Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Джанфреда, Д. Ландольфи, Волновые пакеты и статистика, связанные с квантово-механическими суперсимметричными партнерами гамильтонианов типа ловушки Пауля, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 1, 80–97

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6665>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:52:07

© 2011 г. М. Джанфреда*, Дж. Ландольфи*

ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ И СТАТИСТИКА, СВЯЗАННЫЕ С КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИМИ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫМИ ПАРТНЕРАМИ ГАМИЛЬТониАнов ТИПА ЛОВУШКИ ПАУЛЯ

В рамках суперсимметричной квантовой механики рассматриваются зависящие от времени квадратичные гамильтонианы. Исследуются квантово-механические свойства некоторых основных состояний в фермионном секторе гильбертова пространства. Для возможно более полного понимания различий между бозонным и фермионным секторами основное внимание уделяется периодическим квадратичным гамильтонианам типа ловушки Пауля.

Ключевые слова: сплетение Дарбу, нестационарная суперсимметричная квантовая механика, алгебра Гейзенберга–Вейля, неклассические состояния.

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с конца XIX в. метод Дарбу [1] построения пар систем, связанных условием изоспектральности, остается одним из наиболее широко применяемых методов исследования в математике и математической физике (см., например, книги [2] и приведенную в них библиографию). Изоспектральные деформации и метод факторизации в одномерных задачах рассматривались среди прочего также и в контексте квантовой механики (КМ) [3], [4]. В настоящее время они представляют собой фундаментальные методы, лежащие в основе так называемой суперсимметричной квантовой механики (ССКМ) [5]. Как известно, на самом деле заманчивому следствию применения преобразования Дарбу первого порядка в задаче стационарной квантовой частицы, эволюционирующей в заданном потенциале, соответствует сокращение низших уровней спектра энергии (см., например, работы [6]–[12]). К еще более интересным последствиям приводит применение преобразований Дарбу старших порядков, с помощью которых удается ввести дополнительную свободу при рассмотрении спектров энергий [13]. Это стимулирует создание квантовых систем с предписанными свойствами. При рассмотрении неавтономных квантовых систем свойство изоспектральности гамильтонова оператора не удается сохранить. Однако зависящие от времени уравнения Шредингера можно унитарным образом связать со

*Dipartimento di Fisica, Università del Salento and I.N.F.N. Sezione di Lecce, Lecce, Italy.
E-mail: maria.gianfreda@le.infn.it, giulio.landolfi@le.infn.it

стационарными спектральными задачами: с помощью собственных векторов положительно инвариантных операторов можно строить решения уравнений Шредингера, содержащих зависимость от времени, если ввести зависящие от времени собственные геометрические фазовые множители, как было впервые предложено Льюисом и Ризенфельдом [14]. Другими словами, изоспектральность можно использовать для применения метода Льюиса–Ризенфельда и наоборот, что позволяет исследовать новые точно решаемые неавтономные квантовые системы [15], [16]. При этом возникает естественный вопрос о прояснении изначальной новизны получающейся динамики по сравнению с динамикой исходной системы. Это связано с описанием явления сжатости, зависящей от времени, для волновых пакетов, эволюционирующих в новой динамике. В дальнейшем приводится пример исследования такого явления, в котором получают ССКМ-партнеры в системе с квадратичным гамильтонианом, зависящим от времени, с одной степенью свободы. В частности, будет рассмотрен пример потенциала типа ловушки Пауля для бозонного сектора.

2. КОНСТРУКЦИЯ ССКМ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Как было отмечено выше, чтобы на практике построить *фермионный* аналог заданного *бозонного* гамильтониана, зависящего от времени, необходимо найти оператор, задающий сплетающее соотношение между инвариантами. Эквивалентно, в некоторый момент времени на гамильтониан можно наложить стационарные сплетающие соотношения, для того чтобы впоследствии произвести одеяние операторов с помощью действия унитарного оператора, ответственного за последующую эволюцию в динамике. Построение тем самым оказывается двухступенчатым процессом, состоящим из унитарной эволюции по времени и неунитарного сплетающего соотношения; при этом следует установить желаемый порядок применения этих операций. В основе этой процедуры лежит контактное преобразование, которое при этом ассоциируется с некоторыми новыми координатами в расширенном фазовом пространстве, так что задача становится стационарной. В выделенном случае неавтономной классической одномерной системы, описываемой квадратичным гамильтонианом, зависящим от времени и имеющим вид

$$H(t) = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{m(t)\omega^2(t)}{2}q^2 \quad (2.1)$$

(переменные q и p суть соответственно координата и импульс), можно непосредственно установить, в частности, соответствие с гармоническим осциллятором (ГО) с единичной массой и частотой. Это легко понять, отталкиваясь от анализа свойств симметрии [17]. В задаче построения квантовой системы, которую можно связать с помощью преобразования ССКМ с системой (2.1), возникает класс зависящих от времени точно решаемых задач, гамильтонианы которых имеют вид [15], [16]¹⁾

$$\hat{\tilde{H}}(t) = \hat{H}(t) + \frac{\sqrt{k}}{m(t)\ell^2(t)}W\left(k^{1/4}\frac{\hat{q}}{\ell(t)}\right), \quad (2.2)$$

¹⁾Для экономии места мы опускаем все аргументы, включающие в себя вид и действие векторных состояний и сплетающих операторов, связанных с гамильтонианами и инвариантами.

$\hbar = 1$, где последний член получается из членов функции *суперпотенциала* $\mathcal{F}$ с помощью формулы

$$W(y) = \left[\frac{1}{\mathcal{F}(y)} \frac{d}{dy} \mathcal{F}(y) \right]^2 - \frac{1}{\mathcal{F}(y)} \frac{d^2}{dy^2} \mathcal{F}(y) + k + 1. \quad (2.3)$$

Здесь k – постоянная, а $\ell = \ell(t)$ – подходящим образом нормированная амплитуда решения в виде квазинормальной моды для гамильтоновых уравнений системы (2.1) (т.е. $q(t) = \sqrt{I/\kappa} \ell \cos[\tau(t) + \text{const}]$, где через I обозначен инвариант ермаковского типа [17]). Соответственно возникает инвариантный оператор $\hat{\hat{I}}$, удовлетворяющий уравнению Лиувилля–фон Неймана:

$$\hat{\hat{I}} = I + W\left(k^{1/4} \frac{\hat{q}}{\ell}\right), \quad i \partial_t \hat{\hat{I}} + [\hat{\hat{I}}, \hat{\hat{H}}] = 0, \quad (2.4)$$

где $\hat{I} = \hat{I}(\hat{q}, \hat{p}, t)$ – квантовый оператор, возникающий из стандартного инварианта ермаковского типа для системы (2.1):

$$\hat{I} = \left(\frac{\sqrt{k}}{2\ell(t)^2} + \frac{\dot{\ell}(t)^2 m(t)^2}{2\sqrt{k}} \right) \hat{q}^2 + \frac{\ell^2}{2\sqrt{k}} \hat{p}^2 - \frac{\ell \dot{\ell} m}{2\sqrt{k}} (\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}). \quad (2.5)$$

Квантовые свойства динамики, управляемой гамильтонианом $\hat{\hat{H}}(t)$, можно тем самым прояснить, варьируя зависимость от времени для массы и частотных параметров m и ω , а именно контролируя накачку энергии в исходную систему (2.1). Для этого полезно явно проиллюстрировать это поведение на примере временной эволюции, управляемой гамильтонианом (2.2), в достаточно понятном случае, когда в бозонном секторе потенциал имеет вид ловушки Пауля, т.е.

$$\omega^2(t) = A + B \cos(2\beta_0 t), \quad m(t) = 1. \quad (2.6)$$

Здесь A и B – вещественные постоянные. Таким образом,

$$\ell = \ell(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(t_0)}} \sqrt{\mathcal{C}\left(\frac{A}{\beta_0^2}, -\frac{B}{2\beta_0^2}, \beta_0 t\right)^2 + \mathcal{S}\left(\frac{A}{\beta_0^2}, -\frac{B}{2\beta_0^2}, \beta_0 t\right)^2}, \quad (2.7)$$

где через $\mathcal{C}$ и $\mathcal{S}$ обозначены соответствующие четная и нечетная функции Матье (t_0 – начальное время, здесь и ниже параметры $\kappa = 1/4$, $\beta_0 = 1$, $A = 1/3$ и $B = 2/3$).

Неопределенность числового типа для инварианта (2.4). Суперпотенциалами могут служить линейные комбинации функций [10]

$$\mathcal{F}_\zeta^{(1)}(q, t) \propto {}_1F_1\left[\frac{1+\zeta}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\kappa} \frac{q^2}{\ell^2}\right], \quad (2.8)$$

$$\mathcal{F}_\zeta^{(2)}(q, t) \propto {}_1F_1\left[\frac{2+\zeta}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{\kappa} \frac{q^2}{\ell^2}\right], \quad (2.9)$$

Рис. 1. Суперпотенциалы (2.8): зависящий от времени потенциал гамильтониана (2.2) при $\zeta = 4$, $y = q/\ell$ (а); $\tilde{\Delta}_n^2$ как функция от Δ_n^2 при $\zeta = 2$ [11] (б).

$\zeta = k - 1/2 - \epsilon$, где через ϵ обозначено новое собственное значение основного состояния. Рассмотрим сначала подкласс динамических задач, суперпотенциалы которых имеют вид (2.8) (но все, сказанное ниже, справедливо также и для суперпотенциалов вида (2.9)). В любой заданный момент времени гамильтонианы $\tilde{H}$ характеризуются потенциалами гармонического типа, существенным образом преобразующимися в присутствии дырок, расположенных в начале системы отсчета для переменных координат. По мере того, как параметр ζ возрастает, поведение гармонического типа становится все более отчетливо выраженным за счет накачки положительной энергии, а профиль дырок становится все более узким. Тем самым зависящее от времени ℓ -масштабирование координаты местоположения с необходимостью приводит к изменениям формы потенциала при различных временах, что явно прослеживается на примере уширений и растяжений, представленных на рис. 1.

Для численнозначных собственных функций инварианта фермионного сектора (2.4), равно как и для решений уравнения Шредингера в фермионном секторе, получаемых на основе этих функций, выполняется свойство оператора числа частиц ГО, обеспечивающее обращение в ноль ковариаций типа координата-импульс. При этом соотношение неопределенностей в сильной форме Робертсона переходит в более слабую гейзенберговскую форму, выражаемую просто в терминах усредненных величин $\hat{q}^2$ и $\hat{p}^2$ в виде [12]

$$\tilde{\Delta}_n^2 = \tilde{I}_n^q \tilde{I}_n^p + \left(\tilde{I}_n^q m \frac{d}{dt} \ln \ell \right)^2 \geq \frac{1}{4}, \quad (2.10)$$

где $\tilde{I}_n^q = \hat{I} \langle n | q^2 | n \rangle_{\hat{I}}$, $\tilde{I}_n^p = \hat{I} \langle n | p^2 | n \rangle_{\hat{I}}$, а через $|n\rangle_{\hat{I}}$ обозначено n -е собственное состояние инварианта $\hat{I}$. Эквивалентно имеем

$$\tilde{\Delta}_n^2 = \tilde{I}_n^q \left[\tilde{I}_n^p + \tilde{I}_n^q \left(\frac{\Delta_n^2}{(n + 1/2)^2} - 1 \right) \right], \quad (2.11)$$

где через Δ_n обозначено соотношение неопределенностей типа координата-импульс, вычисленное на n -м состоянии спектра инварианта $\hat{I}$,

$$\Delta_n^2 \equiv \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \left[1 + 4m\ell^2 \left(\frac{d\ell}{dt} \right)^2 \right].$$

Рис. 2. Потенциал типа Миельника $W(x) = \partial_x \ln[C_1 + (\sqrt{\pi}/2)\text{Erf}(x)]$: при различных значениях постоянной C_1 , $-\sqrt{\pi}/2 - 10^{-6} \leq C_1 \leq \sqrt{\pi}/2 + 10^{-6}$ (а); в процессе временной эволюции, задаваемой уравнением (2.6) при $x = q/\ell$ и $C_1 = \sqrt{\pi}/2 + 10^{-6}$ (б).

Очевидно, что $\tilde{\Delta}_n^2$ быстро насыщается до значения Δ_{n+1}^2 с ростом n . Например, рассмотрим случай $\zeta = 1$ при малых n . Тогда $\tilde{I}_n^q \simeq (n + 3/2 - \delta)$ и $\tilde{I}_n^p \simeq (n + 3/2 - \delta')$ при $|\delta| < 0.1$, $|\delta'| < 0.1$ (с ростом ζ неравенства $\delta, \delta' < 1$ остаются справедливыми). Поэтому

$$\tilde{\Delta}_n^2 \simeq \left(\frac{n + 3/2 - \delta}{n + 3/2} \right)^2 \Delta_{n+1}^2 + (\delta - \delta') \left(n + \frac{3}{2} - 1 \right) \delta. \quad (2.12)$$

Наиболее явное отклонение от линейной зависимости, как легко видеть, происходит при низших квантовых числах n (см. рис. 1б, где изображена кривая для пятого уровня энергии, пересекающая кривые первых четырех уровней). Помимо этого амплитуда флуктуаций, вызываемых зависимостью частоты от времени и параметра масс и соотнесенных с начальными данными, увеличивается с ростом квантового числа n .

Картина меняется, если взять линейные комбинации суперпотенциалов (2.8) и (2.9), поскольку симметрия четности при этом нарушается в фермионном секторе. В связи с этим ковариация переменных координаты и импульса на численнозначных состояниях, связанных с инвариантом $\tilde{I}$, уже не обращается в ноль, хотя вклад этой ковариации в соотношение неопределенностей Робертсона пренебрежимо мал по сравнению с произведением дисперсий собственно координаты и импульса. Рассмотрим, например, класс однопараметрических потенциалов, полученных Миельником [9] (рис. 2), для которых соотношение (2.12) при $0 < (\delta, \delta') < 1$ также оказывается справедливым.

Физическими проявлениями этого эффекта оказывается появление гребешков, динамически приближающихся (или удаляющихся) к пикам плотности вероятности ГО (и имеющим унаследованную форму), поскольку это в основном опреде-

Рис. 3. Потенциал типа Миельника при $C_1 = 0.9$: временная зависимость плотности вероятности, связанной с $|1\rangle_{\hat{I}}$ (а); функция Вигнера при t_0 для $|1\rangle_{\hat{I}}$ (б).

ляется механизмом накачки энергии в бозонном секторе (см. рис. 3а). Высота гребешков зависит от квантового числа n фермионного инварианта $\hat{I}$: с его ростом процесс стремится к воспроизведению вероятности $(n + 1)$ -го уровня бозонного сектора в квадратичном приближении.

Также представляется интересным вкратце рассмотреть функции Вигнера (см. рис. 3б, 4, 5). Очевидно, что эти функции теряют свойство вращательной симметрии уже в начальный момент времени. Пики максимумов и минимумов, унаследованные от ГО, тем самым слегка сдвигаются. Например, по сравнению с исходным гауссовым основным состоянием в бозонном секторе на рис. 4а явно видно, как в функции Вигнера нового основного состояния возникает небольшой сдвиг из начала координат, а сама функция имеет негауссову форму. Наличие двух локальных максимумов (соответственно минимумов) у функции Вигнера инвариантного собственного состояния $|1\rangle_{\hat{I}}$ (соответственно $|2\rangle_{\hat{I}}$) отражает бистабильность, внесенную СС-деформациями квадратичного потенциала (см. рис. 3б и 4б). При дальнейшей эволюции во времени это свойство налагается на неклассический эффект сжатия, зависящего от времени и реализуемого с помощью динамики вращательного типа в фазовом пространстве (аналогично динамике в случае стандартной ловушки Пауля [18]). Этот механизм отражен на рис. 5, где представлен вид сверху для временной эволюции функции Вигнера основного элемента $|1\rangle_{\hat{I}}$ гильбертова пространства в фермионном секторе.

Отметим, наконец, что линейная суперпозиция собственных векторов для основного и третьего уровней инвариантного спектра в фермионном секторе в некотором смысле может в пределе почти совпасть с ГО-состоянием уровня $n = 2$; в этом состоянии почти восстанавливается симметрия распределения вероятности относительно промежуточного максимума в начальный момент времени. Но этот максимум переносится из начала координатного пространства (см. рис. 6а) и не наследует вращательно-симметричного распределения классичности/неклассичности в фазовом пространстве (см. полученную функцию Вигнера в начальный момент времени на рис. 6б).

Рис. 4. Потенциал типа Миельника при $C_1 = 0.9$. Изображены функции Вигнера для наинизшего состояния (а) и второго возбужденного состояния (б) спектра инварианта $\hat{I}$.

Рис. 5. Потенциал типа Миельника при $C_1 = 0.9$. Представлена временная эволюция функции Вигнера для $|1\rangle_{\bar{I}}$ (слева направо: $t = 0, 1.2, 1.7, 2.7$).

Рис. 6. Потенциал типа Миельника при $C_1 = 0.9$. Картина в начальный момент времени (или в стационарном пределе) для $0.3|\epsilon\rangle_{\hat{f}} + \sqrt{0.91}|1\rangle_{\hat{f}}$.

3. СОСТОЯНИЯ ТИПА СОСТОЯНИЙ ЛЬЮИСА–РИЗЕНФЕЛЬДА В ФЕРМИОННОМ СЕКТОРЕ

3.1. Когерентные состояния и квадратурные операторы. Стационарный случай. В стационарном случае пара естественных операторов уничтожения и рождения для изоспектрального гамильтониана $\tilde{H}_0$ получается просто с помощью произведений операторов уничтожения и рождения ГО $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_0^\dagger$ и стационарных переплетающих операторов $\hat{A}_0$ и $\hat{A}_0^\dagger$ в соответствии с работами [8]–[15]:

$$\hat{a}_{\mathcal{N},0} = \hat{A}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{A}_0, \quad \hat{a}_{\mathcal{N},0}^\dagger = \hat{A}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{A}_0. \quad (3.1)$$

Операторы (3.1) действуют нестандартно на базисе собственных векторов гамильтониана $\tilde{H}_0$, т.е.

$$\hat{a}_{\mathcal{N},0}|n\rangle_{\hat{\tilde{N}}_0} = \sqrt{\hat{\tilde{N}}_0} \hat{\mathcal{R}}_{\zeta, \hat{\tilde{N}}_0} |n-1\rangle_{\hat{\tilde{N}}_0}, \quad (3.2)$$

$$\hat{a}_{\mathcal{N},0}^\dagger |n\rangle_{\hat{\tilde{N}}_0} = \sqrt{(\hat{\tilde{N}}_0 + 1)} \hat{\mathcal{R}}_{\zeta, \hat{\tilde{N}}_0 + 1} |n+1\rangle_{\hat{\tilde{N}}_0}, \quad (3.3)$$

$$\hat{\mathcal{R}}_{\zeta, \hat{\tilde{N}}_0} = \sqrt{(\hat{\tilde{N}}_0 + \zeta)(\hat{\tilde{N}}_0 + \zeta + 1)}, \quad (3.4)$$

где $\hat{\tilde{N}}_0$ – естественное обобщение оператора числа частиц для СС-фермионного аналога осциллятора, а $|n\rangle_{\hat{\tilde{N}}_0}$ представляет собой его собственное число, $\hat{\tilde{N}}_0 |n\rangle_{\hat{\tilde{N}}_0} = n |n\rangle_{\hat{\tilde{N}}_0}$ [8]–[15]. Естественная алгебра, которой подчиняется СС-аналог гамильтониана ГО, оказывается тем самым *нелинейной деформацией* алгебры Гейзенберга–Вейля. При этом некоторые состояния типа когерентных оказываются решениями уравнения $\hat{a}_{\mathcal{N},0}|\alpha\rangle_{\mathcal{N},0} = \alpha|\alpha\rangle_{\mathcal{N},0}$ (или, эквивалентно, их можно получить с помощью подходящего оператора сдвига). Но при рассмотрении задачи описания динамики стационарных гамильтонианов, изоспектральных по отношению к ГО, целый ряд

авторов утверждает, что это предписание не отвечает наиболее естественному способу введения состояний, наиболее близких стандартным когерентным состояниям ГО. Вместо этого исследователи обращались к определению *линеаризованных* лестничных операторов. Соотношения между этими линеаризованными операторами, например $\hat{a}_{\mathcal{L},0}$ и $\hat{a}_{\mathcal{L},0}^\dagger$, и лестничными операторами (3.1) имеют в соответствии с работами [19] вид

$$\hat{a}_{\mathcal{N},0} = \hat{\mathcal{R}}_{\zeta, \hat{N}_0+1} \hat{a}_{\mathcal{L},0}, \quad \hat{a}_{\mathcal{N},0}^\dagger = \hat{\mathcal{R}}_{\zeta, \hat{N}_0} \hat{a}_{\mathcal{L},0}^\dagger. \quad (3.5)$$

Важным свойством $\hat{a}_{\mathcal{L},0}$ и $\hat{a}_{\mathcal{L},0}^\dagger$ оказывается то, что они, как и оператор $\hat{N}_{\mathcal{L},0} = \hat{a}_{\mathcal{L},0}^\dagger \hat{a}_{\mathcal{L},0}$, удовлетворяют *линейной* алгебре Гейзенберга. Состояния когерентного типа можно при этом конструировать из линеаризованных операторов (3.5) или с помощью оператора сдвига $\hat{D}_{\mathcal{L},0} = e^{\alpha \hat{a}_{\mathcal{L},0} - \bar{\alpha} \hat{a}_{\mathcal{L},0}^\dagger}$, или, эквивалентно, разрешая условие $\hat{a}_{\mathcal{L},0} |\alpha\rangle_{\mathcal{L},0} = \alpha |\alpha\rangle_{\mathcal{L},0}$. Свойства этих новых когерентноподобных состояний $|\alpha\rangle_{\mathcal{L},0}$ можно описать с помощью стандартных эрмитовых квадратур $\hat{X}_{1,0}^{\mathcal{L}} = (\hat{a}_{\mathcal{L}} + \hat{a}_{\mathcal{L}}^\dagger)/\sqrt{2}$ и $\hat{X}_{2,0}^{\mathcal{L}} = i(\hat{a}_{\mathcal{L}}^\dagger - \hat{a}_{\mathcal{L}})/\sqrt{2}$. Это вполне естественная процедура. Введенные величины играют роль аналогов операторов координаты и импульса в случае ГО²⁾. При этом немедленно становятся ясными основные свойства состояний $|\alpha\rangle_{\mathcal{L},0}$: они коррелированы (за исключением состояний, лежащих на вещественной или мнимой осях в пространстве α) и не минимизируют соотношение неопределенностей Шредингера для квадратур.

3.2. Когерентные состояния и квадратурные операторы. Нестационарный случай. Чтобы определить способ действия в случае, когда имеется зависимость от времени, необходимо подходящим образом адаптировать определение лестничных операторов (3.5) и их квадратур $\hat{X}_{1,0}^{\mathcal{L}}$ и $\hat{X}_{2,0}^{\mathcal{L}}$. Поэтому наша стратегия будет состоять в рассмотрении зависящих от времени квадратурных операторов

$$\hat{X}_1 = \ell(\hat{a}_{\mathcal{L}} + \hat{a}_{\mathcal{L}}^\dagger), \quad \hat{X}_2 = \left(m\ell - \frac{i}{2\ell}\right)\hat{a}_{\mathcal{L}} + \left(m\ell + \frac{i}{2\ell}\right)\hat{a}_{\mathcal{L}}^\dagger. \quad (3.6)$$

Это определение согласованно и осмысленно, так как основано на понимании того, как свойства эволюции преобразуются при переходах между бозонным и фермионным секторами при одновременном введении линеаризации для операторов типа уничтожения и рождения в фермионном секторе. Отображение с помощью зависящего от времени преобразования Боголюбова

$$\hat{a}_{\mathcal{L}}(t) = \mu(t)\hat{a}_{\mathcal{L},0} + \nu(t)\hat{a}_{\mathcal{L},0}^\dagger, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m_0\omega_0}} \left(\frac{1}{2\ell} + m_0\omega_0\ell - im\dot{\ell} \right), \\ \nu(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m_0\omega_0}} \left(\frac{1}{2\ell} - m_0\omega_0\ell - im\dot{\ell} \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

осуществляет переход между состояниями Фока линеаризованных лестничных операторов при различных временах (аналогично работе [20]). В процессе этого соб-

²⁾Можно также привести очевидные естественные аргументы относительно голоморфного представления нелинейных когерентных состояний $|\alpha\rangle_{\mathcal{L},0}$.

ственные состояния $|\alpha\rangle_{\mathcal{L}}$ линейризованного оператора уничтожения, зависящего от времени, т.е. $\hat{a}_{\mathcal{L}}|\alpha\rangle_{\mathcal{L}} = \alpha|\alpha\rangle_{\mathcal{L}}$ (который можно эквивалентно задать с помощью оператора сдвига $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = e^{\alpha\hat{a}_{\mathcal{L}} - \bar{\alpha}\hat{a}_{\mathcal{L}}^\dagger}$) входят в рассмотрение. Тут уместно заметить, что роль, которую эти состояния играют в фермионном секторе гильбертова пространства, аналогична роли так называемых когерентных состояний Льюиса–Ризенфельда (на самом деле представляющих собой сжатые состояния) в бозонном секторе гильбертова пространства.

3.3. Статистика когерентных линейризованных состояний Льюиса–Ризенфельда в фермионном секторе. Обратимся к состояниям и операторам, определенным в п. 3.1, 3.2, и рассмотрим интерпретацию их свойств. Например, теперь представляется возможным построить матрицу корреляций для квадратурных операторов (3.6) между состояниями $|\alpha\rangle_{\mathcal{N},0}$ (далее средние всегда берутся по состоянию $|\alpha\rangle_{\mathcal{N},0}$). Вычисление ее матричных элементов задает дисперсии

$$\Delta X_1^2 = \sqrt{\frac{m\ell^2}{2}} \{ |\alpha|^2 [(T - 2S) + 2(R - S) \cos(2\phi)] + 1 \}, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \Delta X_2^2 = & \frac{1}{4m\ell^2} \left\{ 1 + 2|\alpha|^2 [(T - S) + (R - S) \cos(2\phi)] + \left[\frac{d}{dt}(m\ell^2) \right]^2 \right\} + \\ & + |\alpha|^2 \{ (T - S) + (R - S) [\cos(2\phi) + \sin(2\phi)] \} \frac{d}{dt} \ln(m\ell^2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

и ковариацию

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) = & (R - S)|\alpha|^2 \sin(2\phi) + \\ & + \left\{ |\alpha|^2 [(R - S) \cos(2\phi) + (T - S)] + \frac{1}{2} \right\} \frac{d}{dt} (m\ell^2), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} R = & \frac{\zeta!(\zeta + 1)!}{{}_0F_2(\zeta + 1, \zeta + 2; |\alpha|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{n + \zeta + 2}{n![(n + \zeta)!]^2} \sqrt{\frac{n + \zeta + 3}{n + \zeta + 1}}, \\ S = & \left[\frac{\zeta!(\zeta + 1)!}{{}_0F_2(\zeta + 1, \zeta + 2; |\alpha|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!(n + \zeta - 1)!(n + \zeta)! \sqrt{(n + \zeta)(n + \zeta + 1)}} \right]^2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$T = \partial_{|\alpha|^2} \ln {}_0F_2(\zeta + 1, \zeta + 2; |\alpha|^2).$$

Вышеприведенные формулы обобщают выражения, полученные в стационарном пределе [19]. Свойства сжатия когерентных состояний $|\alpha\rangle_{\mathcal{L}}$ зависят от параметра сжатия α и от того, каким образом накачка энергии реализуется в бозонном секторе. Элементы матрицы ковариаций, представленные на рис. 7, 8, наглядно демонстрируют все детали (в дальнейшем на всех рисунках представлены результаты для потенциала (2.8) с $\zeta = 2$).

a

б

Рис. 7. Временная эволюция величин ΔX_1^2 (сплошные линии) и ΔX_2^2 (пунктирные линии) при различных значениях $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$: $\phi = 0$ (а); $\phi = \pi/4$ (б).

Рис. 8. Ковариация (3.11): $\text{Im } \alpha = 0$ (а); $\text{Re } \alpha = 0$ (б).

Рис. 9. Величина Σ в стационарном пределе: $\zeta = 1$ (а); $\zeta = 3$ (б); $\zeta = 5$ (в).

Рис. 10. Графики $\Sigma = \sigma/\langle N_{\mathcal{L}} \rangle$ в комплексной плоскости переменной α при различных временах: $t = 1$ (а); $t = 1.5$ (б); $t = 3.5$ (в). Пересекающая плоскость отвечает единичному значению.

На рис. 7, 8 сравниваются дисперсии на одной трети периода частоты ловушки в типичных случаях, когда наклоны графиков кривых имеют различные или совпадающие знаки (см. соответствующие рис. 7а и 7б). На рис. 8 показана восприимчивость матрицы ковариаций к предельному переходу $\alpha = 0$. Для восстановления инвариантности определителя матрицы ковариаций относительно унитарного действия оператора сдвига вдоль оси в комплексной плоскости переменной α необходимо, чтобы степень изменения ковариаций возрастала. Это отчетливо видно в том случае, когда параметр частоты ω находится в своем минимуме.

Теперь интересно исследовать влияние взаиморасположения состояний $|z\rangle_{\mathcal{N},0}$ на выходное состояние $|\alpha\rangle_{\mathcal{L}}$. Такая информация содержится в законе зависимости от времени среднего числа мод $\langle \hat{N}_{\mathcal{L}} \rangle = \langle \hat{a}_{\mathcal{L}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathcal{L}} \rangle$ и дисперсии $\Delta N_{\mathcal{L}}^2 = \langle N_{\mathcal{L}}^2 \rangle - \langle N_{\mathcal{L}} \rangle^2$. Эта временная зависимость обязана своим происхождением преобразованию Боголюбова (3.7). В начальный момент времени (равно как и в стационарном пределе) отношение $\Sigma = \Delta N_{\mathcal{L}}^2 / \langle N_{\mathcal{L}} \rangle$ отлично от единицы и, как можно доказать, имеет субпуассоново поведение при всех значениях параметра ζ (см. рис. 9).

Временная эволюция параметра частоты потенциала типа ловушки Пауля приводит к изначальному возрастанию Σ , сменяющемуся впоследствии убыванием. Последовательное появление и исчезновение областей α -плоскости, связанных со значениями $\Sigma > 1$, прослеживается на рис. 10. В этой динамике отчетливо видно вращение Σ в α -пространстве с асимметрией, зависящей от значения, принимаемого углом вращения в α -плоскости. Особенности, имеющие место в стационарном случае при $\alpha = 0$, исчезают вплоть до момента времени, при котором параметр частоты принимает свое исходное значение. В дальнейшем, очевидно, происходит повторение динамики по Σ .

Полезно также рассмотреть корреляционные функции второго порядка (КФВП), исследованные в стационарном пределе в работе [19] (графики приведены в приложении). КФВП $g_{(2)}^D(t) = 1 + (\Delta N_{\mathcal{L}}^2 - \langle N_{\mathcal{L}} \rangle) / \langle N_{\mathcal{L}} \rangle^2$ меньше единицы в начале и в конце периода эволюции. Этого следовало ожидать, так как параметр частоты $\omega(t)$ стремится к значению, использованному при изначальной одновременной диагонализации гамильтониана; состояния и динамика при этом стремятся воспроизвести результаты стационарного предела. При вещественнозначных α явно видно, что с ростом этого параметра подавляются и сглаживаются отклонения от пуассоновой статистики. Отметим, что статистики в бозонном и фермионном секторах могут быть противоположны друг другу: при одном и том же значении параметра α происходят явления коллапса когерентных состояний в бозонном секторе и зарождения состояний в фермионном секторе (см. рис. 15 в приложении). В частности, можно найти интервалы, в которых состояния $|\alpha\rangle_{\mathcal{L}}$ обладают сверхпуассоновой статистикой при любом значении параметра состояния α (см. также рис. 10). Это явление наиболее отчетливо проявляется на середине каждого периода, а именно когда мгновенная накачка энергии минимальна в бозонном секторе.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе обсуждались различные аспекты неавтономных систем и описания механизмов потери когерентности волновыми пакетами в рамках ССКМ. В частности, упор был сделан на системы, бозонный сектор которых описывается квадратичными гамильтонианами, зависящими от времени. Чтобы понять, насколько свойства фермионного сектора отличаются от свойств исходных несуперсимметричных систем, рассмотрим потенциалы, периодические по времени. Были введены волновые пакеты, образующие переопределенный базис в фермионном секторе гильбертова пространства, – аналоги сжатых состояний неавтономных квадратичных систем, исследованных впервые в работе [14]. При обсуждении статистики введенных состояний были получены базисные формулы, обобщающие формулы работы [19] для линейаризованных когерентных состояний в стационарном случае. Были отмечены также некоторые аспекты того, каким образом неклассические свойства (сжатие и непуассоново поведение) в фермионном секторе могут быть в конечном итоге перенесены с элементов нелинейного когерентного базиса на элементы линейаризованного когерентного базиса Льюиса–Ризенфельда.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рис. 11. Состояния Льюиса–Ризенфельда для $\hat{I}$ в случае потенциала типа ловушки Пауля. КФВП для: а – $\text{Im } \alpha = 0$ при $\text{Re } \alpha = 1, 2, 3, 4$; б, в, г – $\text{Im } \alpha = 1, 2, 3$ при $\text{Re } \alpha = 0, 1, 2, 3$. Здесь и ниже тип линий меняется в порядке роста варьируемых параметров: сплошная, штриховая, штрих-пунктирная, пунктирная.

Рис. 12. Состояния Льюиса–Ризенфельда для $\hat{I}$ в случае потенциала типа ловушки Пауля. КФВП для: $\text{Re } \alpha = 0$ при $\text{Im } \alpha = 1, 1.5, 2, 4$ (а); $\text{Re } \alpha = 1$ при $\text{Im } \alpha = 0, 1, 2, 3$ (б); $\text{Re } \alpha = 2$ при $\text{Im } \alpha = 0, 1, 3, 5$ (в); $\text{Re } \alpha = 3$ при $\text{Im } \alpha = 0, 2, 4, 6$ (г).

Рис. 13. Состояния $|\alpha\rangle_{\mathcal{L}}$ с суперпотенциалом (2.8) при $\zeta = 2$. Представлены КФВП для тех же α , что и на рис. 11.

Рис. 14. Состояния $|\alpha\rangle_{\mathcal{L}}$ с суперпотенциалом (2.8) при $\zeta = 2$. Представлены КФВП для тех же α , что и на рис. 12.

Рис. 15. КФВП при $\text{Im } \alpha = 0$ и $\text{Re } \alpha = 2, 5, 7, 10$: состояния Льюиса–Ризенфельда для стандартной ловушки Пауля (а); состояния $|\alpha\rangle_{\mathcal{L}}$ для суперпотенциала (2.8) при $\zeta = 2$ (б).

Список литературы

- [1] G. Darboux, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **94** (1882), 1456–1459.
- [2] C. Gu, H. Hu, Z. Zhou, *Darboux Transformations in Integrable Systems. Theory and their Applications to Geometry*, Math. Phys. Stud., **26**, Springer, Dordrecht, 2005; V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer, Berlin, 1991.
- [3] L. Infeld, T. E. Hull, *Rev. Modern Phys.*, **23**:1 (1951), 21–68.
- [4] S.-H. Dong, *Factorization Method in Quantum Mechanics*, Fund. Theories Phys., **150**, Springer, Dordrecht, 2007.
- [5] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **188**:3 (1981), 513–554.
- [6] M. M. Nieto, *Phys. Lett. B*, **145**:3–4 (1984), 208–210; C. V. Sukumar, *J. Phys. A*, **18**:2 (1985), L57–L61; P. B. Abraham, H. E. Moses, *Phys. Rev. A*, **22**:4 (1980), 1333–1340; M. Singh, *J. Phys. A*, **23**:12 (1990), 2307–2313; G. Dunne, J. Feinberg, *Phys. Rev. D*, **57**:2 (1998), 1271–1276, arXiv:hep-th/9706012; A. A. Андрианов, Н. В. Борисов, М. В. Иоффе, *ТМФ*, **61**:2 (1984), 183–198; A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, V. P. Spiridonov, *Phys. Lett. A*, **174**:4 (1993), 273–279, arXiv:hep-th/9303005; B. Mielnik, O. Rosas-Ortiz, *J. Phys. A*, **37**:43 (2004), 10007–10035; F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, *Phys. Rep.*, **251**:5–6 (1995), 267–385, arXiv:hep-th/9405029.
- [7] D. L. Pursey, *Phys. Rev. D*, **33**:4 (1986), 1048–1055; № 8, 2267–2279.
- [8] D. J. Fernández C., V. Hussin, L. M. Nieto, *J. Phys. A*, **27**:10 (1994), 3547–3564; D. J. Fernández C., L. M. Nieto, O. Rosas-Ortiz, *J. Phys. A*, **28**:9 (1995), 2693–2708, arXiv:hep-th/9501035.
- [9] B. Mielnik, *J. Math. Phys.*, **25**:12 (1984), 3387–3389.
- [10] J. M. Fellows, R. A. Smith, *J. Phys. A*, **42**:33 (2009), 335303, 13 pp.
- [11] J. F. Cariñena, A. M. Perelomov, M. F. Rañada, M. Santander, *J. Phys. A*, **41**:8 (2008), 085301, 10 pp., arXiv:0711.4899.
- [12] M. L. Glasser, L. M. Nieto, B. F. Samsonov, *J. Phys. A*, **36**:46 (2003), L585–L591.
- [13] A. A. Andrianov, F. Cannata, *J. Phys. A*, **37**:43 (2004), 10297–10321, arXiv:hep-th/0407077; C. D. J. Fernández, N. Fernández-García, “Higher-order supersymmetric quantum mechanics”, *Latin-American School of Physics – XXXV ELAF*, AIP Conf. Proc., **744**, eds. R. Bijker, O. Castaños, L. Urrutia, D. Fernández, H. Morales-Técotl C. Villarreal, AIP, Melville, NY, 2005, 236–273, arXiv:quant-ph/0502098; S. P. Maydanyuk, *Double complex SUSY-transformations: deformations of real potentials and their spectral characteristics*, arXiv:0710.4062.

- [14] H. R. Lewis, Jr. W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.*, **10**:8 (1969), 1458–1473.
- [15] V. G. Bagrov, B. F. Samsonov, *J. Phys. A*, **29**:5 (1996), 1011–1023; В. Г. Багров, Б. Ф. Самсонов, *ЖЭТФ*, **109**:4 (1996), 1105–1117; *ЭЧАЯ*, **28**:4 (1997), 951–1012.
- [16] A. Mostafazadeh, *J. Phys. A*, **31**:38 (1998), 7829–7845, arXiv:quant-ph/9807003; A. A. Suzko, *Phys. Lett. A*, **308**:4 (2003), 267–279; А. А. Сузько, Г. Гиоргадзе, *ЭЧАЯ*, **39**:4 (2008), 1114–1149; A. A. Suzko, A. Schulze-Halberg, *J. Phys. A*, **42**:29 (2009), 295203, 14 pp.; D.-Y. Song, J. R. Klauder, *J. Phys. A*, **36**:32 (2003), 8673–8684, arXiv:quant-ph/0305174.
- [17] G. Profilo, G. Soliana, *Phys. Rev. A*, **44**:3 (1991), 2057–2065.
- [18] G. Schrade, V. I. Man’koff, W. P. Schleich, R. J. Glauber, *Quantum Semiclass. Opt.*, **7**:3 (1995), 307–325.
- [19] P. Aniello, V. Man’ko, G. Marmo, S. Solimeno, F. Zaccaria, *J. Opt. B*, **2**:6 (2000), 718–725; V. I. Man’ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, F. Zaccaria, *Phys. Scr.*, **55**:5 (1997), 528–541; V. I. Man’ko, G. Marmo, A. Porzio, S. Solimeno, F. Zaccaria, *Phys. Rev. A*, **62**:5 (2000), 053407, 13 pp., arXiv:quant-ph/0003125.
- [20] G. Landolfi, G. Ruggeri, G. Soliani, *Int. J. Quant. Inf.*, **2**:4 (2004), 529–540.