Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. П. Голдстейн, А. М. Грюндланд, Инвариантное описание $\mathbb{CP}^{N-1}$ сигма-моделей, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 1, 98–111

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6666>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:15:53

© 2011 г.

П. П. Голдстейн*, А. М. Грюндланд^{†‡}

ИНВАРИАНТНОЕ ОПИСАНИЕ $\mathbb{CP}^{N-1}$ СИГМА-МОДЕЛЕЙ

Предложена инвариантная формулировка вполне интегрируемых евклидовых $\mathbb{CP}^{N-1}$ сигма-моделей в двумерии, определенных на римановой сфере S^2 . Скейлинговая инвариантность учитывается явно, путем записи всех уравнений в терминах проекционных операторов. Подробно обсуждаются свойства операторов, проецирующих на одномерное подпространство. Рассмотрены поверхности, связанные с $\mathbb{CP}^{N-1}$ -моделями. Определены инвариантные рекурсионные соотношения, связывающие последовательные проекционные операторы, а также функции погружения поверхностей.

Ключевые слова: сигма-модели, солитонные поверхности в алгебрах Ли, проекторный формализм, инвариантные рекурсионные соотношения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Простой лагранжиан Дирихле

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} (D_\mu z)^\dagger \cdot (D_\mu z), \quad (1)$$

где $\dagger$ обозначает эрмитово сопряжение, может представлять, например, свободную квантовую частицу, описываемую волновой функцией z . Он тривиален, если z является скалярной функцией своих переменных, а D_μ – просто частная производная. Однако если пространство значений лагранжиана представляет собой комплексное многообразие Грассмана, а частные производные $(D_\mu z)$ превращаются в соответствующие ковариантные производные, модель становится нетривиальной, и у нее появляется множество приложений, например к нелинейным явлениям в физике, химии и биологии (см. работы [1]–[4] и приведенную в них библиографию). Наиболее изученными являются $\mathbb{CP}^{N-1}$ -модели, для которых пространства значений

*Theoretical Physics Department, The Andrzej Soltan Institute for Nuclear Studies, Warsaw, Poland. E-mail: Piotr.Goldstein@fuw.edu.pl

[†]Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, Montréal, Canada. E-mail: grundlan@crm.umontreal.ca

[‡]Université du Québec, Trois-Rivières, Canada

представляют собой комплексные $G(1, N)$ -грассманианы, эквивалентные проективным пространствам ($\mathbb{CP}$ обозначает комплексное проективное пространство). Пространство значений есть множество прямых, пересекающихся в начале координат, или, эквивалентно, $(N - 1)$ -мерная риманова сфера, погруженная в N -мерное векторное пространство. Двумерное пространство независимых переменных является простейшим из нетривиальных. В этом случае переменные z подчинены условию

$$z^\dagger \cdot z = 1, \quad (2)$$

а ковариантная производная имеет вид

$$D_\mu z = \partial_\mu z - (z^\dagger \cdot \partial_\mu z)z, \quad \partial_\mu = \partial_{\xi^\mu}, \quad \mu = 1, 2.$$

Цель настоящей работы заключается в исследовании таких систем.

Задача, которую мы ставим в настоящей работе, – сформулировать дифференциальную проективную геометрию в терминах проекционных операторов, которые сделают ее явно инвариантной относительно масштабного преобразования, заданного с помощью любой скалярной функции. Некоторые применения проекторов были введены ранее в работах [5], [6]. В настоящей работе мы строим базис проекторов, которые отображают на ортогональные одномерные подпространства в $\mathbb{C}^N$, и используем этот базис, чтобы выразить все остальные величины. Поскольку модель является точно решаемой [5], [7], наше рассмотрение охватывает спектральную задачу и поверхности, для которых условия погружения являются уравнением динамики системы.

Вместо декартовых переменных $(\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2$ будем использовать более удобные комплексные переменные $(\xi, \bar{\xi}) \in \mathbb{C}$, где $\xi = \xi^1 + i\xi^2$ (комплексное сопряжение обозначено чертой над соответствующим символом). Комплексная плоскость обычно компактифицируется в риманову сферу S^2 . Чтобы избежать неудобного неаналитического условия (2), динамическую модель обычно выражают в терминах отображения $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{CP}^{N-1}$ с аргументами $(\xi, \bar{\xi}) \in \mathbb{C}$, которое определяется как $z = f/|f|$, где $|f| = (f^\dagger \cdot f)^{1/2}$, при этом новая переменная f не подчинена никаким условиям связи. Уравнения Эйлера–Лагранжа в новых переменных принимают вид

$$\left(\mathbb{I} - \frac{f \otimes f^\dagger}{f^\dagger \cdot f} \right) \cdot \left[\partial \bar{\partial} f - \frac{1}{f^\dagger \cdot f} ((f^\dagger \cdot \bar{\partial} f) \partial f + (f^\dagger \cdot \partial f) \bar{\partial} f) \right] = 0, \quad (3)$$

где ∂ и $\bar{\partial}$ – производные по комплексным независимым переменным ξ и $\bar{\xi}$ соответственно, $\mathbb{I}$ – единичная $(N \times N)$ -матрица, а 0 здесь и далее обозначает векторный или матричный ноль. С другой стороны, уравнение (3) не обладает простотой исходного лагранжиана. Более того, решения в терминах новых переменных не единственны: одно и то же решение в терминах грассманиана соответствует бесконечному числу переменных f . Для достижения единственности необходимо наложить на f условие связи; чаще всего первую ненулевую компоненту f полагают равной единице.

В $\mathbb{CP}^{N-1}$ -моделях и всех грассмановых моделях представляется естественным использовать в качестве переменных проекционные операторы, более точно, ортогональные проекторы, отображающие на отдельные направления в $\mathbb{CP}^{N-1}$ -моделях или на подходящие подпространства в грассмановых моделях высшего порядка. Ортогональный проектор, который проецирует на одномерное подпространство, натянутое на f , можно записать как $P = (1/(f^\dagger \cdot f))f \otimes f^\dagger$. Очевидно, что такие проекторы (как и другие ортогональные проекторы) являются эрмитовыми операторами,

$P^\dagger = P$. Они также подчинены следующему простому аналитическому условию идемпотентности

$$P^2 = P, \quad (4)$$

а лагранжиан (1) в терминах проекторов имеет такой же простой вид, как и лагранжиан для z [2], [6]:

$$\mathcal{L} = \text{tr}(\partial P \cdot \bar{\partial} P).$$

Аналогично случаю переменных z соответствующее условие связи, в данном случае (4), умножается на лагранжев множитель и вычитается из лагранжиана до взятия вариации интеграла действия. Вариация приводит к уравнениям Эйлера–Лагранжа для проекторов, которые можно выразить в хорошо известном виде закона сохранения [2], [6], [7]:

$$\partial [\bar{\partial} P, P] + \bar{\partial} [\partial P, P] = 0. \quad (5)$$

Более подробное описание $\mathbb{CP}^{N-1}$ сигма-моделей можно найти в работах [2], [6]. В настоящей работе мы сосредоточимся на следствиях, которые можно получить, если выразить эту теорию в терминах проекторов.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы перечисляем основные алгебраические и аналитические свойства ортогональных проекторов, проецирующих на одномерные подпространства. Кратко формулируются инвариантные рекурсионные соотношения, вытекающие из этих свойств (подробное рассмотрение приведено в другой нашей работе [8]). В разделе 3 обсуждается взаимосвязь между проекторами и поверхностями, для которых условия погружения (уравнения Гаусса–Кодацци–Риччи) эквивалентны закону сохранения (5). Раздел 4 содержит обсуждение линейной задачи и соответствующей волновой функции. Рекурсионные соотношения, связывающие проекторы, поверхности и волновые функции линейной задачи, определяются и рассматриваются в соответствующих разделах.

2. СВОЙСТВА ПРОЕКТОРОВ, ПРОЕЦИРУЮЩИХ НА ОДНОМЕРНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Чтобы описать $\mathbb{CP}^{N-1}$ -модели в терминах проекционных операторов, докажем несколько свойств матриц операторов P ортогонального проектирования, которые отображают на одномерные подпространства в $\mathbb{C}^N$. Все обсуждаемые свойства следуют из определяющего свойства (4) и из того факта, что пространство значений проектора одномерно.

1. Из свойства проектора (4) следует, что операторы P являются диагонализуемыми, а их собственные значения равны 0 или 1.

2. Если проектор отображает на одномерное подпространство в $\mathbb{C}^N$, то его ранг равен единице, таким образом, только одно из собственных значений равно единице, а остальные – нулю. Поэтому $\text{tr } P = 1$. При диагонализации всегда можно добиться, чтобы единственное ненулевое собственное значение размещалось в первой строке и первом столбце.

3. Дифференцируя определяющее свойство (4), путем непосредственных вычислений получаем равенства

$$\partial P \cdot P = (\mathbb{I} - P) \cdot \partial P, \quad P \cdot \partial P = \partial P \cdot (\mathbb{I} - P), \quad (6)$$

аналогичные равенства имеют место для производной $\bar{\partial}$. Другими словами, перестановка с матрицами ∂P или $\bar{\partial} P$ переводит P в $\mathbb{I} - P$ и обратно.

По индукции можно доказать более общее свойство относительно перестановки P с произвольным числом матриц ∂P и $\bar{\partial} P$ в произвольном порядке: если полное число производных ∂P , $\bar{\partial} P$ четное, то

$$P \cdot \partial P \cdot \bar{\partial} P \cdot \dots \cdot \partial P = \partial P \cdot \bar{\partial} P \cdot \dots \cdot \partial P \cdot P; \quad (7)$$

если полное число производных ∂P , $\bar{\partial} P$ нечетное, то

$$P \cdot \partial P \cdot \bar{\partial} P \cdot \dots \cdot \partial P = \partial P \cdot \bar{\partial} P \cdot \dots \cdot \partial P \cdot (\mathbb{I} - P). \quad (8)$$

Данные свойства выполняются для всех проекционных операторов, независимо от размерности их пространства значений и направлений, на которые они проецируют.

4. Если ортогональный проектор P отображает на одномерное подпространство в $\mathbb{C}^N$, то для любой квадратной матрицы A той же размерности, что и пространство $\mathbb{C}^N$, имеем

$$PAP = \text{tr}(P \cdot A)P. \quad (9)$$

Доказательство получается путем перехода к базису, в котором матрица P диагональна, и следует непосредственно из того, что только одно собственное значение оператора P равно единице, а все остальные равны нулю.

Из этого свойства вытекает необходимое и достаточное условие того, что проекция любого проектора Q на проектор P является нулевой матрицей: $PQP = \mathbf{0}$, если и только если $\text{tr}(PQ) = 0$, что согласуется с определением скалярного произведения как $(A, B) = -(1/2) \text{tr}(AB)$ для любых $A, B \in \mathfrak{su}(N)$ [8]. Для единообразия данное скалярное произведение мы используем далее в настоящей работе вместо формы Киллинга.

5. Любое четное число матриц ∂P и $\bar{\partial} P$, умноженных на проектор P , можно упростить до степеней следов $\text{tr}(\partial P \cdot \partial P \cdot P)$, умноженных на P (с заменой ∂ на $\bar{\partial}$ при необходимости), например

$$\partial P \cdot \partial P \cdot P = \text{tr}(\partial P \cdot \partial P \cdot P)P. \quad (10)$$

Доказательство следует непосредственно из предыдущего свойства и свойства проектора, скомбинированного со свойством замены: вместо P пишем P^2 и заменяем одно из P на два или более ∂P (или $\bar{\partial} P$), таким образом получаем выражения вида (9), которые превращаются в следы.

6. Для нечетного числа одинаковых матриц ∂P или $\bar{\partial} P$ получаем более сильное свойство, так, для трех операторов имеем

$$\partial P \cdot \partial P \cdot \partial P = \text{tr}(\partial P \cdot \partial P \cdot P)\partial P \quad (11)$$

и аналогично для производных $\bar{\partial} P$. Данное равенство можно распространить на любое нечетное число матриц ∂P или $\bar{\partial} P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тройное произведение в левой части равенства (11) можно разложить на два слагаемых:

$$\partial P \cdot \partial P \cdot \partial P = \partial P \cdot \partial P \cdot \partial P \cdot P + \partial P \cdot \partial P \cdot \partial P \cdot (\mathbb{I} - P).$$

Крайнюю правую матрицу P из первого слагаемого можно скомбинировать с двумя производными слева от нее, что даст $\text{tr}(\bar{\partial} P \cdot \partial P \cdot P) \partial P \cdot P$. Матрицу $(\mathbb{I} - P)$ из второго слагаемого можно поменять с крайней правой производной, что дает $\partial P \cdot \partial P \cdot P \cdot \partial P$, и тогда можно воспользоваться формулой (10), чтобы заменить это выражение на

$$\text{tr}(\partial P \cdot \partial P \cdot P) P \cdot \partial P = \text{tr}(\partial P \cdot \partial P \cdot P) \partial P \cdot (\mathbb{I} - P).$$

Сумма этих двух слагаемых в точности равна правой части равенства (11).

7. Следующие следы обращаются в ноль:

$$\text{tr}(P \cdot \partial P \cdot P \cdot \bar{\partial} P \cdot \dots \cdot \partial P) = 0, \quad (12)$$

где произведение матриц производных содержит любое нечетное число производных ∂ и $\bar{\partial}$ в произвольном порядке, число проекторов P и их положения в произведении также произвольны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть произведение содержит по крайней мере один оператор P . Запишем любой из операторов P в произведении как $P \cdot P$ и заменим правый P на ∂P и $\bar{\partial} P$ один за другим, вплоть до самого правого, и то же для левого P вплоть до самого левого. При каждой замене P превращается в $\mathbb{I} - P$ и наоборот (свойство 3). Если нам не встретится произведение $P(\mathbb{I} - P) = \mathbf{0}$ или $(\mathbb{I} - P)P = \mathbf{0}$ (при этом процедура завершается), то мы придем к выражению

$$\text{tr}(P \cdot \partial P \cdot P \cdot \bar{\partial} P \cdot \dots \cdot \partial P \cdot (\mathbb{I} - P))$$

при условии, что число производных слева от P четное, а справа нечетное, или к произведению

$$\text{tr}((\mathbb{I} - P) \cdot \partial P \cdot P \cdot \bar{\partial} P \cdot \dots \cdot \partial P)$$

при условии, что число производных слева от P нечетное, а справа четное. В обоих случаях след равен нулю, поскольку циклическая перестановка множителей приводит к выражению, содержащему произведение $P \cdot (\mathbb{I} - P) = \mathbf{0}$ или произведение $(\mathbb{I} - P) \cdot P = \mathbf{0}$.

Если в произведение входят только производные и не входят операторы P , то в качестве первого множителя можно взять единичную матрицу, представив ее как $P + (\mathbb{I} - P)$. Используя ту же процедуру, что и ранее, получаем ноль для всех компонент.

8. Интересны соотношения, содержащие вторые производные проекторов P , поскольку эти производные появляются в уравнениях Эйлера–Лагранжа (5). Из равенств $\text{tr}(P \cdot \partial P) = 0$ и $\text{tr}(P \cdot \bar{\partial} P) = 0$ (специальный случай равенства (12)) следует, что

$$\text{tr}(P \cdot \partial^2 P) = -\text{tr}(\partial P \cdot \partial P), \quad (13)$$

аналогичные формулы имеют место для производных $\partial \bar{\partial}$ и $\bar{\partial}^2$. Если оператор P удовлетворяет также уравнениям Эйлера–Лагранжа, то эти следы обращаются в ноль (см. свойство 13 ниже).

9. Если P удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа (5), то $\text{tr}(P \cdot \bar{\partial} P \cdot \partial \bar{\partial} P) = 0$. Доказательство этого равенства можно получить немедленно, если воспользоваться соотношениями (6) и инвариантностью следов при циклических перестановках.

10. В то время как произведения нечетного числа производных ∂P , $\bar{\partial} P$ являются бесследовыми, формулы в случае четного числа таких производных можно существенно упростить с помощью следующего свойства факторизации, которое выполнено для любой квадратной матрицы A (соответствующей размерности):

$$\text{tr}(A \cdot \partial P \cdot \partial P \cdot P) = \text{tr}(A \cdot P) \text{tr}(\partial P \cdot \partial P \cdot P), \quad (14)$$

где одну или обе производные ∂ можно заменить на $\bar{\partial}$. Доказательство немедленно следует из равенства (10). Как следует из свойства 13 (см. формулу (21) ниже), такие произведения обращаются в ноль, если производные в (14) одинаковы (обе ∂P или обе $\bar{\partial} P$).

11. Если направление f , на которое проецирует P , является голоморфной или антиголоморфной функцией $f(\xi)$ или $f(\bar{\xi})$, т. е. если оно зависит только от одной из двух независимых переменных, то мы получаем следующий аналог формулы Френе:

$$\partial P = \frac{1}{f^\dagger \cdot f} (\mathbb{I} - P) \partial f \otimes f^\dagger, \quad \bar{\partial} P = \frac{1}{f^\dagger \cdot f} f \otimes \bar{\partial} f^\dagger (\mathbb{I} - P). \quad (15)$$

Для голоморфной функции f результат ∂ -дифференцирования оператора P ортогонален P при умножении на P слева, но при этом параллелен P при умножении справа (при правом умножении на P матрица переходит сама в себя). Очевидно, такая матрица является нильпотентной. Результат $\bar{\partial}$ -дифференцирования P обладает аналогичными, но обращенными свойствами: он ортогонален P при умножении справа и параллелен при умножении слева. Для антиголоморфной функции f мы действуем аналогично.

12. Ортогонализация Грама–Шмидта. Задав множество линейно независимых векторов в векторном пространстве, мы всегда можем построить ортонормированный базис, используя хорошо известную процедуру ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональный базис имеет свой аналог в соответствующем пространстве проекторов. Если представить одномерные проекторы как матрицы в новом ортонормированном базисе, то i -й проектор P_i представляется матрицей, имеющей один ненулевой диагональный элемент $z_{ii} = 1$, а все остальные элементы матрицы равны нулю. Такая непосредственная процедура не будет столь тривиальной, если векторы и проекторы являются функциями параметров многообразия, например $\xi, \bar{\xi}$, а мы требуем, чтобы базисные векторы удовлетворяли уравнениям Эйлера–Лагранжа (3) или, эквивалентно, чтобы соответствующие проекторы P_i удовлетворяли уравнению (5). Операторы ортогонализации Грама–Шмидта, последовательно отображающие решения уравнения (3) в ортогональные решения, имеют вид $P_+(f) = (\mathbb{I} - P) \partial f$ [9], [6]. Мы будем называть $P_+(f)$ *оператором рождения*. Аналогично оператор $P_-(f) = (\mathbb{I} - P) \bar{\partial} f$ мы будем называть *оператором уничтожения*. Соответствующие операторы рождения и уничтожения для одномерных проекторов были получены в работе [8]. Они даются выражениями

$$\Pi_-(P_k) = P_{k-1}, \quad \Pi_+(P_k) = P_{k+1}. \quad (16)$$

В явном виде они записываются как

$$\Pi_{-}(P) = \frac{\bar{\partial}P \cdot P \cdot \partial P}{\text{tr}(\bar{\partial}P \cdot P \cdot \partial P)} = \frac{(\mathbb{I} - P) \cdot \bar{\partial}P \cdot \partial P}{\text{tr}(\bar{\partial}P \cdot P \cdot \partial P)} = \frac{\bar{\partial}P \cdot \partial P \cdot (\mathbb{I} - P)}{\text{tr}(\bar{\partial}P \cdot P \cdot \partial P)}, \quad (17)$$

$$\Pi_{+}(P) = \frac{\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P}{\text{tr}(\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P)} = \frac{(\mathbb{I} - P) \cdot \partial P \cdot \bar{\partial}P}{\text{tr}(\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P)} = \frac{\partial P \cdot \bar{\partial}P \cdot (\mathbb{I} - P)}{\text{tr}(\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P)}. \quad (18)$$

Все элементы базиса мы можем получить путем применения оператора рождения $0, 1, \dots, N - 1$ раз к любому голоморфному решению уравнений (3) или их аналогу (16) для проекторов. Можно также выполнить обратное построение с помощью оператора уничтожения, начав с антиголоморфного решения. Заметим, что операторы $\Pi_{\pm}$ представляют собой нелинейные операторы, действующие на каждый из проекторов $P_0, P_1, \dots, P_{N-1}$. Эти операторы являются проекторами, и поэтому их нельзя использовать для построения “оператора числа частиц”.

Из соотношений (17), (18) немедленно следует, что результат действия оператора рождения или уничтожения всегда ортогонален исходному проектору:

$$\Pi_{+}(P)P = P\Pi_{+}(P) = \mathbf{0}, \quad \Pi_{-}(P)P = P\Pi_{-}(P) = \mathbf{0}.$$

Ортогональность других проекторов $P_i, P_k, i \neq k$, следует из ортогональности соответствующих векторов [9].

13. Если базис построен путем описанной выше ортогонализации Грама–Шмидта начиная с вектора, который является голоморфной функцией переменной ξ , то те проекторы, пространства значений которых совпадают с базисными векторами, удовлетворяют соотношениям

$$\text{tr}(\partial P \cdot \partial P) = 0, \quad \text{tr}(\bar{\partial}P \cdot \bar{\partial}P) = 0. \quad (19)$$

Другие проекторы, проецирующие на одномерное подпространство в $\mathbb{C}^N$, не обязательно удовлетворяют этим равенствам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся равенством

$$\mathbf{0} = P_{k+1}P_{k-1} = \frac{\partial P_k \cdot P_k \cdot \bar{\partial}P_k \cdot \bar{\partial}P_k \cdot P_k \cdot \partial P_k}{\text{tr}(\partial P_k \cdot P_k \cdot \bar{\partial}P_k) \text{tr}(\bar{\partial}P_k \cdot P_k \cdot \partial P_k)},$$

вытекающим из ортогональности f_i, f_k при $i \neq k$ [6], [9]. Используя уравнение (9), можно записать числитель последнего равенства как

$$\partial P_k \cdot \text{tr}(P_k \cdot \bar{\partial}P_k \cdot \bar{\partial}P_k) \cdot P_k \cdot \partial P_k. \quad (20)$$

Поэтому или $\text{tr}(P_k \cdot \bar{\partial}P_k \cdot \bar{\partial}P_k) = 0$, или $\partial P_k \cdot P_k \cdot \partial P_k = \mathbf{0}$. Если последнее выражение равно нулю, то и его эрмитово сопряжение $\bar{\partial}P_k \cdot P_k \cdot \bar{\partial}P_k$ также равно нулю, откуда следует, что $\text{tr}(\bar{\partial}P_k \cdot P_k \cdot \bar{\partial}P_k) = 0$. Таким образом, с помощью циклической перестановки мы получаем

$$\text{tr}(P_k \cdot \bar{\partial}P_k \cdot \bar{\partial}P_k) = 0. \quad (21)$$

Теперь, воспользовавшись свойством **3**, инвариантностью следов при циклических перестановках и последним соотношением, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\bar{\partial}P_k \cdot \bar{\partial}P_k) &= \operatorname{tr}(P_k \cdot \bar{\partial}P_k \cdot \bar{\partial}P_k) + \operatorname{tr}((\mathbb{I} - P_k)\bar{\partial}P_k \cdot \bar{\partial}P_k) = \\ &= \operatorname{tr}(P_k \cdot \bar{\partial}P_k \cdot \bar{\partial}P_k) + \operatorname{tr}(\bar{\partial}P_k \cdot P_k \cdot \bar{\partial}P_k) = 2 \operatorname{tr}(P_k \cdot \bar{\partial}P_k \cdot \bar{\partial}P_k) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Эрмитово сопряжение этого соотношения дает $\operatorname{tr}(\partial P_k \cdot \partial P_k) = 0$. Равенства (19) доказаны.

Из формулы (19) следует, что метрические тензоры g_k поверхностей X_k (см. формулы (26) и (27) ниже) имеют нули на диагоналях [8], т. е.

$$(g_k)_{11} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\partial P_k \partial P_k) = 0, \quad (g_k)_{22} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\bar{\partial}P_k \bar{\partial}P_k) = 0.$$

Используя свойства **1–13**, можно вывести все свойства, необходимые для того, чтобы модель была непротиворечивой.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Если P – ортогональный проектор и оператор $P_{+1} = \Pi_+(P)$ существует, то P_{+1} также является ортогональным проектором: он удовлетворяет равенству $P_{+1}^2 = P_{+1}$, и его ядро ортогонально его пространству значений. То же верно для $P_{-1} = \Pi_-(P)$. Более того, след оператора $\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P$ обращается в ноль, если и только если вся матрица обращается в ноль (такое же утверждение имеет место и для оператора $\bar{\partial}P \cdot P \cdot \partial P$), что обеспечивает возможность построения операторов $P_{\pm 1}$, коль скоро матрица является ненулевой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно воспользоваться доказанным в работе [8] свойством проектора P , “поддерживаемым” оператором рождения (16). Однако доказательство можно получить непосредственно, применив равенство (9) к квадрату равенства (18)

$$\Pi_+(P)\Pi_+(P) = \frac{\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P \cdot \partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P}{(\operatorname{tr}(\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P))^2} = \frac{\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P}{\operatorname{tr}(\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P)} = \Pi_+(P), \quad (23)$$

где равенство (9) применяется к прообразу числителя:

$$(\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P) \cdot (\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P) = \operatorname{tr}(\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P) \partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P.$$

Доказательство состоит в демонстрации того, что след оператора $\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P$ обращается в ноль, если и только если вся матрица обращается в ноль. Действительно, если след обращается в ноль, то правая часть последнего равенства равна нулю, но, с другой стороны, она равна квадрату эрмитовой матрицы $\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P$. Поэтому она обращается в ноль, если и только если матрица нулевая.

Это означает, что построение $\Pi_+(P)$ из P (18) корректно и всегда возможно, кроме случаев, в которых $\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial}P = 0$. В этом случае оператор $\Pi_+(P)$ не определен. Аналогично можно доказать свойство проектора и корректность построения для $\Pi_-(P)$.

Ортогональность проекторов $\Pi_+(P)$ и $\Pi_-(P)$ вытекает из того, что они являются эрмитовыми (данное утверждение можно проверить непосредственно). Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Операторы Π_+ и Π_- являются взаимно обратными, т. е.

$$\Pi_+(\Pi_-(P)) = \Pi_-(\Pi_+(P)) = P \quad (24)$$

при условии, что можно действовать внутренним оператором на P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если справедливы соотношения (24), то модель является непротиворечивой при условии, что на P можно подействовать оператором рождения (в случае первого равенства) или оператором уничтожения (в случае второго равенства). Согласно определению $P_{+1} = \Pi_+(P)$ нам надо доказать, что

$$\frac{\bar{\partial}P_{+1} \cdot P_{+1} \cdot \partial P_{+1}}{\text{tr}(\bar{\partial}P_{+1} \cdot P_{+1} \cdot \partial P_{+1})} = P,$$

если оператор P_{+1} существует. Чтобы найти оператор $\bar{\partial}P_{+1} \cdot P_{+1} \cdot \partial P_{+1}$ и его след, заметим, что можно написать два оператора P_{+1} в этом выражении в силу доказанного ранее свойства, согласно которому этот оператор является проектором:

$$\bar{\partial}P_{+1} \cdot P_{+1} \cdot \partial P_{+1} = \bar{\partial}P_{+1} \cdot P_{+1} \cdot P_{+1} \cdot \partial P_{+1}.$$

Заметим также, что произведение двух последних операторов в правой части данного равенства является оператором, эрмитово сопряженным к произведению первых двух. Рассмотрим произведение первых двух операторов. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{\partial}P_{+1} \cdot P_{+1} &= \bar{\partial} \frac{\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial} P}{\text{tr}(\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial} P)} \cdot \frac{\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial} P}{\text{tr}(\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial} P)} = \\ &= \frac{(P \cdot \bar{\partial} \partial P \cdot \bar{\partial} P + \partial P \cdot \bar{\partial} P \cdot \bar{\partial} P) \partial P \cdot P \cdot \bar{\partial} P}{(\text{tr}(\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial} P))^2}. \end{aligned}$$

Применим равенства (7) и (9), чтобы заменить некоторые множители в числителе соответствующими следами, и воспользуемся соотношением (14) для факторизации этих следов. Инвариантность следов при циклических перестановках множителей позволяет получить (после сокращения общих множителей) равенство

$$\bar{\partial}P_{+1} \cdot P_{+1} = \frac{(\text{tr}(\bar{\partial} \partial P \cdot P) + \text{tr}(\partial P \cdot \bar{\partial} P \cdot P)) P \cdot \bar{\partial} P}{\text{tr}(\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial} P)}.$$

Используем равенство (13), а затем свойство замены (6), после чего получим

$$\bar{\partial}P_{+1} \cdot P_{+1} = \frac{(-\text{tr}(\partial P \cdot \bar{\partial} P) + \text{tr}(\partial P \cdot \bar{\partial} P \cdot P)) P \cdot \bar{\partial} P}{\text{tr}(\partial P \cdot P \cdot \bar{\partial} P)} = -P \cdot \bar{\partial} P. \quad (25)$$

Таким образом, комбинируя полученный выше результат с его эрмитовым сопряжением, окончательно получаем

$$\Pi_-(\Pi_+(P)) = \frac{P \cdot \bar{\partial} P \cdot \partial P \cdot P}{\text{tr}(P \cdot \bar{\partial} P \cdot \partial P \cdot P)} = P$$

в силу равенства (9). Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если P удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа (5) и оператор P_{+1} существует, то P_{+1} также удовлетворяет этим уравнениям.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из промежуточного результата (29) (см. далее) получаем связь между уравнениями Эйлера–Лагранжа (5) для P_m и для P_{m+1} . Применяя производную ∂ к обеим частям равенства (29), производную $\bar{\partial}$ – к его эрмитову сопряжению и вычитая результаты дифференцирования друг из друга, получаем

$$\partial[\bar{\partial}P_{m+1}, P_{m+1}] + \bar{\partial}[\partial P_{m+1}, P_{m+1}] = \partial[\bar{\partial}P_m, P_m] + \bar{\partial}[\partial P_m, P_m].$$

Следовательно, P_{m+1} удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа (5), если и только если им удовлетворяет P_m , при условии, что P_{m+1} можно получить из P_m . Этот результат можно использовать и для обратного утверждения: если построение P_{m-1} из P_m возможно, то P_{m-1} удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа тогда и только тогда, когда им удовлетворяет P_m . Таким образом, мы имеем еще один критерий непротиворечивости модели.

3. ПРОЕКТОРЫ И СОЛИТОННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Сначала напомним некоторые известные результаты. В работе [10] было показано, что закон сохранения (5) можно интерпретировать как условие того, что контурный интеграл

$$X(\xi, \bar{\xi}) = i \int_{\gamma} (-[\partial P, P]d\xi + [\bar{\partial} P, P]d\bar{\xi}) \quad (26)$$

не зависит от пути интегрирования γ . Это определяет отображение области Ω на римановой сфере на множество $\mathfrak{su}(N)$ матриц: $\Omega \ni (\xi, \bar{\xi}) \mapsto X(\xi, \bar{\xi}) \in \mathfrak{su}(N) \simeq \mathbb{R}^{N^2-1}$. Эта обобщенная формула Вейерштрасса для погружения двумерных поверхностей в пространство $\mathbb{R}^{N^2-1}$ [11]–[13] определяет поверхности в терминах проекторов P . Условия совместности погружения есть закон сохранения (5). Интегрирование можно провести явно для поверхностей, соответствующих проекторам P_k , полученным рекуррентно из голоморфного решения. Это дает [14]

$$X_k = -i \left(P_k + 2 \sum_{j=0}^{k-1} P_j - c_k \mathbb{I} \right), \quad c_k = \frac{1+2k}{N}, \quad k = 1, \dots, N-2, \quad (27)$$

где

$$P_k P_j = \delta_{kj} P_j, \quad \sum_{j=0}^{N-1} P_j = \mathbb{I}.$$

При $k = N-1$ равенство (27) эквивалентно равенству $X_0 = -iP_0 + (i/N)\mathbb{I}$, получающемуся из (27) при $k = 0$, что редуцирует число поверхностей (или алгебраически независимых функций погружения).

Докажем равенство (27) другим способом по сравнению с работой [14]. Поверхности X_k определяются с помощью (26) с точностью до постоянной матрицы (диагональные элементы которой однозначно определяются условием, что следы X_k обращаются в ноль). Поэтому достаточно доказать, что

$$\partial X_k = -i \partial P_k - 2i \sum_{j=0}^{k-1} \partial P_j, \quad \bar{\partial} X_k = -i \bar{\partial} P_k - 2i \sum_{j=0}^{k-1} \bar{\partial} P_j,$$

или, эквивалентно,

$$[\partial P_k, P_k] = \partial P_k + 2 \sum_{j=0}^{k-1} \partial P_j, \quad (28a)$$

$$[\bar{\partial} P_k, P_k] = -\bar{\partial} P_k - 2 \sum_{j=0}^{k-1} \bar{\partial} P_j. \quad (28b)$$

Докажем эти соотношения по индукции. При $k = 0$ равенства (28) сводятся к

$$\partial P_0 P_0 - P_0 \partial P_0 = \partial P_0, \quad \bar{\partial} P_0 P_0 - P_0 \bar{\partial} P_0 = -\bar{\partial} P_0,$$

что согласно свойству (6) эквивалентно уравнениям

$$P_0 \cdot \partial P_0 = \mathbf{0}, \quad \bar{\partial} P_0 \cdot P_0 = \mathbf{0},$$

где P_0 проецирует на направление, соответствующее голоморфной функции. Это уравнение является немедленным следствием из (15).

Пусть теперь (28) выполнены при $k = m \geq 0$. Согласно равенству (6) имеем

$$\bar{\partial} P_{m+1} \cdot P_{m+1} - P_{m+1} \cdot \bar{\partial} P_{m+1} = 2 \bar{\partial} P_{m+1} \cdot P_{m+1} - \bar{\partial} P_{m+1}.$$

Можно заменить $2 \bar{\partial} P_{m+1} \cdot P_{m+1}$ на $-2 P_m \cdot \bar{\partial} P_m$, используя равенство (25). Применяя равенство (6) к одному из этих двух операторов $P_m \cdot \bar{\partial} P_m$, получаем

$$[\bar{\partial} P_{m+1}, P_{m+1}] = -\bar{\partial} P_{m+1} + [\bar{\partial} P_m, P_m] - \bar{\partial} P_m. \quad (29)$$

Напомним, что данным равенством мы пользовались при доказательстве последнего свойства непротиворечивости модели: если оператор P_m удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа (5), то оператор $P_{m+1} = \Pi_+(P_m)$ также ему удовлетворяет (см. утверждение 3).

Из предположения индукции следует, что равенство (29) принимает вид

$$[\bar{\partial} P_{m+1}, P_{m+1}] = -\bar{\partial} P_{m+1} - 2 \sum_{j=0}^m \bar{\partial} P_j, \quad (30)$$

что в точности совпадает с (28b). Равенство (28a) является эрмитовым сопряжением (28b).

Используя обобщенную формулу Вейерштрасса для погружения (27) и разложение единицы в терминах ортогональных проекторов ранга 1,

$$\sum_{k=0}^{N-1} P_k = \mathbb{I}, \quad (31)$$

можно показать, что выполнено условие

$$\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k X_k = \mathbf{0}. \quad (32)$$

Это означает, что $\mathfrak{su}(N)$ -значные функции погружения X_j являются линейно зависимыми.

Равенство (32) следует непосредственно из записанной в терминах проекторов P_k формулы Вейерштрасса (27) и разложения единицы (31). Используя выражения для X_k и X_{k-1} , получающиеся из (27), можно исключить второе слагаемое в правой части (27):

$$X_k - X_{k-1} = -i(P_k + P_{k-1}) + \frac{2i}{N}\mathbb{I}.$$

Для четных N получаем

$$\begin{aligned} X_{N-1} - X_{N-2} &= -i(P_{N-1} + P_{N-2}) + \frac{2i}{N}\mathbb{I}, \quad \dots, \\ X_1 - X_0 &= -i(P_1 + P_0) + \frac{2i}{N}\mathbb{I}. \end{aligned} \quad (33)$$

Складывая эти выражения и используя разложение единицы (31) для проекторов P_k , получаем, что равенство (32) выполнено. Аналогичное доказательство можно провести для нечетных N . В этом случае имеем

$$\begin{aligned} X_{N-1} - X_{N-2} &= -i(P_{N-1} + P_{N-2}) + \frac{2i}{N}\mathbb{I}, \quad \dots, \\ X_2 - X_1 &= -i(P_2 + P_1) + \frac{2i}{N}\mathbb{I}, \\ X_0 &= -iP_0 + \frac{i}{N}\mathbb{I}. \end{aligned}$$

Снова складывая эти уравнения и используя разложение единицы через проекторы P_k , получаем, что соотношение (32) также удовлетворяется.

Обратно, из уравнения (30) можно выразить проектор P_k через поверхности X_k как линейную комбинацию $X_0, \dots, X_k$:

$$P_k = i \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} (X_j - X_{j-1}) + (-1)^k i X_0 + \frac{1}{N}\mathbb{I}.$$

Таким образом, можно восстановить все проекторы $P_0, \dots, P_{N-1}$, пользуясь поверхностями $X_0, \dots, X_{N-1}$ и единичной матрицей. Это означает, что данные поверхности линейно порождают $(N-1)$ -мерное подпространство в $\mathfrak{su}(N)$, поскольку проекторы линейно независимы.

Проекторы P_k можно также выразить только через X_k [8], однако эта формула нелинейна:

$$P_k = X_k^2 - 2i \left(\frac{2k+1}{N} - 1 \right) X_k - \frac{2k+1}{N} \left(\frac{2k+1}{N} - 2 \right) \mathbb{I}. \quad (34)$$

Свойство $P_k^2 = P_k$ очевидным образом налагает условие связи на поверхности X_k . Является ли оно уравнением, определяющим эти поверхности, или оно удовлетворяется тождественно поверхностями, построенными по формуле (27)? Чтобы выяснить это, рассмотрим свойство проектора для P_k , в которое вместо P_k подставим (34). Прямая подстановка дает уравнение четвертой степени. Однако более

простое условие третьей степени можно получить, умножив уравнение (34) на X_k и воспользовавшись тем, что проектор P_k ортогонален всем проекторам с более низкими индексами. Таким образом, для любого смешанного решения уравнений (5) в $\mathbb{CP}^{N-1}$ минимальный многочлен для матричнозначных функций X_k удовлетворяет кубическому матричному уравнению

$$(X_k - ic_k \mathbb{I})(X_k - i(c_k - 1)\mathbb{I})(X_k - i(c_k - 2)\mathbb{I}) = \mathbf{0}, \quad 0 < k < N - 1. \quad (35)$$

Для любого голоморфного ($k = 0$) и антиголоморфного ($k = N - 1$) решения уравнения (5) в $\mathbb{CP}^{N-1}$ минимальный многочлен для матричнозначных функций X_0, X_{N-1} удовлетворяет матричным квадратным уравнениям

$$(X_0 - ic_0 \mathbb{I})(X_0 - i(c_0 - 1)\mathbb{I}) = \mathbf{0}, \quad (36)$$

$$(X_{N-1} + ic_0 \mathbb{I})(X_{N-1} + i(c_0 - 1)\mathbb{I}) = \mathbf{0} \quad (37)$$

соответственно. Здесь мы воспользовались тем, что $c_0 + c_{N-1} = 2$. Заметим, что уравнение (37), очевидно, эрмитово сопряжено уравнению (36), однако их решения не являются эрмитово сопряженными друг к другу.

Условие (35), а также два других условия (36), (37) имеют простую интерпретацию, если привести матрицы к диагональному виду (что всегда возможно, поскольку матрицы являются антиэрмитовыми). Мы получаем, что числа $ic_k, i(c_k - 1)$ и $i(c_k - 2)$ являются собственными значениями операторов $X_k, k = 1, \dots, N - 2$, при этом только первые два являются собственными значениями при $k = 0$ и только последнее – при $k = N - 1$. Непосредственная проверка показывает, что оператор X_k , полученный из (27), автоматически удовлетворяет условию связи (35). Более того, используя уравнение (27), можно показать, что указанные собственные значения являются единственными собственными значениями оператора X_k , и вычислить их вырождение. А именно:

1) собственное значение $i(c_k - 1)$ соответствует слагаемому $ic_k \mathbb{I} - iP_k$ в (27), оно является невырожденным собственным значением каждого оператора $X_k, k = 0, \dots, N - 1$;

2) собственное значение $i(c_k - 2)$ соответствует слагаемому $ic_k \mathbb{I} - 2i \sum_{j=0}^{k-1} P_j$ в (27), оно является собственным значением любого оператора X_k , кроме $k = 0$, и k -кратно вырождено при $k > 1$;

3) собственное значение ic_k соответствует слагаемому $ic_k \mathbb{I}$, не содержащему проекторов, такие слагаемые присутствуют в каждом операторе X_k , кроме $k = N - 1$, и собственное значение является $(N - 1 - k)$ -кратно вырожденным при $k < N - 1$.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Описание $\mathbb{CP}^{N-1}$ -моделей в терминах операторов ортогонального проектирования обладает несколькими преимуществами по сравнению с их описанием в терминах векторов. Оно естественно, и получающаяся в результате картина является понятной. В то же время оно вовсе не обязательно сложнее, чем описание в терминах векторов, если мы знаем несколько тождеств из алгебры проекторов и анализа (подобных перечисленных в разделе 2). Ортогональный базис в терминах проекторов можно построить непосредственно. Также нетрудно доказать основные условия, необходимые для непротиворечивости модели.

Представленные в настоящей работе методы построения возрастающего числа поверхностей, связанных с $\mathbb{CP}^{N-1}$ сигма-моделями на евклидовом пространстве, могут привести к подробному аналитическому описанию рассматриваемых поверхностей. Такое описание дает нам эффективные инструменты для нахождения поверхностей без каких бы то ни было дополнительных рассматриваний, а исходя непосредственно из заданных уравнений $\mathbb{CP}^{N-1}$ сигма-модели (5). На следующем этапе наших исследований было бы полезно расширить представленный подход на более общие сигма-модели, базирующиеся на многообразиях Грассмана, т. е. однородных пространствах

$$G(m, n) = \frac{SU(N)}{S(U(m) \times U(n))}, \quad N = m + n.$$

Грассмановы сигма-модели являются обобщением $\mathbb{CP}^{N-1}$ сигма-моделей. Их важное общее свойство состоит в том, что уравнения Эйлера–Лагранжа лучше всего записывать в терминах проекторов. Уравнения имеют много общих свойств, таких как бесконечное число локальных и/или нелокальных сохраняющихся величин, бесконечномерные алгебры симметрии, гамильтоновы структуры, полная интегрируемость, существование многосолитонных решений и т. д. Исследование поверхностей для этого случая может привести к различным классам и гораздо более разнообразным типам поверхностей, чем рассматривавшиеся в настоящей работе. Более подробному рассмотрению геометрических аспектов таких поверхностей будет посвящена отдельная работа.

Список литературы

- [1] J. Polchinski, A. Strominger, *Phys. Rev. Lett.*, **67**:13 (1991), 1681–1684.
- [2] N. Manton, P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [3] А. С. Давыдов, *Солитоны в молекулярных системах*, Наукова думка, Киев, 1984.
- [4] Z. Ou-Yang, J. Lui, Y. Xie, *Geometric Methods in Elastic Theory of Membranes in Liquid Crystal Phases*, Adv. Ser. Theoret. Phys. Sci., **2**, World Sci., Singapore, 1999.
- [5] A. V. Mikhailov, “Integrable magnetic models”, *Solitons*, Modern Problem in Condensed Matter Sci., **17**, eds. S. E. Trullinger, V. E. Zakharov, V. L. Pokrovsky, North-Holland, Amsterdam, 1986, 623–690.
- [6] W. J. Zakrzewski, *Low-Dimensional Sigma Models*, Adam Hilger, Bristol, 1989.
- [7] В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *ЖЭТФ*, **74**:6 (1978), 1953–1973.
- [8] P. P. Goldstein, A. M. Grundland, *J. Phys. A*, **43**:26 (2010), 265206, 18 pp., arXiv: 0910.0624.
- [9] A. M. Din, W. J. Zakrzewski, *Nucl. Phys. B*, **174**:2–3 (1980), 397–406.
- [10] A. M. Grundland, A. Strasburger, W. J. Zakrzewski, *J. Phys. A*, **39**:29 (2006), 9187–9213, arXiv: math/0502482.
- [11] B. G. Konopelchenko, *Stud. Appl. Math.*, **96**:1 (1996), 9–51.
- [12] B. G. Konopelchenko, I. A. Taimanov, *J. Phys. A*, **29**:6 (1996), 1261–1265, arXiv: dg-ga/9505006.
- [13] K. Nomizu, T. Sasaki, *Affine Differential Geometry*, Cambridge Tracts Math., **111**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [14] A. M. Grundland, İ. Yurduşen, *J. Phys. A*, **42**:17 (2009), 172001, 5 pp., arXiv: 0905.2556.