Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. Харнад, Й. В. ван де Лёр, А. Ю. Орлов, Кратные суммы и интегралы как тау-функции нейтральной иерархии Кадомцева–Петвиашвили, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 1, 112–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6667>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:36:40

© 2011 г. Дж. Харнад^{*†}, Й. В. ван де Лёр[‡], А. Ю. Орлов[§]

КРАТНЫЕ СУММЫ И ИНТЕГРАЛЫ КАК ТАУ-ФУНКЦИИ НЕЙТРАЛЬНОЙ ИЕРАРХИИ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ

Кратные суммы и кратные интегралы рассмотрены как тау-функции так называемой нейтральной иерархии Кадомцева–Петвиашвили на решетке корней типа В; для их вывода в качестве простейшего средства использованы нейтральные фермионы. Суммы берутся по проективным функциям Шура Q_α для строгих разбиений α . Рассмотрено два типа таких сумм: взвешенные суммы Q_α по строгим разбиениям α и суммы по произведениям $Q_\alpha Q_\gamma$. Таким способом получаются дискретные аналоги бета-ансамблей ($\beta = 1, 2, 4$). Непрерывные аналоги представлены в виде кратных интегралов, которые интересны с точки зрения их применения в ряде задач математики и физики.

Ключевые слова: интегрируемые системы, симметрические функции, проективные функции Шура, случайные разбиения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются кратные суммы и кратные интегралы, представляющие интерес с точки зрения некоторых задач математики и физики. Кратные суммы появляются в моделях случайных разбиений (как было показано в обзорной работе [1]) и случайных движений частиц [2] (см. также работу [3]). Кратные интегралы дают некоторые аналоги бета-ансамблей случайных матриц, $\beta = 1, 2, 4$, а также аналог двухматричных моделей [4]. Мы рассматриваем деформации меры, определяемые в терминах четырех полубесконечных наборов параметров, и связываем производящую функцию Z со сдвоенной и двухкомпонентной иерархией Кадомцева–Петвиашвили на решетке корней типа В (иерархией 2В-КП). Основной прием заключается в использовании одно- и двухкомпонентных нейтральных фермионов, которые обеспечивают связь с интегрируемыми системами, известными

^{*}Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal, Montréal, Canada.
E-mail: harnad@crm.umontreal.ca

[†]Department of Mathematics and Statistics, Concordia University, Montréal, Canada

[‡]Mathematical Institute, University of Utrecht, Utrecht, The Netherlands.
E-mail: J.W.vandeLeur@uu.nl

[§]Институт океанологии, Москва, Россия. E-mail: orlovs55@mail.ru

как нейтральные иерархии В-КП [5], [6]. Одна из версий таких иерархий была впервые введена в работах [5], [6], в настоящей работе мы используем другую версию, введенную в работе [7].

2. СУММЫ ПО ПРОЕКТИВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ШУРА

Мы рассматриваем суммы по строгим разбиениям, разбиения будем обозначать греческими буквами α, β . Напомним [8], что строгое разбиение α представляет собой набор целых чисел (частей) $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ при $\alpha_1 > \dots > \alpha_k \geq 0$. Длина разбиения α , обозначаемая через $\ell(\alpha)$, равна числу ненулевых частей, таким образом, в данном случае $\ell(\alpha) = k$ или $\ell(\alpha) = k - 1$. Пусть DP – множество строгих разбиений (т.е. разбиений с различными частями). Нам также потребуется подмножество множества DP , которое мы обозначим как DP^2 , состоящее из всех разбиений вида $(\alpha_1, \alpha_1 - 1, \alpha_3, \alpha_3 - 1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k-1} - 1)$. Рассмотрим следующие суммы (при $L \in \mathbb{N}^+$, $t := (t_1, t_3, \dots)$, $\mathbf{t}^* := (t_1^*, t_3^*, \dots)$, $\bar{\mathbf{t}} := (\bar{t}_1, \bar{t}_3, \dots)$):

$$S_0(\mathbf{t}, L) := \sum_{\substack{\alpha \in DP, \\ \alpha_1 \leq L}} Q_\alpha \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right), \quad (1)$$

$$S_1(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) := \sum_{\alpha \in DP} e^{-U_\alpha(\mathbf{t}^*)} Q_\alpha \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right), \quad (2)$$

$$S_2(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, \mathbf{t}^*) := \sum_{\alpha \in DP} e^{-U_\alpha(\mathbf{t}^*)} Q_\alpha \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right) Q_\alpha \left(\frac{\bar{\mathbf{t}}}{2} \right), \quad (3)$$

$$S_{00}(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, L) := \sum_{\substack{\alpha \in DP, \\ \alpha_1 \leq L}} Q_\alpha \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right) Q_\alpha \left(\frac{\bar{\mathbf{t}}}{2} \right), \quad (4)$$

$$S_3(\mathbf{t}, A^c) := \sum_{\alpha \in DP} A_\alpha^c Q_\alpha \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right), \quad (5)$$

$$S_4(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) := \sum_{\alpha \in DP^2} e^{-U_\alpha(\mathbf{t}^*)} Q_\alpha \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right), \quad (6)$$

$$S_5(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, D) := \sum_{\substack{\alpha, \beta \in DP, \\ \ell(\alpha) = \ell(\beta)}} Q_\alpha \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right) D_{\alpha, \beta} Q_\beta \left(\frac{\bar{\mathbf{t}}}{2} \right). \quad (7)$$

Здесь *проективные функции Шура* Q_α являются взвешенными многочленами по переменным $\mathbf{t} = (t_1, t_3, t_5, \dots)$, $\deg t_m = m$, занумерованными строгими разбиениями (их подробное определение см. в работе [8]). Известно, что каждая функция $Q_\alpha(\mathbf{t}/2)$ представляет собой тау-функцию иерархии В-КП [5], [6]. Это изящное наблюдение было сделано в работах [9], [10]. Тот факт, что в высших временах t_{2m-1} иерархии В-КП появляются только нечетные нижние индексы, связан с тем, что она получается редукцией из иерархии КП. Коэффициенты U_α определяются как

$$U_\alpha := \sum_{i=1}^k U_{\alpha_i}, \quad U_n := U_n^{(0)} - \sum_{\substack{m \neq 0, \\ n \text{ нечетное}}} n^m t_m^* - \ln n!, \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad (8)$$

для некоторого набора постоянных $\{U_n^{(0)}\}$.

Коэффициенты A_α^c в правой части (5) определены в терминах пар (A, a) , где A – бесконечная кососимметричная матрица, a – бесконечный вектор. Для строгого разбиения $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, где $\alpha_k > 0$, число A_α^c определяется как пфаффиан антисимметричной $(2n \times 2n)$ -матрицы $\tilde{A}$,

$$A_\alpha^c := \text{Pf}[\tilde{A}], \quad (9)$$

где для четных $k = 2n$

$$\tilde{A}_{ij} = -\tilde{A}_{ji} := A_{\alpha_i, \alpha_j}, \quad 1 \leq i < j \leq 2n,$$

а для нечетных $k = 2n - 1$

$$\tilde{A}_{ij} = -\tilde{A}_{ji} := \begin{cases} A_{\alpha_i, \alpha_j}, & \text{если } 1 \leq i < j \leq 2n - 1, \\ a_{\alpha_i}, & \text{если } 1 \leq i < j = 2n. \end{cases} \quad (10)$$

Кроме того, мы полагаем $A_0^c = 1$.

Коэффициенты $D_{\alpha, \beta}$ в (7) определяются как $D_{\alpha, \beta} = \det(D_{\alpha_i, \beta_j})$, где D – заданная постоянная бесконечная матрица.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ряды (1)–(4) могут быть получены путем специализации A^c в ряде (5). Если положить

$$A_{nm} = \frac{1}{2} e^{-U_m - U_n} \text{sgn}(n - m), \quad a_n = e^{-U_n},$$

то получим (2). Если далее выбрать $U_n = 0$ и $U_n = +\infty$ для $n \leq L$ и $n > L$ соответственно, то получим (1). Если положить

$$A_{nm} = \frac{1}{2} e^{-U_m - U_n} Q_{(n, m)} \left(\frac{\bar{\mathbf{t}}}{2} \right), \quad a_n = e^{-U_n} Q_{(n)} \left(\frac{\bar{\mathbf{t}}}{2} \right),$$

то получим (3). Снова выбирая $U_n = 0$ и $U_n = +\infty$ для $n \leq L$ и $n > L$ соответственно, получаем (4). Ряд (6) получается из (5), если взять $A_{nm} = \delta_{n+1, m} - \delta_{m+1, n}$. Суммы (4) и (3) также можно получить как частные случаи (7): если положить $D_{nm} = e^{-U_m - U_n} \delta_{n, m}$, то мы получаем (3).

Все эти суммы представляют собой частные примеры тау-функций иерархии В-КП, введенных в работе [5] и определяющих решения того, что в работе [7] было названо нейтральной иерархией В-КП. Их можно далее конкретизировать, если выбрать $\mathbf{t} = \mathbf{t}_\infty := (1, 0, 0, \dots)$. Тогда

$$Q_\alpha \left(\frac{\mathbf{t}_\infty}{2} \right) = \Delta^*(\alpha) \prod_{i=1}^k \frac{1}{\alpha_i!}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k),$$

где

$$\Delta^*(\alpha) = \Delta_k^*(\alpha) := \prod_{0 < i < j \leq k} \frac{\alpha_i - \alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j}.$$

Для этого случая получаем

$$\begin{aligned}
 S_1(\mathbf{t}_\infty, \mathbf{t}^*) &= \sum_{\alpha \in DP} \Delta^*(\alpha) \prod_{i=1}^k \frac{e^{-U_{\alpha_i}(\mathbf{t}^*)}}{\alpha_i!}, \\
 S_2(\mathbf{t}_\infty, \mathbf{t}_\infty, \mathbf{t}^*) &= \sum_{\alpha \in DP} (\Delta^*(\alpha))^2 \prod_{i=1}^k \frac{e^{-U_{\alpha_i}(\mathbf{t}^*)}}{(\alpha_i!)^2}, \\
 S_4(\mathbf{t}_\infty, \mathbf{t}^*) &= \sum_{\alpha \in DP'} (\tilde{\Delta}^*(\alpha))^4 \prod_{i=1}^k \frac{e^{-U_{\alpha_i}(\mathbf{t}^*) - U_{\alpha_i+1}(\mathbf{t}^*)}}{\alpha_i! (\alpha_i + 1)!}, \\
 S_5(\mathbf{t}_\infty, \mathbf{t}_\infty, \mathbf{t}^*) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\alpha, \beta \in DP, \\ \ell(\alpha) = \ell(\beta) = k}} \Delta^*(\alpha) \Delta^*(\beta) \prod_{i=1}^k \frac{D_{\alpha_i, \beta_i}}{\alpha_i! \beta_i!}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь DP' – множество всех строгих разбиений $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$, $\alpha_N > 0$, в которых $\alpha_i > \alpha_{i+1} + 1$, $i = 1, \dots, N - 1$, и

$$(\tilde{\Delta}^*(\alpha))^4 := \prod_{i < j \leq N} \frac{(\alpha_i - \alpha_j)^2 ((\alpha_i - \alpha_j)^2 - 1)}{(\alpha_i + \alpha_j)^2 ((\alpha_i + \alpha_j)^2 - 1)}.$$

Если в приведенных выше выражениях заменить Δ^* на определитель Вандермонда Δ , то в результате полученные суммы (11) можно рассматривать как дискретные аналоги матричных моделей (см. работу [11]).

2.1. Примеры. Приведем несколько примеров применения выписанных выше сумм.

ПРИМЕР 1. Сумма (4) впервые была рассмотрена в работе [12] при исследовании сдвинутой меры Шура.

ПРИМЕР 2. Суммы (2) и (3) можно рассматривать как обобщения гипергеометрических функций на случай многих переменных. Например, обобщение гипергеометрической функции типа ${}_pF_r$ можно получить из выражений (2) и (3), если определить параметры U_n в терминах гамма-функций,

$$U_n = \ln \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(n + a_i)}{\prod_{i=1}^r \Gamma(n + b_i)},$$

для некоторого набора $p + r$ постоянных $\{a_i, b_i\}$. Суммы типа (3) были рассмотрены в работе [13], а суммы типа (2) являются новыми (подробному рассмотрению последнего случая будет посвящена отдельная работа). Можно показать, что и ряд (2), и ряд (3) записываются как пфаффианы матриц, элементы которых выражаются через функции ${}_pF_r$ и обладают многими свойствами обычных гипергеометрических функций ${}_pF_r$. Аналоги базисных (q -деформированных) гипергеометрических функций можно получить схожим образом.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим модели случайных строгих разбиений α , где относительный вес W_α определяется одним из следующих выражений:

$$W_\alpha = A_\alpha^c Q_\alpha \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right), \tag{12}$$

где $A^c = (A, a)$ и $\mathbf{t} = (t_1, t_3, \dots)$ – параметры модели; или

$$W_\alpha = e^{-U_\alpha(\mathbf{t}^*)} Q_\alpha \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right), \quad (13)$$

где параметры имеют вид $\mathbf{t} = (t_1, t_3, \dots)$ и $U = (U_0, U_1, \dots)$; или

$$W_\alpha = e^{-U_\alpha(\mathbf{t}^*)} Q_\alpha \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right) Q_\alpha \left(\frac{\bar{\mathbf{t}}}{2} \right), \quad (14)$$

где $\mathbf{t} = (t_1, t_3, \dots)$, $\bar{\mathbf{t}} = (\bar{t}_1, \bar{t}_3, \dots)$ и $U = (U_0, U_1, \dots)$ – независимые параметры. Заметим, что модели (13) и (14) являются частными случаями модели (12). Ряды S_3 , S_1 и S_2 можно рассматривать как нормировочные множители (статистические суммы) соответственно для моделей (12), (13) и (14). Аналогично ряд S_5 представляет собой статистическую сумму для модели строгих биразбиений.

ПРИМЕР 4. Ряды S_1 и S_2 использовались в работе [14], где рассматривались случайные осциллирующие диаграммы Юнга, связанные со строгими разбиениями.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Фермионное представление этих моделей позволяет вычислить их корреляционные функции стандартным способом (см., например, работы [15]–[18]).

2.2. Нейтральные фермионы. Чтобы построить тау-функции иерархии В-КП и двухкомпонентной иерархии В-КП [6], [7], а также тау-функции их сдвоенных версий (2В-КП), которые мы вводим ниже, нам потребуются *нейтральные свободные фермионы* $\{\phi_i^{(1)}, \phi_i^{(2)}\}_{i \in \mathbb{Z}}$, удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям

$$[\phi_n^{(a)}, \phi_m^{(b)}]_+ = (-1)^n \delta_{n,-m} \delta_{a,b}, \quad a, b = 1, 2.$$

Для однокомпонентных иерархий В-КП и 2В-КП используется только первая компонента $\phi_n := \phi_n^{(1)}$, $n \in \mathbb{Z}$. Выберем фермионное пространство Фока, как в работе [7] (в отличие от работы [6]). А именно, действие нейтральных фермионов на вакуумные состояния определим формулами

$$\phi_n^{(a)} |0\rangle = 0, \quad \langle 0 | \phi_{-n}^{(a)} = 0, \quad n < 0, \quad (15)$$

$$\phi_0^{(a)} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle, \quad \langle 0 | \phi_0^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0|, \quad (16)$$

где соотношения (16) выбраны в соответствии с работой [7] (некоторые подробности связи между работами [6] и [7] можно также найти в приложении А.1 к версии работы [14], находящейся в электронном архиве).

Для линейных комбинаций $w_k = \sum_a \sum_n c_{k,n}^{(a)} \phi_n^{(a)}$, $k = 1, 2, \dots$, из теоремы Вика следует, что для произвольных произведений четного числа полей w_k

$$\begin{aligned} \langle w_1 w_2 \dots w_{2n-1} w_{2n} \rangle &= \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) \langle w_{\sigma(1)} w_{\sigma(2)} \rangle \dots \langle w_{\sigma(2n-1)} w_{\sigma(2n)} \rangle =: \\ &=: \text{Pf} \left((\langle w_i w_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq 2n} \right), \end{aligned}$$

где сумма берется по всем перестановкам из группы перестановок S_{2n} .

Нам также потребуются фермионные поля

$$\phi^{(a)}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n^{(a)} z^n, \quad a = 1, 2. \quad (17)$$

Для вычисления интегралов воспользуемся формулой

$$\langle 0 | \phi^{(b)}(z_1) \phi^{(a)}(z_2) | 0 \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right) \delta_{ab}.$$

Для $m \in \mathbb{N}^+$ из теоремы Вика следует, что

$$\langle 0 | \phi^{(a)}(z_1) \phi^{(a)}(z_2) \dots \phi^{(a)}(z_m) | 0 \rangle = \left(\frac{1}{2} \right)^{m/2} \Delta_m^*(z). \quad (18)$$

Заметим, что вследствие соотношений (16) это вакуумное среднее отлично от нуля при нечетных m .

2.3. Тау-функции иерархии В-КП. Тау-функция сдвоенной двухкомпонентной иерархии 2В-КП может быть определена как

$$\begin{aligned} \tau^{2c-2B-КП}(\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \bar{\mathbf{t}}^{(1)}, \bar{\mathbf{t}}^{(2)}, A) = \\ = \left\langle 0 \left| \Gamma^{(1)}(\mathbf{t}^{(1)}) \Gamma^{(2)}(\mathbf{t}^{(2)}) \exp \left\{ \sum_{a,b} \sum_{n,m} A_{nm}^{a,b} \phi_n^{(a)} \phi_m^{(b)} \right\} \bar{\Gamma}^{(1)}(\bar{\mathbf{t}}^{(1)}) \bar{\Gamma}^{(2)}(\bar{\mathbf{t}}^{(2)}) \right| 0 \right\rangle, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma^{(a)}(\mathbf{t}^{(a)}) &:= \exp \left\{ \sum_{\substack{n \geq 1, \\ n \text{ нечетное}}} B_n^a t_n^{(a)} \right\}, \quad \bar{\Gamma}^{(a)}(\bar{\mathbf{t}}^{(a)}) := \exp \left\{ \sum_{\substack{n \geq 1, \\ n \text{ нечетное}}} B_{-n}^{(a)} \bar{t}_n^{(a)} \right\}, \\ B_n^{(a)} &:= \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^{i+1} \phi_i^{(a)} \phi_{-i-n}^{(a)}. \end{aligned}$$

Последовательность чисел $A = \{A_{nm}^{a,b}, a, b = 1, 2; n, m \in \mathbb{Z}\}$ представляет собой данные, определяющие тау-функцию двухкомпонентной иерархии 2В-КП. Двойка перед обозначением В-КП означает, что мы рассматриваем сдвоенную иерархию, что подразумевает, что тау-функция зависит как от левых, так и от правых наборов времен, обозначаемых соответственно $\mathbf{t}^{(a)}$ $\bar{\mathbf{t}}^{(a)}$, в то время как индекс $a = 1, 2$ помечает номер компоненты времени. Четыре набора независимых параметров, $\mathbf{t}^{(a)} = (t_1^{(a)}, t_3^{(a)}, \dots)$, $\bar{\mathbf{t}}^{(a)} = (\bar{t}_1^{(a)}, \bar{t}_3^{(a)}, \dots)$, $a = 1, 2$, называются высшими временами иерархии. Если зафиксировать любые три набора, то четвертый будет представлять собой высшие времена обычной иерархии В-КП [7]. В этом смысле (19) можно рассматривать как тау-функцию четырех связанных копий иерархии В-КП. Если положить $\bar{\mathbf{t}}^{(1)} = \bar{\mathbf{t}}^{(2)} = 0$, то мы получим двухкомпонентную иерархию В-КП, как это описано в работе [7].

В однокомпонентном случае мы опускаем вторую компоненту и верхние индексы. Тогда тау-функция иерархии 2В-КП принимает вид

$$\tau^{2B-КП}(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \left\langle 0 \left| \Gamma(\mathbf{t}) \exp \left\{ \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} A_{nm} \phi_n \phi_m \right\} \bar{\Gamma}(\bar{\mathbf{t}}) \right| 0 \right\rangle, \quad (20)$$

а тау-функцию обычной нейтральной иерархии В-КП можно записать как

$$\tau^{\text{В-КП}}(\mathbf{t}) = \left\langle 0 \left| \Gamma(\mathbf{t}) \exp \left\{ \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} A_{nm} \phi_n \phi_m \right\} \right| 0 \right\rangle.$$

Замечательный пример тау-функций иерархии В-КП был получен в работе [9], а именно Q -функции Шура Q_α [8]. Их можно выразить через фермионы:

$$\langle 0 | \Gamma(\mathbf{t}) \phi_{\alpha_1} \phi_{\alpha_2} \dots \phi_{\alpha_{2N}} | 0 \rangle = 2^{-\ell(\alpha)/2} Q_\alpha \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right),$$

где $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_{2N} \geq 0$. Набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2N})$ и разбиение α связаны следующим образом: в случае $\alpha_{2N} > 0$ мы имеем $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2N})$ и $\ell(\alpha) = 2N$, а в случае $\alpha_{2N} = 0$ мы имеем $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2N-1})$ и $\ell(\alpha) = 2N - 1$.

2.4. Фермионные представления для сумм. Приведенные выше формулы показывают, что суммы (1)–(6) являются тау-функциями иерархии В-КП. Прежде всего,

$$\begin{aligned} S_3(\mathbf{t}, A^c) &= \sum_{\alpha \in DP} A_\alpha^c Q_\alpha \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right) = \\ &= \left\langle 0 \left| \Gamma(\mathbf{t}) \exp \left\{ 2 \sum_{n>m>0} A_{nm} \phi_n \phi_m + 2 \sum_{n>0} a_n \phi_n \phi_0 \right\} \right| 0 \right\rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

В соответствии с замечанием 1 мы получаем фермионные представления для сумм (1)–(4). В частности,

$$S_0(\mathbf{t}, L) = \sum_{\substack{\alpha \in DP, \\ \alpha_1 \leq L}} Q_\alpha \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right) = \left\langle 0 \left| \Gamma(\mathbf{t}) \exp \left\{ 2 \sum_{L \geq n > m \geq 0} \phi_n \phi_m \right\} \right| 0 \right\rangle, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) &= \sum_{\alpha \in DP} e^{-U_\alpha(\mathbf{t}^*)} Q_\alpha \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right) = \\ &= \left\langle 0 \left| \Gamma(\mathbf{t}) \mathbb{T}(\mathbf{t}^*) \exp \left\{ 2 \sum_{n>m \geq 0} \phi_n \phi_m \right\} \right| 0 \right\rangle, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} S_4(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) &= \sum_{\alpha \in DP^2} e^{-U_\alpha(\mathbf{t}^*)} Q_\alpha \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right) = \\ &= \left\langle 0 \left| \Gamma(\mathbf{t}) \mathbb{T}(\mathbf{t}^*) \exp \left\{ 2 \sum_{n>0} \phi_n \phi_{n+1} \right\} \right| 0 \right\rangle, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\mathbb{T}(\mathbf{t}^*) := \exp \left\{ - \sum_{n>0} (-1)^n U_n(\mathbf{t}^*) \phi_n \phi_{-n} \right\}.$$

Вычисление при $\mathbf{t} = \mathbf{t}_\infty$ дает “солитонное” представление для $S_1(\mathbf{t}_\infty, \mathbf{t}^*)$:

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{t}_\infty, \mathbf{t}^*) &= \\ &= \frac{1}{c} \left\langle 0 \left| \Gamma(\mathbf{t}_+^*) \exp \left\{ 2 \sum_{n>m>0} e^{-U_m^{(0)} - U_n^{(0)}} \phi(m) + 2 \sum_{n>0} e^{-U_n^{(0)}} \phi(n) \phi_0 \right\} \Gamma(\mathbf{t}_-^*) \right| 0 \right\rangle, \end{aligned}$$

где $\phi(n)$ обозначает фермионное поле (17) (доказательство см. в работе [14]). Это показывает, что данный ряд есть тау-функция иерархии 2В-КП относительно высших времен $\mathbf{t}_\pm^*$, определяемых как $\mathbf{t}_+^* := (t_1^*, t_3^*, \dots)$ и $\mathbf{t}_-^* := (-t_{-1}^*, -t_{-3}^*, \dots)$. Здесь $c -$ нормировочный множитель, задаваемый соотношением $\langle 0 | \Gamma(\mathbf{t}_+^*) \Gamma(\mathbf{t}_-^*) | 0 \rangle = b(\mathbf{t}_-^*, \mathbf{t}_+^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Еще одно фермионное представление для (3), (4) было получено в работе [13].

Наконец, получаем

$$S_5(\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, D) = \left\langle 0 \left| \Gamma^{(1)}(\mathbf{t}^{(1)}) \Gamma^{(2)}(\mathbf{t}^{(2)}) \exp \left\{ 2 \sum_{n,m>0} \phi_n^{(1)} \phi_m^{(2)} \right\} \right| 0 \right\rangle. \quad (25)$$

3. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть $d\nu$ – мера с носителем на контуре γ на комплексной плоскости. Выберем в качестве γ один из следующих двух контуров: интервал $0 \leq z < \infty$ на вещественной оси или дуга единичной окружности, задаваемая как $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \theta$, где $0 < \theta < \pi$.

Рассмотрим следующие N -кратные интегралы:

$$\begin{aligned} I_1(N) &:= \int_\gamma \dots \int_\gamma |\Delta^*(z)| \prod_{i=1}^N d\nu(z_i), & I_2(N) &:= \int_\gamma \dots \int_\gamma |\Delta^*(z)|^2 \prod_{i=1}^N d\nu(z_i), \\ I_3(N) &:= \int_\gamma \dots \int_\gamma \Delta^*(z) a^c(\mathbf{z}) \prod_{i=1}^N d\nu(z_i), & I_4(N) &:= \int_\gamma \dots \int_\gamma |\Delta^*(z)|^4 \prod_{i=1}^N d\nu(z_i), \end{aligned}$$

где, как и ранее,

$$\Delta^*(z) = \prod_{i>j}^N \frac{z_i - z_j}{z_i + z_j}.$$

Аналогично (9) через $a^c(\mathbf{z})$ обозначен пфаффиан $\text{Pf}[\tilde{a}]$ антисимметричной матрицы $\tilde{a}$, элементы которой определяются в зависимости от четности N в терминах кососимметричного ядра $a(z, w)$ (возможно, распределения) и функции (или распределения) $a(z)$ следующим образом: для четных $N = 2n$

$$\tilde{a}_{ij} = -\tilde{a}_{ji} := a(z_i, z_j), \quad 1 \leq i < j \leq 2n;$$

для нечетных $N = 2n - 1$

$$\tilde{a}_{ij} = -\tilde{a}_{ji} := \begin{cases} a(z_i, z_j), & \text{если } 1 \leq i < j \leq 2n - 1, \\ a(z_i), & \text{если } 1 \leq i < j = 2n. \end{cases}$$

Кроме того, положим $a_0^c = 1$.

Интегралы I_1 , I_2 и I_4 можно рассматривать как аналоги бета-ансамблей при $\beta = 1, 2, 4$ [4]. Их можно получить как частные случаи I_3 следующим образом. Интеграл $I_1(N)$ является частным случаем $I_3(N)$, где в случае контура γ , заданного как интервал $0 \leq z < \infty$, следует положить $a(z_i, z_j) = \text{sgn}(z_i - z_j)$ и $a(z) = 1$; в случае контура γ , заданного как дуга единичной окружности $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \theta$, следует взять $a(z_k, z_j) = e^{-\pi i/2} \text{sgn}(\varphi_k - \varphi_j)$ и $a(z) = e^{-\pi i/4}$, где $\varphi_i = \arg z_i$. Чтобы доказать это, можно воспользоваться следующим утверждением.

ЛЕММА. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \text{Pf} [\text{sgn}(z_k - z_j)] &= \text{sgn} \Delta^*(z), & z_k \in \mathbb{R}, \\ \text{Pf} [\text{sgn}(\varphi_k - \varphi_j)] &= \text{sgn} (e^{-\pi i(N^2 - N)/4} \Delta^*(z)), & z_k = e^{i\varphi_k}, \end{aligned}$$

где $k, j = 1, \dots, N$.

Интеграл $I_2(N)$ получается из $I_3(N)$, если положить $a(z_i, z_j) = (z_i - z_j)/(z_i + z_j)$ и $a(z) = 1$. В этом случае мы пользуемся тем фактом, что

$$\Delta^*(z) = \text{Pf} \left[\frac{z_i - z_j}{z_i + z_j} \right].$$

Интеграл $I_4(N)$ получается из $I_3(2N)$ следующим образом. В случае контура γ , заданного как интервал $0 \leq z < \infty$, полагаем

$$a(z_i, z_j) = \frac{1}{2} \left(z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \delta(z_i - z_j) - (z_i \leftrightarrow z_j) \right), \quad (26)$$

а в случае контура γ , заданного как дуга единичной окружности $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \theta$, полагаем

$$a(z_i, z_j) = \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \delta(\varphi_i - \varphi_j). \quad (27)$$

Интегралы, содержащие Δ^* , можно сравнить с интегралами, определяющими функции разбиения так называемых суперсимметричных матричных интегралов [19]. Интеграл I_2 определяет статистическую сумму так называемой модели $\hat{A}_0$ [20], модели кулоновского газа с отражением [21], одномерной модели Изинга [22] и корреляционные функции в двумерной модели Изинга [23].

Чтобы связать данные интегралы с иерархией 2В-КП, мы введем деформации $I_i(N) \mapsto I_i(N; \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$ посредством следующей деформации меры:

$$d\nu(z) \mapsto d\nu(z | \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = b(\mathbf{t}, \{z\}) b(-\bar{\mathbf{t}}, \{z^{-1}\}) d\nu(z),$$

где

$$b(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \exp \left\{ \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{n}{2} s_n t_n \right\}, \quad \{z\} = \left(2z, \frac{2z^3}{3}, \frac{2z^5}{5}, \dots \right). \quad (28)$$

Ниже будет показано, что производящий ряд, полученный путем пуассонизации (статистическая сумма большого канонического ансамбля)

$$Z_i(\mu; \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = b(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) \sum_{N=0}^{\infty} I_i(N; \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) \frac{\mu^N}{N!}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

представляет собой частный случай тау-функций (20) иерархии 2В-КП.

Рассмотрим также следующие $2N$ -кратные интегралы:

$$I_5(N; \mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \bar{\mathbf{t}}^{(1)}, \bar{\mathbf{t}}^{(2)}) := \int \Delta_N^*(z) \Delta_N^*(y) \prod_{i=1}^N d\nu(z_i, y_i | \mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \bar{\mathbf{t}}^{(1)}, \bar{\mathbf{t}}^{(2)}),$$

где

$$\begin{aligned} d\nu(z, y | \mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \bar{\mathbf{t}}^{(1)}, \bar{\mathbf{t}}^{(2)}) = \\ = b(\mathbf{t}^{(1)}, \{z\}) b(-\bar{\mathbf{t}}^{(1)}, \{z^{-1}\}) b(\mathbf{t}^{(2)}, \{y\}) b(-\bar{\mathbf{t}}^{(2)}, \{y^{-1}\}) d\nu(z, y) \end{aligned}$$

(здесь $d\nu(z, y)$ – произвольная бимера), и покажем, что производящий ряд

$$Z_5(\mu; \mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \bar{\mathbf{t}}^{(1)}, \bar{\mathbf{t}}^{(2)}) = b(\mathbf{t}^{(1)}, \bar{\mathbf{t}}^{(1)}) b(\mathbf{t}^{(2)}, \bar{\mathbf{t}}^{(2)}) \sum_{N=0}^{\infty} I_5(N; \mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \bar{\mathbf{t}}^{(1)}, \bar{\mathbf{t}}^{(2)}) \frac{\mu^N}{N!}$$

является частным случаем тау-функции (19) двухкомпонентной иерархии 2В-КП.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если

$$d\nu(z, y) = \delta(z - y) d\nu(z) d\nu(y), \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}^{(1)} + \mathbf{t}^{(2)}, \quad \bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{t}}^{(1)} + \bar{\mathbf{t}}^{(2)},$$

то

$$Z_2(\mu; \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = Z_5(\mu; \mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \bar{\mathbf{t}}^{(1)}, \bar{\mathbf{t}}^{(2)}).$$

Интегралы $Z_1(\mu; \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$, $Z_2(\mu; \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$, $Z_4(\mu; \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$ и $Z_5(\mu; \mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \bar{\mathbf{t}}^{(1)}, \bar{\mathbf{t}}^{(2)})$ можно получить как пределы по непрерывности сумм $S_1(\mathbf{t}_{\infty}, \mathbf{t}^*)$, $S_2(\mathbf{t}_{\infty}, \mathbf{t}_{\infty}, \mathbf{t}^*)$, $S_4(\mathbf{t}_{\infty}, \mathbf{t}^*)$ и $S_5(\mathbf{t}_{\infty}, \mathbf{t}_{\infty}, \mathbf{t}^*)$ соответственно.

Фермионное представление интегралов. Чтобы получить фермионное представление для приведенных выше интегралов, применим соотношение (18). Разлагая экспоненты и применяя теорему Вика к каждому слагаемому в сумме, получаем

$$\begin{aligned} Z_3(\mu; \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \left\langle 0 \left| \Gamma(\mathbf{t}) \exp \left\{ \mu^2 \int_{\gamma} \int_{\gamma} a(z, y) \phi(z) \phi(y) d\nu(z) d\nu(y) \right\} \times \right. \right. \\ \left. \times \exp \left\{ 2\mu \int_{\gamma} a(z) \phi(z) \phi_0 d\nu(z) \right\} \bar{\Gamma}(\bar{\mathbf{t}}) \right| 0 \rangle. \end{aligned} \quad (29)$$

Заметим, что выражение

$$Z_3(0; \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = b(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \langle 0 | \Gamma(\mathbf{t}) \bar{\Gamma}(\bar{\mathbf{t}}) | 0 \rangle$$

было выписано выше в (28). В частности, получаем

$$\begin{aligned} Z_1(\mu; \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \left\langle 0 \left| \Gamma(\mathbf{t}) \exp \left\{ \mu^2 q^2 \int_{\gamma} \int_{\gamma} \operatorname{sgn}(\varsigma(z) - \varsigma(y)) \phi(z) \phi(y) d\nu(z) d\nu(y) \right\} \times \right. \right. \\ \left. \times \exp \left\{ 2\mu q \int_{\gamma} \phi(z) \phi_0 d\nu(z) \right\} \bar{\Gamma}(\bar{\mathbf{t}}) \right| 0 \rangle, \end{aligned} \quad (30)$$

где в случае, когда контуром интегрирования является $\mathbb{R}_+$, имеем $q = 1$ и $\varsigma(z) = z$, $z \in \gamma$; а в случае, когда контур интегрирования есть дуга $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \theta$, мы имеем $q = e^{-\pi i/4}$ и $\varsigma(z) = \varphi$.

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} Z_2(\mu; \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \left\langle 0 \left| \Gamma(\mathbf{t}) \exp \left\{ \mu^2 \int_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{z - y}{z + y} \phi(z) \phi(y) d\nu(z) d\nu(y) \right\} \times \right. \right. \\ \left. \times \exp \left\{ 2\mu \int_{\gamma} \phi(z) \phi_0 d\nu(z) \right\} \bar{\Gamma}(\bar{\mathbf{t}}) \right| 0 \rangle. \end{aligned}$$

В качестве конкретизации выражения (29), выбрав $a(z, w)$ аналогично (26) и положив $a(z) = 0$, имеем

$$Z_4(\mu; \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \left\langle 0 \left| \Gamma(\mathbf{t}) \exp \left\{ 4\mu \int_{\gamma} z \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} \phi(z) d\nu(z) \right\} \bar{\Gamma}(\bar{\mathbf{t}}) \right| 0 \right\rangle. \quad (31)$$

Наконец, в терминах двухкомпонентных фермионов получаем

$$Z_5(\mu; \mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \bar{\mathbf{t}}^{(1)}, \bar{\mathbf{t}}^{(2)}) = \frac{1}{c} \left\langle 0 \left| \Gamma^{(1)}(\mathbf{t}^{(1)}) \Gamma^{(2)}(\mathbf{t}^{(2)}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp \left\{ 2\mu \iint \phi^{(1)}(z) \phi^{(2)}(y) d\nu(z, y) \right\} \bar{\Gamma}^{(1)}(\bar{\mathbf{t}}^{(1)}) \bar{\Gamma}^{(2)}(\bar{\mathbf{t}}^{(2)}) \right| 0 \right\rangle, \quad (32)$$

где $c := Z_5(0; \mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \bar{\mathbf{t}}^{(1)}, \bar{\mathbf{t}}^{(2)})$ – нормировочный множитель.

Формулы (29), (30), (31) и (32) нужно сравнить с формулами (21), (23), (24) и (25) соответственно. Фермионные представления интегралов Z_1 и Z_4 аналогичны результатам, полученным в работе [24] для ансамблей вещественных симметричных и самодуальных кватернионных случайных матриц. Фермионное представление (32) следует сравнить с фермионным представлением для статистической суммы двухматричной модели, полученным в работе [25].

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Представлены пять типов кратных сумм и кратных интегралов, связанных с тау-функциями иерархий В-КП (с тау-функциями иерархии В-КП и двухкомпонентной иерархии В-КП для кратных сумм, с тау-функциями иерархии 2В-КП и двухкомпонентной иерархии 2В-КП для кратных интегралов). Известно, что некоторые из этих сумм и интегралов имеют применения в математике и физике; мы полагаем, что все их можно использовать в различных вероятностных моделях. Технику вычислений свободных фермионов и интегрируемых систем можно применить для изучения различных свойств этих сумм и интегралов. Тау-функции многокомпонентной иерархии В-КП [7] можно затем использовать для построения моделей пфаффиановых процессов (ср. [26]). Результаты настоящей работы следует сравнить с аналогичными результатами для случая так называемой заряженной иерархии В-КП [7], исследованного в работе [24]. Это также будет предметом наших дальнейших исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Применение интеграла $Z_2(N)$

Исследовать некоторые вопросы, рассмотренные в настоящей работе, нас побудили следующие наблюдения, сообщенные нам Г. Браденом [23].

Применение интегралов Z_2 относится к модели Изинга для корреляционной функции, когда имеется возмущение относительно критической температуры. В скейлинговом пределе это описывается системой майорановских фермионов и устанавливает связь с рассматриваемым фермионным представлением. Маккой, Трейси и Ву показали, что этот предел описывается теорией массивного ($m = T - T_c$) поля, корреляции которого подчиняются радиальному уравнению sh-Гордон, представляющему

собой при замене параметров уравнение Пенлеве III. Другой подход к тому же коррелятору заключается в использовании формфактора. Этот подход дает коррелятор в терминах бесконечной суммы кратных интегралов. Для рассматриваемого случая мы имеем евклидову корреляционную функцию типа

$$\begin{aligned} G(r) &:= \langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(0) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{\prod_{i=1}^n d\beta_i}{n! (2\pi)^n} \langle 0 | \mathcal{O}(x) | \beta_1 \dots \beta_n \rangle \langle \beta_n \dots \beta_1 | \mathcal{O}(0) | 0 \rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{\prod_{i=1}^n d\beta_i}{n! (2\pi)^n} |F_n(\beta_1 \dots \beta_n)|^2 \exp\left(-mr \sum_{i=1}^n \text{ch } \beta_i\right). \end{aligned}$$

Здесь β_i – быстроты, $x = (x_0, x_1)$, $r = \sqrt{x_0^2 + x_1^2}$. Если использовать минимальный формфактор

$$F_n^{\min}(\beta_1 \dots \beta_n) = \prod_{i < j} \text{th} \left(\frac{\beta_i - \beta_j}{2} \right)$$

и подходящие нормировки, то получим

$$G\left(\frac{r}{m}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\frac{dx_i}{x_i} e^{-r(x_i+1/x_i)} \right) \prod_{i < j} \left(\frac{x_i - x_j}{x_i + x_j} \right)^2.$$

Поскольку коррелятор никак не конкретизирован, нас также интересует

$$G_{\pm}\left(\frac{r}{m}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\pm 1)^n}{(2\pi)^n} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\frac{dx_i}{x_i} e^{-r(x_i+1/x_i)} \right) \prod_{i < j} \left(\frac{x_i - x_j}{x_i + x_j} \right)^2. \quad (33)$$

Тождество

$$\det \left(\frac{1}{x_i + x_j} \right) = \frac{1}{2^n x_1 \dots x_n} \prod_{i < j} \left(\frac{x_i - x_j}{x_i + x_j} \right)^2$$

дает связь с определителем Фредгольма. Трудность заключается в том, чтобы получить сходящееся разложение выражения (33). Первое слагаемое записывается в терминах $K_0(r)$. Такое разложение даст (частное) решение уравнения Пенлеве.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Т. Шиоте и Дж. Дж. С. Ниммо за полезные обсуждения. А.Ю. Орлов благодарит А. Одзиевича за гостеприимство во время его пребывания в Белостоке в июне 2005 года. А.Ю. Орлов и Й. В. ван де Лёр благодарят Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal (Montréal, Canada) за гостеприимство во время их пребывания там в январе 2006 года, когда была написана основная часть настоящей работы. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Евросоюза в рамках Программы FP6 Marie Curie RTN ENIGMA (контракт № MRTN-СТ-2004-5652) и Программы MISGAM 8 Европейского научного фонда, а также Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada и Fonds FCAR du Québec (Canada); поддержана Программой РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” и РФФИ (гранты № 09-01-92437-KE_a и 08-01-00501).

Список литературы

- [1] A. Okounkov, “The uses of random partitions”, *XIVth International Congress on Mathematical Physics*, eds. J.-C. Zambrini, World Sci., Hackensack, NJ, 2005, 379–403, arXiv: math-ph/0309015.
- [2] M. E. Fisher, *J. Stat. Phys.*, **34**:5–6 (1984), 667–729.
- [3] P. J. Forrester, *Log-Gases and Random Matrices*, London Math. Soc. Monogr. Ser., **34**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2010.
- [4] M. L. Mehta, *Random Matrices*, Pure Appl. Math., **142**, Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [5] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, *Physica D*, **4**:3 (1982), 343–365.
- [6] M. Jimbo, T. Miwa, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, **19**:3 (1983), 943–1001.
- [7] V. G. Kac, J. van de Leur, “The geometry of spinors and the multicomponent BKP and DKP hierarchies”, *The Bispectral Problem*, CRM Proc. Lect. Notes, **14**, eds. J. Harnad, A. Kasman, AMS, Providence, RI, 1998, 159–202.
- [8] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985.
- [9] Y. You, “Polynomial solutions of the BKP hierarchy and projective representations of symmetric groups”, *Infinite-dimensional Lie Algebras and Groups*, Adv. Ser. Math. Phys., **7**, eds. V. G. Kac, World Sci., Teaneck, NJ, 1989, 449–464.
- [10] J. J. C. Nimmo, *J. Phys. A*, **23**:5 (1990), 751–760.
- [11] A. Yu. Orlov, T. Shiota, *Phys. Lett. A*, **343**:5 (2005), 384–396, arXiv: math-ph/0501017.
- [12] C. A. Tracy, H. Widom, *Duke Math. J.*, **123**:1 (2004), 171–208, arXiv: math.PR/0210255.
- [13] А. Ю. Орлов, *ТМФ*, **137**:2 (2003), 253–270, arXiv: math-ph/0302011.
- [14] J. W. van de Leur, A. Yu. Orlov, *Phys. Lett. A*, **373**:31 (2009), 2675–2681, arXiv: 0801.0066.
- [15] A. Okounkov, “SL(2) and z -measures”, *Random Matrix Models and Their Applications*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **40**, eds. P. Bleher, A. Its, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, 407–420, arXiv: math.RT/0002135.
- [16] O. Foda, M. Wheeler, M. Zuparic, *J. Algebra*, **321**:11 (2009), 3249–3273, arXiv: 0808.2737.
- [17] M. Vuletić, *Int. Math. Res. Not.*, **2007**:14 (2007), 043, 53 pp., arXiv: math-ph/0702068.
- [18] Дж. Харнад, А. Ю. Орлов, *ТМФ*, **158**:1 (2009), 23–48.
- [19] T. Guhr, *J. Math. Phys.*, **32**:2 (1991), 336–347.
- [20] I. K. Kostov, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **45**:1 (1996), 13–28, arXiv: hep-th/9509124.
- [21] I. Loutsenko, V. Spiridonov, *J. Stat. Phys.*, **99**:3–4 (2000), 751–767, arXiv: cond-mat/9909308.
- [22] I. M. Loutsenko, V. P. Spiridonov, *SIGMA*, **3** (2007), 059, 11 pp., arXiv: 0704.3173.
- [23] Г. Браден, *частное сообщение*, 2006.
- [24] J. van de Leur, *J. Nonlin. Math. Phys.*, **8**:2 (2001), 288–311, arXiv: solv-int/9909028.
- [25] J. Harnad, A. Yu. Orlov, *J. Phys. A*, **39**:28 (2006), 8783–8809, arXiv: math-ph/0512056.
- [26] Дж. Харнад, А. Ю. Орлов, *ТМФ*, **152**:2 (2007), 265–277, arXiv: 0704.1145.