1.1), глобально аналитичных во всей плоскости (x, t) и экспоненциально убывающих при $x \rightarrow \pm\infty$ для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}$. Построение таких решений основано на методе обратной задачи рассеяния (МОЗР) [13]–[17]. С помощью МОЗР уравнение (1.1) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка

$$\frac{d\xi}{dx} = -i\lambda\xi + u(x, t)\eta, \quad \frac{d\eta}{dx} = i\lambda\eta - u(x, t)\xi, \quad (1.2)$$

известной как система уравнений Захарова–Шабата [18]. Мы развиваем теорию прямой и обратной задач рассеяния для этой системы. Более точно, записав соответствующие данные рассеяния в терминах матричного представления [19]–[21], мы смогли разделить переменные в интегральном уравнении Марченко, что позволило решить это уравнение алгебраически. Полученное решение легко связать с решением уравнения (1.1).

Метод, предлагаемый в настоящей работе, обладает рядом достоинств.

1. Его легко обобщить на матричные версии уравнения (1.1), равно как и на другие (матричные) эволюционные уравнения (см., например, работу [22]).

2. Явные формулы настоящей работы выражаются в компактной форме в терминах триплета (A, B, C) , где A – вещественная матрица размера p , C – вещественный вектор-строка, а B – вещественный вектор-столбец. С помощью компьютерных вычислений можно выписать решение в терминах экспоненциальных и тригонометрических функций и многочленов от x и t , но уже для матриц A невысокого порядка такое разложение может занимать несколько страниц!

3. С помощью нашего метода можно легко анализировать полюсы, отвечающие непростым связанным состояниям, и исследовать временную эволюцию соответствующих нормировочных констант связанных состояний.

В рамках предлагаемого метода можно обнаружить известные N -солитонные решения и решения типа бризеров уравнения мКдФ [16], [23], [24].

Работа организована следующим образом. В разделе 2 рассмотрены прямая и обратная теории рассеяния для системы (1.2) и описано, каким образом МОЗР позволяет получать решения уравнения (1.1). В разделе 3 построены точные решения задачи Коши для уравнения (1.1) в терминах вещественных матриц (A, B, C) , задающих решение уравнения Марченко. В разделе 4 выписан триплет (A, B, C) в “каноническом” виде. Наконец, в разделе 5 в качестве примеров обсуждаются одно-солитонные и многополюсные решения.

2. МОЗР ДЛЯ УРАВНЕНИЯ МКДФ

Напомним основные идеи МОЗР для вещественных скалярных функций u , принадлежащих пространству $L^1(\mathbb{R})$, и введем коэффициенты рассеяния и интегральные уравнения Марченко. Более детальное изложение можно найти в работах [13]–[17].

Введем правые $\bar{\psi}(\lambda, x)$, $\psi(\lambda, x)$ и левые $\phi(\lambda, x)$, $\bar{\phi}(\lambda, x)$ функции Йоста, а также правые и левые матричные решения Йоста $\Psi(\lambda, x)$ и $\Phi(\lambda, x)$, которые представляют собой решения уравнений (1.2), удовлетворяющие следующим асимптотическим

УСЛОВИЯМ:

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda, x) &= \begin{pmatrix} \bar{\psi}(\lambda, x) & \psi(\lambda, x) \end{pmatrix} = \begin{cases} e^{-i\lambda Jx} (I_2 + o(1)), & x \rightarrow +\infty, \\ e^{-i\lambda Jx} a_\ell(\lambda) + o(1), & x \rightarrow -\infty; \end{cases} \\ \Phi(\lambda, x) &= \begin{pmatrix} \phi(\lambda, x) & \bar{\phi}(\lambda, x) \end{pmatrix} = \begin{cases} e^{-i\lambda Jx} (I_2 + o(1)), & x \rightarrow -\infty, \\ e^{-i\lambda Jx} a_r(\lambda) + o(1), & x \rightarrow +\infty, \end{cases}\end{aligned}$$

где $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а I_p – единичная матрица размера $p \times p$. Переменная t в этих формулах опущена. Поскольку эта система имеет первый порядок, мы получаем

$$\Phi(\lambda, x) = \Psi(\lambda, x) a_r(\lambda), \quad \Psi(\lambda, x) = \Phi(\lambda, x) a_\ell(\lambda),$$

где $a_r(\lambda)$ и $a_\ell(\lambda)$ называются *матрицами коэффициентов прохождения*. Легко доказать, что при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ матрицы $a_r(\lambda)$ и $a_\ell(\lambda)$ унитарны и их определители равны единице, кроме того, эти матрицы являются обратными друг к другу (см., например, [15], [25], [26]). Удобно записать их в виде

$$a_\ell(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{\ell 1}(\lambda) & a_{\ell 2}(\lambda) \\ a_{\ell 3}(\lambda) & a_{\ell 4}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad a_r(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{r 1}(\lambda) & a_{r 2}(\lambda) \\ a_{r 3}(\lambda) & a_{r 4}(\lambda) \end{pmatrix},$$

где $a_{\ell k}(\lambda)$ и $a_{rk}(\lambda)$, $k = 1, 2, 3, 4$, представляют собой вещественные скалярные функции. Функции Йоста $\phi(\lambda, x)$ и $\psi(\lambda, x)$ при каждом $x \in \mathbb{R}$ аналитичны по λ в $\mathbb{C}^+$, непрерывны по λ в $\overline{\mathbb{C}^+}$ и стремятся к единице при $|\lambda| \rightarrow \infty$ изнутри $\mathbb{C}^+$, где через $\mathbb{C}^+$ ($\mathbb{C}^-$) обозначена верхняя (нижняя) открытая полуплоскость комплексной плоскости, $\overline{\mathbb{C}^\pm} = \mathbb{C}^\pm \cup \mathbb{R}$ [15], [25], [26]. Функции Йоста $\bar{\phi}(\lambda, x)$ и $\bar{\psi}(\lambda, x)$, напротив, оказываются при всех $x \in \mathbb{R}$ аналитическими функциями по λ в $\mathbb{C}^-$, непрерывными функциями по λ в $\overline{\mathbb{C}^-}$ и стремятся к единице при $|\lambda| \rightarrow \infty$ изнутри $\mathbb{C}^-$. Поэтому представляется естественным рассмотреть (2×2) -матрицы, составленные из этих функций:

$$F_+(\lambda, x) = \begin{pmatrix} \phi(\lambda, x) & \psi(\lambda, x) \end{pmatrix}, \quad F_-(\lambda, x) = \begin{pmatrix} \bar{\psi}(\lambda, x) & \bar{\phi}(\lambda, x) \end{pmatrix}.$$

В результате получим, что $F_+(\lambda, x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ аналитична по λ в $\mathbb{C}^+$ и непрерывна по λ в $\overline{\mathbb{C}^+}$. Напротив, $F_-(\lambda, x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ аналитична по λ в $\mathbb{C}^-$ и непрерывна в $\overline{\mathbb{C}^-}$. Используя эту информацию, приходим к задаче Римана–Гильберта

$$F_-(\lambda, x) = F_+(\lambda, x) JS(\lambda) J, \tag{2.1}$$

в которой

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} T_r(\lambda) & L(\lambda) \\ R(\lambda) & T_\ell(\lambda) \end{pmatrix}$$

имеет смысл *матрицы рассеяния*.

Сформулируем прямую задачу следующим образом: отталкиваясь от потенциала $u(x)$, построить матрицу рассеяния или, эквивалентно, определить один из коэффициентов отражения $R(\lambda)$ или $L(\lambda)$, полюсы (связанные состояния) λ_j коэффициентов прохождения $T_r(\lambda)$ или $T_\ell(\lambda)$ (см. теорему 3.16 из работы [25]) и нормировочные константы c_{js} , отвечающие этим полюсам. Более того, сделав техническое предположение, что функции $a_{\ell 1}(\lambda)$, $a_{r 1}(\lambda)$, $a_{\ell 4}(\lambda)$ и $a_{r 4}(\lambda)$ обратимы при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, можно

связать коэффициенты прохождения с коэффициентами, возникающими в матрице рассеяния $S(\lambda)$:

$$\begin{aligned} T_r(\lambda) &= a_{r1}^{-1}(\lambda), & R(\lambda) &= -a_{\ell 4}^{-1}(\lambda)a_{\ell 3}(\lambda) = a_{r3}(\lambda)a_{r1}^{-1}(\lambda), \\ T_\ell(\lambda) &= a_{\ell 4}^{-1}(\lambda), & L(\lambda) &= -a_{r1}^{-1}(\lambda)a_{r2}(\lambda) = a_{\ell 2}(\lambda)a_{\ell 4}^{-1}(\lambda). \end{aligned}$$

Обратная задача рассеяния заключается в восстановлении единственным образом потенциала $u(x)$ при наличии данных рассеяния. В настоящей работе, применяя подход работ [19], [20], мы решаем эту задачу с помощью метода Марченко [17], [18] следующим образом.

1. С помощью данных рассеяния $\{R(\lambda), \{\lambda_j, \{c_{js}\}_{s=0}^{n_j-1}\}_{j=m+1}^{m+n}\}$ строим функцию

$$\Omega(y) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{R}(y) + \sum_{j=m+1}^{m+n} \sum_{s=0}^{n_j-1} c_{js} \frac{y^s}{s!} e^{i\lambda_j y}, \quad (2.2)$$

где $\widehat{R}(y) = (1/2\pi) \int_0^\infty d\lambda R(\lambda) e^{i\lambda y}$ – фурье-образ $R(\lambda)$.

2. Решаем интегральное уравнение Марченко

$$K(x, y) - \Omega^\dagger(x + y) + \int_x^\infty dz \int_x^\infty ds K(x, z) \Omega(z + s) \Omega^\dagger(s + y) = 0, \quad (2.3)$$

где $y > x$.

3. Восстанавливаем потенциал $u(x)$:

$$u(x) = -2K(x, x). \quad (2.4)$$

После того как сформулированы прямая и обратная задачи рассеяния, отвечающие линейным ОДУ, связанным с уравнением мКдФ, обсудим, как с помощью МОЗР можно построить решение задачи Коши для уравнения (1.1). Если принять начальные данные $u(x, 0)$ в качестве потенциала системы (1.2), то можно развить прямую теорию рассеяния, как показано выше, и построить матрицу рассеяния. Теперь пусть исходные данные рассеяния эволюционируют во времени. Коэффициент прохождения не меняется с течением времени, вследствие чего остаются неизменными также и связанные состояния. Коэффициент отражения $R(\lambda)$ эволюционирует в соответствии с законом $R(\lambda, t) = e^{8\lambda^3 t} R(\lambda)$. Остается определить закон эволюции нормировочной константы. Обобщив наши предшествующие результаты, касающиеся нелинейного уравнения Шредингера [20], [22], [25], [27], на случай уравнения мКдФ, получим следующий закон эволюции для нормировочных констант:

$$(c_{jn_j-1}(t) \dots c_{j0}(t)) = (c_{jn_j-1}(0) \dots c_{j0}(0)) e^{-A_j^3 t}, \quad (2.5)$$

где A_j – матрица, заданная в (4.3) (см. ниже). Наконец, решение уравнения мКдФ можно получить, если решить обратную задачу рассеяния с данными рассеяния $\{R(\lambda, t), \{\lambda_j, \{c_{js}(t)\}_{s=0}^{n_j-1}\}_{j=m+1}^{m+n}\}$.

3. ЯВНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МКДФ

В этом разделе мы получим две различные, но эквивалентные формулы, задающие решения уравнения мКдФ. Применяя формулы для эволюционирующих коэффициентов отражения и нормировочных констант в (2.2), получим функцию

$$\Omega(y; t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\lambda R(\lambda) e^{8\lambda^3 t} e^{i\lambda y} + \sum_{j=m+1}^{m+n} \sum_{s=0}^{n_j-1} c_{js}(t) \frac{y^s}{s!} e^{i\lambda_j y}, \quad (3.1)$$

которая удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка

$$\Omega_t(y; t) + 8\Omega_{yyy}(y; t) = 0. \quad (3.2)$$

Теперь, следуя работам [19]–[21], запишем ядро $\Omega(y)$, введенное в формуле (2.2), в виде

$$\Omega(y) = C e^{-Ay} B, \quad y \geq 0, \quad (3.3)$$

где A , B и C – вещественные матрицы размеров $p \times p$, $p \times 1$ и $1 \times p$ соответственно при некотором целом p . На основании уравнения (3.2) можно предположить, что $\Omega(y; t)$ следует выбрать в виде

$$\Omega(y; t) = C e^{-Ay} e^{8A^3 t} B, \quad y \geq 0. \quad (3.4)$$

По причинам, которые станут понятны ниже, имеет смысл наложить дополнительные ограничения на триплет матриц (A, B, C) . Более точно, потребуем, чтобы:

- 1) триплеты (A, B, C) задавали минимальное представление ядра $\Omega(y)$, т. е.

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} \ker C A^{r-1} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \ker B^\dagger (A^\dagger)^{r-1} = \{0\}$$

(подробности можно найти в работе [28]);

- 2) все собственные значения матрицы A имели положительные вещественные части.

Следуя процедуре, описанной в предыдущем разделе, построим явные решения уравнения мКдФ, решая интегральное уравнение Марченко (2.3), ядро которого задается выражением (3.4), а неизвестная функция K предполагается зависящей от t . В результате непосредственных вычислений получим

$$\Omega^\dagger(y; t) = B^\dagger e^{-A^\dagger y} e^{8(A^\dagger)^3 t} C^\dagger, \quad y \geq 0. \quad (3.5)$$

Применяя соотношения (3.4) и (3.5), преобразуем уравнение (2.3) к виду

$$\begin{aligned} K(x, y; t) - \left(B^\dagger e^{-A^\dagger x} - \int_x^\infty dz \int_x^\infty ds K(x, z; t) C e^{-Az + 8A^3 t} e^{-As} B B^\dagger e^{-A^\dagger s} \right) \times \\ \times e^{-A^\dagger y + 8(A^\dagger)^3 t} C^\dagger = 0, \quad y > x. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если теперь искать решение этого уравнения в виде

$$K(x, y; t) = H(x, t) e^{-A^\dagger y + 8(A^\dagger)^3 t} C^\dagger \quad (3.7)$$

и ввести матрицы Q и N ,

$$Q = \int_0^\infty ds e^{-A^\dagger s} C^\dagger C e^{-As}, \quad N = \int_0^\infty dr e^{-Ar} B B^\dagger e^{-A^\dagger r}, \quad (3.8)$$

то после несложных вычислений получим

$$H(x, t) \Gamma(x, t) = B^\dagger e^{-A^\dagger x}, \quad (3.9)$$

где

$$\Gamma(x, t) = I_p + e^{-A^\dagger x + 8(A^\dagger)^3 t} Q e^{-2Ax + 8A^3 t} N e^{-A^\dagger x}. \quad (3.10)$$

Подставляя выражение (3.9) в (3.7), имеем

$$K(x, y; t) = B^\dagger e^{-A^\dagger x} \Gamma^{-1}(x, t) e^{-A^\dagger y + 8(A^\dagger)^3 t} C^\dagger = B^\dagger F^{-1}(x, t) e^{-A^\dagger (y-x)} C^\dagger.$$

Положив

$$F(x, t) = e^{2A^\dagger x - 8(A^\dagger)^3 t} + Q e^{-2Ax + 8A^3 t} N, \quad (3.11)$$

придем в итоге к выражению для решения:

$$u(x, t) = -2B^\dagger F^{-1}(x, t) C^\dagger. \quad (3.12)$$

Матрицы Q , N , матрица $F(x, t)$ и скалярная функция $u(x, t)$, введенные соответственно в формулах (3.8), (3.11) и (3.12), удовлетворяют условиям, сформулированным в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (A, B, C) – триплет вещественных матриц, задающий минимальное представление ядра $\Omega(y; t)$, и пусть вещественные части собственных значений матрицы A положительны. Тогда:

- 1) матрицы Q и N вещественные, положительно определенные и самосопряженные, т. е. $Q^\dagger = Q$ и $N^\dagger = N$;
- 2) матрицы Q и N одновременно обратимы;
- 3) матрица $F(x, t)$ обратима на всей плоскости (x, t) , более того, $F^{-1}(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$ для каждого фиксированного t ;
- 4) вещественная скалярная функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) на всей плоскости (x, t) , более того, функцию $u(x, t)$ можно продолжить до функции, аналитической на всей плоскости (x, t) и экспоненциально убывающей при $x \rightarrow \pm\infty$ для каждого фиксированного t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство п. 1–3, равно как и аналитичности и указанного асимптотического поведения решения $u(x, t)$ совпадает с доказательством п. (ii) и (iii) теоремы 4.2 в работе [21] (если принять во внимание теорему 4.3 из той же работы), поэтому мы отсылаем читателя за деталями к этой работе. Тем не менее можно проверить явно, что наше решение (3.12) удовлетворяет уравнению (1.1). Для этого введем несколько модифицированные обозначения. В частности, перепишем формулу (3.12) в виде

$$u(x, t) = -2B^\dagger e^{-A^\dagger x} \Gamma^{-1}(x, t) e^{-A^\dagger x} e^{8(A^\dagger)^3 t} C^\dagger, \quad (3.13)$$

где $\Gamma(x, t) = I_p + Q(x, t)N(x)$ при

$$Q(x, t) = e^{-A^\dagger x} e^{8(A^\dagger)^3 t} Q e^{-Ax} e^{8A^3 t}, \quad N(x) = e^{-Ax} N e^{-A^\dagger x},$$

а Q и N определены в (3.8). В разделе 4 показано, что эти две матрицы суть единственные решения так называемых уравнений Ляпунова. Напомним следующее правило: если $A(x)$ – обратимая матрица, составленная из функций, зависящих от x , таких, что существуют их производные по x , то

$$\frac{d}{dx}(A^{-1}(x)) = -A^{-1}(x) \left(\frac{d}{dx} A(x) \right) A^{-1}(x). \quad (3.14)$$

Применив это правило дифференцирования к функции $\Gamma(x, t)$ и вычислив производную функции $u(x, t)$ (3.13) по t , нетрудно получить следующее равенство (с этого момента будем опускать зависимость от x и t в функциях $\Gamma(x, t)$, $Q(x, t)$ и $N(x)$):

$$u_t = -16B^\dagger e^{-A^\dagger x} \Gamma^{-1} [(A^\dagger)^3 - QA^3N] \Gamma^{-1} e^{-A^\dagger x} e^{8(A^\dagger)^3 t} C^\dagger.$$

Если снова применить равенство (3.14) к функции Γ и продифференцировать по x , то после некоторых прямых вычислений с применением уравнения (4.1a) (см. ниже) получим, что

$$(\Gamma^{-1})_x = \Gamma^{-1} A^\dagger + A^\dagger \Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1} (A^\dagger - QAN) \Gamma^{-1}. \quad (3.15)$$

Используя эту формулу, можно непосредственно вычислить u_x , получив в итоге следующий ответ:

$$u_x = 4B^\dagger e^{-A^\dagger x} \Gamma^{-1} [(A^\dagger) - QAN] \Gamma^{-1} e^{-A^\dagger x} e^{8(A^\dagger)^3 t} C^\dagger. \quad (3.16)$$

Возьмем производную от функции (3.16), с учетом формулы (3.15) получим

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 8B^\dagger e^{-A^\dagger x} \Gamma^{-1} [(A^\dagger)^2 + QA^2N - 2(A^\dagger - QAN)\Gamma^{-1}(A^\dagger - QAN)] \times \\ &\times \Gamma^{-1} e^{-A^\dagger x} e^{8(A^\dagger)^3 t} C^\dagger. \end{aligned}$$

С помощью аналогичных вычислений получим формулу

$$\begin{aligned} u_{xxx} &= 16B^\dagger e^{-A^\dagger x} \Gamma^{-1} [(A^\dagger)^3 - QA^3N - 3((A^\dagger)^2 + QA^2N)\Gamma^{-1}(A^\dagger - QAN) - \\ &- 3(A^\dagger - QAN)\Gamma^{-1}((A^\dagger)^2 + QA^2N) + \\ &+ 6(A^\dagger - QAN)\Gamma^{-1}(A^\dagger - QAN)\Gamma^{-1}(A^\dagger - QAN)] \Gamma^{-1} e^{-A^\dagger x} e^{8(A^\dagger)^3 t} C^\dagger. \end{aligned}$$

Наконец, применяя соотношение (3.16) с учетом того, что u – вещественная скалярная функция, имеем

$$\begin{aligned} 2|u|^2 u_x &= u_x u^\dagger u + u u^\dagger u_x = 16B^\dagger e^{-A^\dagger x} \Gamma^{-1} [((A^\dagger)^2 + QA^2N)\Gamma^{-1}(A^\dagger - QAN) + \\ &+ (A^\dagger - QAN)\Gamma^{-1}((A^\dagger)^2 + QA^2N) - \\ &- 2(A^\dagger - QAN)\Gamma^{-1}(A^\dagger - QAN)\Gamma^{-1}(A^\dagger - QAN)] \Gamma^{-1} e^{-A^\dagger x} e^{8(A^\dagger)^3 t} C^\dagger, \end{aligned}$$

и теперь легко видеть, что $u_{xxx} + 6|u|^2 u_x = -u_t$. Теорема доказана.

Построим другую явную формулу, которая окажется эквивалентной выражению (3.12). Чтобы получить эту новую формулу, отметим сначала, что ввиду вещественности триплета (A, B, C) функция $\Omega(y; t)$ также оказывается вещественной. В результате выполняется условие самосопряженности $\Omega^\dagger(y; t) = \Omega(y; t)$. Применяя это условие, запишем уравнение (2.3) в виде

$$K(x, y; t) - \left(C e^{-Ax} - \int_x^\infty dz \int_x^\infty ds K(x, z; t) C e^{-Az+8A^3t} e^{-As} B C e^{-A^\dagger s} \right) \times \\ \times e^{-Ay+8A^3t} B = 0, \quad y > x.$$

С помощью вычислений, аналогичных приведенным выше, решение данного уравнения можно записать как

$$K(x, y; t) = C E^{-1}(x, t) e^{-A^\dagger(y-x)} B,$$

где

$$E(x, t) = e^{2Ax-8A^3t} + P e^{-2Ax+8A^3t} P, \quad P = \int_0^\infty ds e^{-As} B C e^{-As}. \quad (3.17)$$

Наконец, применив равенство (2.4), получим

$$v(x; t) = -2C E^{-1}(x, t) B. \quad (3.18)$$

Следующая теорема устанавливает связь между матрицами Q, N и P и решениями (3.12) и (3.18).

ТЕОРЕМА 2. Пусть (A, B, C) – триплет вещественных матриц, задающий минимальное представление ядра $\Omega(y; t)$, а собственные значения матрицы A имеют положительные вещественные части. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) выполняется соотношение $NQ = P^2$;
- 2) матрица P обратима на всей плоскости (x, t) ;
- 3) имеет место равенство $E(x, t) = F^\dagger(x, t)$, из которого следует, что матрица $E(x, t)$ обратима на всей плоскости (x, t) ;
- 4) справедлива асимптотика $E^{-1}(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$ для каждого фиксированного t ;
- 5) вещественная скалярная функция $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) всюду на плоскости (x, t) , более того, функцию $v(x, t)$ можно продолжить до функции, аналитической во всей плоскости (x, t) и стремящейся к нулю экспоненциально при $x \rightarrow \pm\infty$ для каждого фиксированного t ;
- 6) явные формулы (3.12) и (3.18) задают одно и то же решение уравнения (1.1) на всей плоскости (x, t) .

Доказательство этой теоремы мы опускаем, так как его можно получить переформулировав (с незначительными модификациями) доказательства теорем 5.2, 5.4 и 5.5 из работы [21]. Отметим тем не менее, что, во-первых, с помощью вычислений, аналогичных тем, которые использовались при доказательстве теоремы 1, можно непосредственно проверить, что выражение (3.18) удовлетворяет уравнению (1.1)

всюду на плоскости (x, t) ; во-вторых, поскольку функция $u(x, t)$ вещественная и скалярная, из условий $E(x, t) = F^\dagger(x, t)$ следует, что формулы (3.12) и (3.18) задают одно и то же решение уравнения мКдФ.

Завершим этот раздел следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3. Пусть триплет (A, B, C) является вещественным и задает минимальное представление ядра $\Omega(y; t)$, а собственные значения матрицы A имеют положительные вещественные части. Тогда решение уравнения мКдФ, задаваемое в эквивалентном виде выражениями (3.12) и (3.18), удовлетворяет уравнению

$$u^2(x, t) = \frac{\partial^2 \ln(\det E(x, t))}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \ln(\det F(x, t))}{\partial x^2}.$$

Доказательство этой теоремы можно найти в работах [20], [21].

4. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ТРИПЛЕТА (A, B, C)

Покажем, что можно без потери общности выбрать триплет (A, B, C) в “каноническом” виде.

Чтобы получить это представление, начнем с построения явных решений уравнения мКдФ, задаваемых формулами (3.12) и (3.18), с применением “алгоритмической” процедуры. Возьмем триплет вещественных матриц (A, B, C) , который задает минимальное представление функции $\Omega(y; t)$, и в котором матрица A имеет собственные значения с положительными вещественными частями, и рассмотрим следующие уравнения:

$$A^\dagger Q + QA = C^\dagger C, \quad AN + NA^\dagger = BB^\dagger, \quad (4.1a)$$

$$AP + PA = BC. \quad (4.1b)$$

Уравнения (4.1a) представляют собой так называемые уравнения Ляпунова, а уравнение (4.1b) известно как уравнение Сильвестра. Эти уравнения были детально исследованы в работе [29], где было доказано, что при вышеприведенных ограничениях для триплета (A, B, C) эти уравнения имеют единственное решение. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть (A, B, C) – триплет вещественных матриц, задающий минимальное представление ядра $\Omega(y; t)$, а собственные значения матрицы A имеют положительные вещественные части. Тогда единственные решения Q, N уравнений Ляпунова и единственное решение P уравнения Сильвестра таковы, что:

- 1) матрицы Q, N и P являются вещественными, а матрицы Q и N к тому же самосопряженные;
- 2) матрицы Q и N удовлетворяют равенствам (3.8), а матрица P задается формулой (3.17), более того, матрицы Q и N одновременно обратимы, и матрица P также обратима.

Доказательство этой теоремы можно найти в работах [21] и [29].

Предположим, что нам удалось решить уравнение (4.1a) (уравнение (4.1b)). Вследствие теоремы 4 матричные решения этих уравнений оказываются ровно теми, которые введены в предыдущем разделе с помощью формулы (3.8) (соответственно

формулы (3.17)). По этой причине, если известны решения Q и N (соответственно решение P), то можно единственным образом построить матрицу $F(x, t)$, заданную равенством (3.11) (соответственно матрицу $E(x, t)$, заданную равенством (3.17)), и, наконец, можно выписать решение уравнения мКдФ в виде (3.12) (соответственно в виде (3.18)).

Естественно попробовать найти более широкий класс, содержащий триплеты, для которых решения уравнений Ляпунова или Сильвестра обладают свойствами, перечисленными в теореме 4. В самом деле, для произвольного триплета из этого класса можно повторить процедуру, описанную выше. Для этого введем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что триплет (A, B, C) размера p принадлежит допустимому классу, если выполнены следующие условия:

- а) матрицы A , B и C являются вещественными;
- б) триплет (A, B, C) отвечает минимальной реализации, используемой в правой части равенства (3.3);
- в) ни одно из собственных значений матрицы A не является числом мнимым, и никакие два собственных значения матрицы A не расположены симметрично относительно оси мнимых чисел в комплексной плоскости переменной λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Два триплета $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ и (A, B, C) называются эквивалентными, если они приводят к одному и тому же потенциалу $u(x, t)$.

Рассмотрим триплет $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ из допустимого класса и уравнения Ляпунова и Сильвестра для такого триплета:

$$\tilde{A}^\dagger \tilde{Q} + \tilde{Q} \tilde{A} = \tilde{C}^\dagger \tilde{C}, \quad \tilde{A} \tilde{N} + \tilde{N} \tilde{A}^\dagger = \tilde{B} \tilde{B}^\dagger, \quad (4.2a)$$

$$\tilde{A} \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A} = \tilde{B} \tilde{C}. \quad (4.2b)$$

В работах [21], [29] можно найти доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Если триплет $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ принадлежит допустимому классу, то справедливы следующие утверждения:

- 1) каждое из уравнений (4.2a) и (4.2b) имеет единственное решение;
- 2) матрицы решений $\tilde{Q}$ и $\tilde{N}$ уравнения (4.2a) самосопряжены, более того, матрицы $\tilde{Q}$ и $\tilde{N}$ одновременно обратимы, и матрица $\tilde{P}$ также обратима;
- 3) матрицы

$$\tilde{F}(x, t) = e^{2\tilde{A}^\dagger x - 8(\tilde{A}^\dagger)^3 t} + \tilde{Q} e^{-2\tilde{A}x + 8\tilde{A}^3 t} \tilde{N}, \quad \tilde{E}(x, t) = e^{2\tilde{A}x - 8\tilde{A}^3 t} + \tilde{P} e^{-2\tilde{A}x + 8\tilde{A}^3 t} \tilde{P}$$

обратимы на всей плоскости (x, t) ;

- 4) функции

$$\tilde{u}(x, t) = -2\tilde{B}^\dagger \tilde{F}^{-1}(x, t) \tilde{C}^\dagger, \quad \tilde{v}(x, t) = -2\tilde{C} \tilde{E}^{-1}(x, t) \tilde{B}$$

задают одно и то же явное решение уравнения (1.1), более того, они аналитически продолжаются до функций, аналитических во всей плоскости (x, t) и экспоненциально стремящихся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$ для каждого фиксированного t .

Тогда к любому триплету, попадающему в допустимый класс, применима описанная выше алгоритмическая процедура.

Возникает естественный вопрос: если начать с триплета $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$, лежащего в допустимом классе, то верно ли, что можно построить эквивалентный ему триплет (A, B, C) такой, что матрицы A, B, C являются вещественными и задают минимальную реализацию функции $\Omega(y; t)$, а собственные значения матрицы A имеют положительные вещественные части (т.е. триплет (A, B, C) имеет вид, предполагаемый в разделе 3)? Ответ на этот вопрос положителен. Экономя место, мы можем порекомендовать читателю обратиться к работам [20] или [21], где было приведено полное решение данной задачи. В частности, на основе уравнений (4.7) и (4.8) работы [21] можно получить триплет (A, B, C) из триплета $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$, а уравнения (4.10), (4.11) той же работы показывают, как можно построить матрицы Q, N, E, F из матриц $\tilde{Q}, \tilde{N}, \tilde{E}, \tilde{F}$. Опираясь на эти факты, мы получаем следующую теорему, которая устанавливает “канонический способ” выбора триплета (A, B, C) в (3.4) и, следовательно, в явных формулах (3.12) и (3.18).

ТЕОРЕМА 6. *Каждому допустимому триплету $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ можно поставить в соответствие специальный допустимый триплет (A, B, C) , где матрица A имеет каноническую жорданову форму, в которой каждый жорданов блок содержит выделенное собственное значение с положительной вещественной частью, столбец B состоит из нулей и единиц, а матричные элементы C вещественны. Более точно, для некоторого положительного целого m*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_m),$$

где в случае вещественных (положительных) собственных значений ω_j блока A_j блоки A_j, B_j, C_j имеют вид

$$A_j := \begin{pmatrix} \omega_j & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_j & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_j & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_j & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_j \end{pmatrix}, \quad B_j := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$C_j := (c_{jn_j} \ c_{jn_j-1} \ c_{jn_j-2} \ \dots \ c_{j2} \ c_{j1});$$

здесь блок A_j имеет размер $n_j \times n_j$, блок B_j – размер $n_j \times 1$, блок C_j – размер $1 \times n_j$, а постоянная c_{jn_j} не обращается в ноль. В случае комплексных собственных значений, которые должны появляться попарно и иметь вид $\alpha_j \pm i\beta_j$ при $\alpha_j > 0$,

соответствующие блоки записываются как

$$A_j := \begin{pmatrix} \Lambda_j & -I_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_j & -I_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Lambda_j & -I_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \Lambda_j \end{pmatrix}, \quad B_j := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C_j := (\gamma_{jn_j} \quad \epsilon_{jn_j} \quad \gamma_{jn_{j-1}} \quad \epsilon_{jn_{j-1}} \quad \gamma_{jn_{j-2}} \quad \epsilon_{jn_{j-2}} \quad \dots \quad \gamma_{j2} \quad \epsilon_{j2} \quad \gamma_{j1} \quad \epsilon_{j1}),$$

где γ_{js} и ϵ_{js} при $s = 1, \dots, n_j$ – вещественные константы, причем $\gamma_{jn_j}^2 + \epsilon_{jn_j}^2 > 0$, каждый вектор-столбец B_j имеет $2n_j$ компонент, каждый блок A_j имеет размер $2n_j \times 2n_j$, а (2×2) -матрица Λ_j имеет вид $\Lambda_j := \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$.

Доказательство этой теоремы основано на том, что вещественный триплет (A, B, C) можно выбрать, как в разделе 3 работы [20].

5. ВАЖНЫЕ ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР 1. Пусть $m = 1$. Выберем триплет (A, B, C) в виде

$$A = a, \quad B = 1, \quad C = c,$$

где $a > 0$ и $0 \neq c \in \mathbb{R}$, и решим уравнение Сильвестра (4.16). В итоге получим

$$P = \frac{c}{2a}.$$

С помощью уравнения (3.18) получим решение

$$v(x, t) = -\frac{2c}{e^{2ax-8a^3t} + (c^2/4a^2)e^{-2ax+8a^3t}},$$

которое уместно называть “односолитонным решением” уравнения (1.1) (ср. [16], [23], [24]).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим случай, в котором коэффициент прохождения имеет полюс третьего порядка. Более точно, рассмотрим следующий триплет:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 2 \quad 1/2).$$

Нетрудно проверить, что следующая матрица P удовлетворяет уравнению (4.16):

$$P = \begin{pmatrix} 1/8 & 7/16 & 5/8 \\ 1/4 & 3/4 & 13/16 \\ 1/2 & 5/4 & 7/8 \end{pmatrix}.$$

В этом случае идея выписать выражение для решения (3.18) не слишком хороша, так как получаемая при этом формула занимает несколько страниц! Тем не менее, применяя пакет программ *Mathematica*, нетрудно построить график данного решения. На рисунке представлены профили функции $u(x, t)$ при четырех фиксированных значениях переменной t : $t = 0$, $t = 1/4$, $t = 1/2$ и $t = 3/4$.

Благодарности. Автор глубоко признателен Корнелису ван дер Мее за полезные обсуждения и Антонио Арричо за помощь при написании программы с использованием пакета **Mathematica**. Работа поддержана Regione Autonoma Sardegna della (грант № PO Sardegna 2007-2013, L.R. 7/2007).

Список литературы

- [1] S. Matsutani, H. Tsuru, *J. Phys. Soc. Japan*, **60**:11 (1991), 3640–3644.
- [2] H. Ono, *J. Phys. Soc. Japan*, **61**:12 (1992), 4336–4343.
- [3] E. A. Ralph, L. Pratt, *J. Nonlinear Sci.*, **4**:1 (1994), 355–374.
- [4] T. S. Komatsu, S.-I. Sasa, *Phys. Rev. E*, **52**:5 (1995), 5574–5582, arXiv: ptt-sol/9506002.
- [5] T. Nagatani, *Physica A*, **265**:1–2 (1999), 297–310.
- [6] Z.-P. Li, Y.-C. Liu, *Eur. Phys. J. B*, **53**:3 (2006), 367–374.
- [7] H. X. Ge, S. Q. Dai, Y. Xue, L. Y. Dong, *Phys. Rev. E*, **71**:6 (2005), 066119, 7 pp.
- [8] W. K. Schief, *Nonlinearity*, **8**:1 (1995), 1–9.
- [9] K. E. Lonngren, *Opt. Quant. Electron.*, **30**:7–10 (1998), 615–630.
- [10] A. H. Khater, O. H. El-Kalaawy, D. K. Callebaut, *Phys. Scr.*, **58**:6 (1998), 545–548.
- [11] M. Agop, V. Cojocaru, *Mater. Trans.*, **39**:6 (1998), 668–671.
- [12] V. Ziegler, J. Dinkel, C. Setzer, K. E. Lonngren, *Chaos, Solitons and Fractals*, **12**:9 (2001), 1719–1728.
- [13] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **149**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [14] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, М., 1987.
- [15] M. J. Ablowitz, B. Prinari, A. D. Trubatch, *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **302**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

- [16] Дж. Л. Лэм, *Введение в теорию солитонов*, Мир, М., 1983.
- [17] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [18] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ*, **61**:1 (1971), 118–134.
- [19] Т. Aktosun, C. van der Mee, *Inverse Problems*, **22**:6 (2006), 2165–2174, arXiv: math-ph/0606008.
- [20] Т. Aktosun, F. Demontis, C. van der Mee, *Inverse Problems*, **23**:5 (2007), 2171–2195, arXiv: nlin/0702010.
- [21] Т. Aktosun, F. Demontis, C. van der Mee, *J. Math. Phys.*, **51**:12 (2010), 123521, 27 pp., arXiv: 1003.2453.
- [22] F. Demontis, C. van der Mee, *Inverse Problems*, **24**:2 (2008), 025020, 16 pp.
- [23] H. Ono, *J. Phys. Soc. Japan*, **41**:5 (1976), 1817–1818.
- [24] M. Wadati, *J. Phys. Soc. Japan*, **34**:5 (1973), 1289–1296.
- [25] F. Demontis, *Direct and inverse scattering of the matrix Zakharov–Shabat system*, Ph. D. thesis, Univ. of Cagliari, Italy, 2007.
- [26] C. van der Mee, “Direct and inverse scattering for skewselfadjoint Hamiltonian systems”, *Current Trends in Operator Theory and its Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **149**, eds. J. A. Ball, J. W. Helton, M. Klaus, L. Rodman, Birkhäuser, Basel, 2004, 407–439.
- [27] T. N. Busse, *Generalized Inverse Scattering Transform for the Nonlinear Schrödinger Equation*, Ph. D. thesis, Univ. of Texas, Arlington, TX, 2008.
- [28] H. Bart, I. Gohberg, M. A. Kaashoek, *Minimal Factorization of Matrix and Operator Functions*, Oper. Theory Adv. Appl., **1**, Birkhäuser, Basel, 1979.
- [29] H. Dym, *Linear Algebra in Action*, Graduate Stud. Math., **78**, AMS, Providence, RI, 2007.