Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Г. Конопельченко, Л. Мартинес Алонсо, Е. Медина,
Сингулярные секторы однослойной системы Бенни; без-
дисперсионные системы Тоды и соотношения между ни-
ми, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 1, 125–137

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6668>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:12:04

© 2011 г. Б. Г. Конопельченко*, Л. Мартинес Алонсо†,
Е. Медина‡

СИНГУЛЯРНЫЕ СЕКТОРЫ ОДНОСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ БЕННИ; БЕЗДИСПЕРСИОННЫЕ СИСТЕМЫ ТОДЫ И СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НИМИ

Представлено полное описание сингулярных секторов однослойной системы Бенни (классическое уравнение длинных волн) и бездисперсионной системы Тоды. Основным инструментом анализа являются ассоциированные уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу $E(1/2, 1/2)$ и $E(-1/2, -1/2)$. Представлен полный список решений для однослойной системы Бенни, зависящей от двух параметров и принадлежащей сингулярному сектору. Обсуждается соотношение между уравнениями Эйлера–Пуассона–Дарбу $E(\varepsilon, \varepsilon)$ с противоположным знаком ε .

Ключевые слова: критические точки, сингулярный сектор, уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу.

1. ВВЕДЕНИЕ

Однослойная система Бенни (классическое уравнение длинных волн)

$$u_t + uu_x + v_x = 0, \quad v_t + (uv)_x = 0 \quad (1)$$

и бездисперсионное уравнение Тоды $v_{xx} = (\ln v)_{tt}$ или, эквивалентно, система

$$u_t + v_x = 0, \quad v_t + vu_x = 0 \quad (2)$$

представляют собой две важные интегрируемые системы гидродинамического типа (см., например, работы [1], [2]). Однослойная система Бенни описывает длинные волны в мелкой воде со свободной поверхностью в гравитационном поле. Она является бездисперсионным пределом нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [3]. Недавно однослойная система Бенни $B(1)$ стала важным элементом анализа универсальности критического поведения для нелинейных уравнений [4]. Бездисперсионное уравнение Тоды представляет собой $(1+1)$ -мерный вариант уравнения

*Dipartimento di Fisica, Università del Salento and Sezione INFN, Lecce, Italy.
E-mail: Boris.Konopeltchenko@le.infn.it

†Departamento de Física Teórica II, Universidad Complutense, Madrid, Spain

‡Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, Puerto Real, Cádiz, Spain

Бойера–Финли из общей теории относительности [5]. Оно появляется в различных задачах механики жидкостей (см., например, работу [6]). Кроме того, известно [7], что уравнения годографа бездисперсионной иерархии Тоды определяют в пересечении больших N эрмитову модель в теории случайных матриц. В общем, эти две системы представляют собой превосходную лабораторию для изучения свойств интегрируемых систем гидродинамического типа.

В настоящей работе мы анализируем структуру системы уравнений годографа $B(1)$ -иерархии и бездисперсионной иерархии Тоды в терминах их римановых инвариантов. Соответствующие решения годографа описывают критические точки

$$\frac{\partial W}{\partial \beta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

функции $W = W(\mathbf{t}, \beta_1, \beta_2)$, которая линейно зависит от координат $\mathbf{t}$, где $\mathbf{t}$ – параметры потока для иерархии Бенни и бездисперсионной иерархии Тоды соответственно, и удовлетворяют уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД) $E(\varepsilon, \varepsilon)$ [8]:

$$(\beta_1 - \beta_2) \frac{\partial^2 W}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} = \varepsilon \left(\frac{\partial W}{\partial \beta_1} - \frac{\partial W}{\partial \beta_2} \right), \quad (4)$$

где для системы Бенни $\varepsilon = 1/2$, а для бездисперсионной системы Тоды $\varepsilon = -1/2$. Уравнение (4) и его многомерный вариант давно известны в классической геометрии [8]. Его применимость к теории уравнений Уизема была недавно показана в работах [9]–[11]. В настоящей работе мы будем использовать классические обозначения $E(\varepsilon, \mu)$ для уравнений ЭПД, предложенные в работе [8], где также рассматривались эти уравнения с различными ε и μ .

Если обозначить через $\mathcal{M}$ множество решений $(\mathbf{t}, \beta)$, $\beta_1 \neq \beta_2$, уравнений годографа (3), можно выделить регулярный и сингулярный секторы в $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\text{reg}} \cup \mathcal{M}^{\text{sing}},$$

такие, что для заданных $(\mathbf{t}, \beta) \in \mathcal{M}$ $(\mathbf{t}, \beta) \in \mathcal{M}^{\text{reg}}$, если $\det(\partial^2 W(\mathbf{t}, \beta)/\partial \beta_i \partial \beta_j) \neq 0$, и $(\mathbf{t}, \beta) \in \mathcal{M}^{\text{sing}}$, если $\det(\partial^2 W(\mathbf{t}, \beta)/\partial \beta_i \partial \beta_j) = 0$. Элементы из $\mathcal{M}^{\text{reg}}$ соответствуют случаю, когда система (3) однозначно разрешима, и тем самым определено единственное решение $\beta(\mathbf{t})$. Сингулярный класс $\mathcal{M}^{\text{sing}}$ представляет вырожденные критические точки функции W – точки, в которых неявные решения $\beta(\mathbf{t})$ уравнений годографа демонстрируют поведение “градиентной катастрофы”. Как будет показано в настоящей работе, уравнения ЭПД важны при анализе структуры $\mathcal{M}^{\text{sing}}$. В качестве иллюстрации общего результата представлен полный список решений однослойной иерархии Бенни из $\mathcal{M}^{\text{sing}}$, зависящих от двух параметров. Кроме того, рассматриваются соотношения между уравнениями ЭПД с противоположными значениями a и уравнениями ЭПД для симметрий и плотностей интегралов движения для интегрируемых систем гидродинамического типа.

2. ОДНОСЛОЙНАЯ ИЕРАРХИЯ БЕННИ И ЕЕ СИНГУЛЯРНЫЙ СЕКТОР

Система $B(1)$ (1) представляет собой член бездисперсионной интегрируемой иерархии деформаций кривой (см., например, работы [12], [13])

$$p^2 = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2), \quad (5)$$

где $u = -(\beta_1 + \beta_2)$, $v = (\beta_1 + \beta_2)^2/4$. Потоки $\beta(t)$ характеризуются следующим условием: существует семейство функций $S(\lambda, t, \beta)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\partial_{t_n} S(\lambda, t, \beta(t)) = \Omega_n(\lambda, \beta(t)), \quad n \geq 1, \quad (6)$$

где

$$\Omega_n(\lambda, \beta) = \left(\frac{\lambda^n}{\sqrt{(\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)}} \right)_{\oplus} \sqrt{(\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)}. \quad (7)$$

Здесь $\oplus$ обозначает стандартную проекцию на положительные степени λ . Функции S , удовлетворяющие уравнениям (6), известны в теории бездисперсионных интегрируемых систем как *функции действия* [14]. Заметим, что при $n = 1$ эти уравнения можно записать в виде

$$p = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad x := t_1,$$

так что система (6) эквивалентна системе

$$\partial_{t_n} p = \partial_x \Omega_n. \quad (8)$$

В терминах инвариантов Римана β ее можно переписать в гидродинамическом виде:

$$\partial_{t_n} \beta_i = \left(\frac{\lambda^n}{\sqrt{(\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)}} \right)_{\oplus} \Big|_{\lambda=\beta_i} \partial_x \beta_i, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

t_2 -Поток этой иерархии является $B(1)$ -системой (1) ($t := t_2$):

$$\begin{cases} \partial_t \beta_1 = \frac{1}{2}(3\beta_1 + \beta_2)\beta_{1x}, \\ \partial_t \beta_2 = \frac{1}{2}(3\beta_2 + \beta_1)\beta_{2x}. \end{cases} \quad (10)$$

При $v > 0$ $B(1)$ -система является гиперболической, а при $v < 0$ – эллиптической.

В работе [15] было доказано, что система (3) для критических точек функции

$$W(t, \beta) := \oint_{\gamma} \frac{d\lambda}{2i\pi} \frac{V(\lambda, t)}{\sqrt{(\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)}}, \quad (11)$$

где $V(\lambda, t) = \sum_{n \geq 1} t_n \lambda^n$, представляет собой систему уравнений годографа для иерархии Бенни. Более того, функция действия для соответствующих решений имеет вид

$$S(\lambda, t, \beta) = \sum_{n \geq 1} t_n \Omega_n(\lambda, \beta) = h(\lambda, t, \beta) \sqrt{(\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)}, \quad (12)$$

где

$$h(\lambda, t, \beta) := \left(\frac{V(\lambda, t)}{\sqrt{(\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)}} \right)_{\oplus}.$$

Очевидно, что функция W удовлетворяет уравнению ЭПД $E(1/2, 1/2)$.

В явной записи W представляет собой ряд

$$W = \frac{x}{2}(\beta_1 + \beta_2) + \frac{t_2}{8}(3\beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2 + 3\beta_2^2) + \frac{t_3}{16}(5\beta_1^3 + 3\beta_1^2\beta_2 + 3\beta_1\beta_2^2 + 5\beta_2^3) + \\ + \frac{t_4}{128}(35\beta_1^4 + 20\beta_1^3\beta_2 + 18\beta_1^2\beta_2^2 + 20\beta_1\beta_2^3 + 35\beta_2^4) + \dots \quad (13)$$

Уравнения годографа (3) при $t_n = 0$ для $n \geq 5$ принимают вид

$$8x + 4t_2(3\beta_1 + \beta_2) + 3t_3(5\beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_2^2) + \\ + \frac{t_4}{8}(140\beta_1^3 + 60\beta_1^2\beta_2 + 18\beta_1\beta_2^2 + 20\beta_2^3) = 0, \\ 8x + 4t_2(\beta_1 + 3\beta_2) + 3t_3(\beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2 + 5\beta_2^2) + \\ + \frac{t_4}{8}(140\beta_2^3 + 60\beta_2^2\beta_1 + 18\beta_2\beta_1^2 + 20\beta_1^3) = 0. \quad (14)$$

Подробный анализ уравнений (14) будет представлен в разделе 3, а сейчас мы сделаем два наблюдения. Первое состоит в том, что формулы (14) указывают на возможную альтернативную интерпретацию времен $t_2, t_3, t_4, \dots$ $B(1)$ -иерархии. А именно, полагая $t_2 = 0$ в формулах (14), мы видим, что t_3 и t_4 являются параметрами, появляющимися в начальных данных $\beta_1(x, t_2 = 0)$ и $\beta_2(x, t_2 = 0)$. Таким образом, можно рассматривать уравнения годографа (3) (в частности, уравнения (14)) как уравнения, описывающие временную эволюцию семейств начальных данных для $B(1)$ -системы, параметризованной переменными $t_3, t_4, t_5, \dots$.

Второе наблюдение касается эллиптического варианта $B(1)$ -системы. В этом случае $\beta_2 = \bar{\beta}_1$, и система (10) сводится к одному уравнению

$$\partial_t \beta = \frac{1}{2}(3\beta + \bar{\beta})\beta_x, \quad t := t_2, \quad \beta := \beta_1. \quad (15)$$

Это уравнение эквивалентно нелинейному уравнению Бельтрами

$$\beta_z = \frac{2i - 3\beta - \bar{\beta}}{2i + 3\beta + \bar{\beta}}\beta_z, \quad (16)$$

где $z = x + it$. Этот факт указывает на то, что теория квазиконформных отображений (см., например, работу [16]) может быть актуальной для анализа свойств эллиптической $B(1)$ -системы (1) ($v < 0$). Поэтому ввиду того, что эллиптическая $B(1)$ -система представляет собой квазиклассический предел [3] фокусирующего НУШ

$$i\epsilon\psi_t + \frac{\epsilon^2}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0,$$

где $\psi = Ae^{iS/\epsilon}$, $u = (\epsilon/(2i))(\psi_x/\psi - \bar{\psi}_x/\bar{\psi})$, $v = -|\psi|^2$ и $\epsilon \rightarrow 0$, квазиконформное отображение также может быть полезным при исследовании предела малой дисперсии фокусирующего НУШ (ср. с работой [4]).

Для анализа сингулярного сектора однослойной иерархии Бенни заметим сначала, что согласно уравнению ЭПД при заданных $(t, \beta) \in \mathcal{M}$ как следствие формулы (4) имеем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} = 0. \quad (17)$$

Следовательно,

$$\det \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right) = \frac{\partial^2 W}{\partial \beta_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta_2^2}. \quad (18)$$

Таким образом получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При заданном $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{M}$:

- 1) $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{M}^{\text{reg}}$, если и только если $\partial^2 W / \partial \beta_1^2 \neq 0$ и $\partial^2 W / \partial \beta_2^2 \neq 0$;
- 2) $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{M}^{\text{sing}}$, если и только если по крайней мере одна из производных $\partial^2 W / \partial \beta_1^2$, $\partial^2 W / \partial \beta_2^2$ обращается в нуль.

Более того, используя уравнения (4), нетрудно получить, что в любой точке $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{M}$ все смешанные производные $\partial_{\beta_1}^i \partial_{\beta_2}^j W$ можно выразить в терминах линейной комбинации производных $\partial_{\beta_1}^n W$ и $\partial_{\beta_2}^m W$. Поэтому, определяя $\mathcal{M}_{n_1, n_2}^{\text{sing}}$ как множество таких точек $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{M}$, что

$$\frac{\partial^{n_i+2} W}{\partial \beta_i^{n_i+2}} \neq 0, \quad \frac{\partial^k W}{\partial \beta_i^k} = 0 \quad \text{для всех } 1 \leq k \leq n_i + 1, \quad i = 1, 2, \quad (19)$$

получаем

$$\mathcal{M}^{\text{sing}} = \bigcup_{n_1 + n_2 \geq 1} \mathcal{M}_{n_1, n_2}^{\text{sing}},$$

где

$$\mathcal{M}_{n_1, n_2}^{\text{sing}} \cap \mathcal{M}_{n'_1, n'_2}^{\text{sing}} = \emptyset$$

при $(n_1, n_2) \neq (n'_1, n'_2)$. Можно охарактеризовать классы $\mathcal{M}_{n_1, n_2}^{\text{sing}}$ сингулярного сектора в терминах того, как $S(\lambda)$ ведет себя при $\lambda = \beta_i$, $i = 1, 2$. Действительно, производная $\partial_{\beta_1}^{k+1} W$ при $k \geq 1$ пропорциональна интегралу

$$\oint_{\gamma} \frac{d\lambda}{2i\pi} \frac{V(\lambda, \mathbf{t})}{(\lambda - \beta_1)^{k+1} \sqrt{(\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)}} = \oint_{\gamma} \frac{d\lambda}{2i\pi} \frac{h(\lambda)}{(\lambda - \beta_1)^{k+1}} = \frac{1}{k!} (\partial_{\lambda}^k h(\lambda))|_{\lambda=\beta_1},$$

и аналогичный результат получается для производных $\partial_{\beta_2}^{k+1} W$ при $k \geq 2$. Как следствие, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Точка $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{M}$ принадлежит сингулярному классу $\mathcal{M}_{n_1, n_2}^{\text{sing}}$, если и только если

$$S(\lambda, \mathbf{t}, \boldsymbol{\beta}) \sim (\lambda - \beta_i)^{(2n_i+3)/2} \quad \text{при } \lambda \rightarrow \beta_i, \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

3. ЯВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ СЕКТОРОВ

Нетрудно видеть, что сингулярные классы $\mathcal{M}_{n_1, n_2}^{\text{sing}}$ определяются системой $n_1 + n_2$ связей, наложенных на координаты $\mathbf{t}$. Действительно, точки $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\beta})$ из $\mathcal{M}_{n_1, n_2}^{\text{sing}}$ характеризуются уравнениями

$$\frac{\partial^k W}{\partial \beta_i^k} = 0 \quad \text{для всех } 1 \leq k \leq n_i + 1, \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

и

$$\frac{\partial^{n_i+2} W}{\partial \beta_i^{n_i+2}} \neq 0, \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

Теперь заметим, что якобиан матричной системы из двух уравнений

$$\frac{\partial^{n_i+1}W}{\partial\beta_i^{n_i+1}} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

не сингулярен:

$$\Delta := \begin{vmatrix} \frac{\partial^{n_1+2}W}{\partial\beta_1^{n_1+2}} & \frac{\partial^{n_2+2}W}{\partial\beta_1 \partial\beta_2^{n_2+1}} \\ \frac{\partial^{n_1+2}W}{\partial\beta_1^{n_1+1} \partial\beta_2} & \frac{\partial^{n_2+2}W}{\partial\beta_2^{n_2+2}} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (24)$$

Действительно, отметим, что вследствие уравнений (4) производные вне диагонали в Δ являются линейными комбинациями производных $\{\partial_{\beta_i}^k W, 1 \leq k \leq n_i + 1, i = 1, 2\}$, из формул (21), (22) получаем

$$\Delta = \frac{\partial^{n_1+2}W}{\partial\beta_1^{n_1+2}} \frac{\partial^{n_2+2}W}{\partial\beta_2^{n_2+2}} \neq 0.$$

Поэтому можно решить систему (23) и получить решение $\beta(t)$. Его подстановка в оставшиеся уравнения (21) дает $n_1 + n_2$ связей вида

$$f_k(t) = 0, \quad k = 1, \dots, n_1 + n_2.$$

Нетрудно найти решения уравнений (21), (22) в двух простых случаях: с одним параметром t_3 ($t_4 = t_5 = \dots = 0$) и с двумя параметрами t_3, t_4 ($t_5 = t_6 = \dots = 0$). Получаем

$$\mathcal{M}^{\text{sing}} = \mathcal{M}_{10}^{\text{sing}} \cup \mathcal{M}_{01}^{\text{sing}},$$

где $\mathcal{M}_{10}^{\text{sing}}$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} 1) \quad & x = \frac{-45t_4t_3^3 + 180t_2t_4^2t_3 + \sqrt{15}(8t_2t_4 - 3t_3^2)\sqrt{t_4^2(3t_3^2 - 8t_2t_4)}}{360t_4^3}, \\ & \beta_1 = -\frac{5t_3t_4 + \sqrt{15}\sqrt{t_4^2(3t_3^2 - 8t_2t_4)}}{20t_4^2}, \quad \beta_2 = \frac{-3t_3t_4 + \sqrt{15}\sqrt{t_4^2(3t_3^2 - 8t_2t_4)}}{12t_4^2}, \\ 2) \quad & x = \frac{-45t_4t_3^3 + 180t_2t_3^2t_3 - \sqrt{15}(8t_2t_4 - 3t_3^2)\sqrt{t_4^2(3t_3^2 - 8t_2t_4)}}{360t_4^3}, \\ & \beta_1 = \frac{-5t_3t_4 + \sqrt{15}\sqrt{t_4^2(3t_3^2 - 8t_2t_4)}}{20t_4^2}, \quad \beta_2 = -\frac{3t_3t_4 + \sqrt{15}\sqrt{t_4^2(3t_3^2 - 8t_2t_4)}}{12t_4^2}, \end{aligned}$$

$\mathcal{M}_{01}^{\text{sing}}$ определяется как

$$\begin{aligned} 1) \quad & x = \frac{-45t_4t_3^3 + 180t_2t_4^2t_3 - \sqrt{15}(8t_2t_4 - 3t_3^2)\sqrt{t_4^2(3t_3^2 - 8t_2t_4)}}{360t_4^3}, \\ & \beta_1 = -\frac{3t_3t_4 + \sqrt{15}\sqrt{t_4^2(3t_3^2 - 8t_2t_4)}}{12t_4^2}, \quad \beta_2 = \frac{-5t_3t_4 + \sqrt{15}\sqrt{t_4^2(3t_3^2 - 8t_2t_4)}}{20t_4^2}, \\ 2) \quad & x = \frac{-45t_4t_3^3 + 180t_2t_4^2t_3 + \sqrt{15}(8t_2t_4 - 3t_3^2)\sqrt{t_4^2(3t_3^2 - 8t_2t_4)}}{360t_4^3}, \\ & \beta_1 = \frac{-3t_3t_4 + \sqrt{15}\sqrt{t_4^2(3t_3^2 - 8t_2t_4)}}{12t_4^2}, \quad \beta_2 = -\frac{5t_3t_4 + \sqrt{15}\sqrt{t_4^2(3t_3^2 - 8t_2t_4)}}{20t_4^2}. \end{aligned}$$

4. СИНГУЛЯРНЫЙ СЕКТОР ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ $B(1)$ -СИСТЕМЫ

Теперь рассмотрим эллиптическую $B(1)$ -систему (1). Сингулярный сектор $\mathcal{M}^{\text{sing}}$ в этом случае имеет структуру, отличную от таковой для гиперболической системы. Действительно, поскольку $\beta_1 = \bar{\beta}_2$, функция W при вещественных $x, t_2, t_3, \dots$ является вещественнозначной:

$$\overline{W(t, \beta, \bar{\beta})} = W(t, \beta, \bar{\beta}),$$

и уравнение годографа (3) имеет вид условия Коши–Римана ($\beta = \beta_1$):

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\beta}} = 0. \quad (25)$$

Регулярный и сингулярный секторы $\mathcal{M}^{\text{reg}}$ и $\mathcal{M}^{\text{sing}}$ определяются как такие множества $(t, \beta, \bar{\beta})$ решений уравнения (25), что эрмитова форма

$$d^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} d\beta^2 + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta \partial \bar{\beta}} d\beta d\bar{\beta} + \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\beta}^2} d\bar{\beta}^2$$

является соответственно невырожденной или вырожденной. Для нередуцированных решений ($\beta \neq \bar{\beta}$) из соответствующего уравнения ЭПД следует, что

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \beta \partial \bar{\beta}} = 0,$$

поэтому

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial \beta \partial \bar{\beta}} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \beta \partial \bar{\beta}} & \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\beta}^2} \end{array} \right| = \left| \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} \right|^2. \quad (26)$$

Таким образом, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для нередуцированных решений эллиптической $B(1)$ -системы регулярный сектор $\mathcal{M}^{\text{reg}}$ определяется условием

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\beta}} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} \neq 0. \quad (27)$$

Анализ, аналогичный тому, что был проделан для гиперболического случая, быстро приводит к следующему предложению

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Сингулярный сектор $\mathcal{M}^{\text{sing}}$ эллиптической $B(1)$ -системы (1) представляет собой объединение подпространств $\mathcal{M}_n^{\text{sing}}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, определенных как

$$\mathcal{M}_n^{\text{sing}} = \left\{ (t, \beta, \bar{\beta}) \in \mathcal{M}^{\text{sing}} : \frac{\partial^k W}{\partial \beta^k} = 0, k = 1, \dots, n+1; \frac{\partial^{(n+2)} W}{\partial \bar{\beta}^{(n+2)}} \neq 0 \right\}. \quad (28)$$

Решения, принадлежащие $\mathcal{M}_n^{\text{sing}}$, определены на подпространстве коразмерности $2n$ в пространстве параметров $x, t_2, t_3, \dots$.

Таким образом, в эллиптическом случае градиентная катастрофа наступает в точке (x, t) при фиксированных параметрах $t_2, t_3, \dots$. Аналогично гиперболическому случаю подпространство $\mathcal{M}_n^{\text{sing}}$ не пусто, если по крайней мере n параметров $t_2, t_3, \dots, t_{n+1}$ отличны от нуля в формуле (13).

Полезно переписать формулу (13) для функции W в терминах вещественной и мнимой частей β_1 , т. е. $\beta_1 = U + iV$:

$$W = xU + t_2 \left(U^2 - \frac{1}{2} V^2 \right) + t_3 \left(U^3 - \frac{3}{2} UV^2 \right) + t_4 \left(U^4 - 3U^2 V^2 + \frac{3}{8} V^4 \right) + \\ + t_5 \left(U^5 - 5U^3 V^2 + \frac{15}{8} UV^4 \right) + \dots \quad (29)$$

Эта формула явно показывает характер эллиптических сингулярностей, проявляющихся для функции W при различных значениях параметров $t_2, t_3, \dots$.

Основные уравнения (13), (25), а также условия (28), определяющие подпространство $\mathcal{M}_n^{\text{sing}}$, легко переписать в терминах исходных переменных u и v . Поскольку

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = -\frac{\partial W}{\partial u} + i\sqrt{-v} \frac{\partial W}{\partial v},$$

уравнение годографа (25) при $v \neq 0$ принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = 0, \quad (30)$$

в то время как уравнение ЭПД и уравнение (30) имеют вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} - v \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} = 0. \quad (31)$$

Для подпространства $\mathcal{M}_1^{\text{sing}}$ условия (28) записываются как

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial \beta^3} \neq 0. \quad (32)$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} - 2i\sqrt{-v} \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} + v \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial v},$$

с учетом уравнений (30) и (31) можно заключить, что второе условие (32) выполнено, если и только если

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = 0. \quad (33)$$

Таким образом, подпространство $\mathcal{M}_1^{\text{sing}}$ характеризуется условиями (30), (33) и требованием, чтобы производные W третьего порядка были отличны от нуля.

Чтобы сравнить эти условия с условиями из работы [4], заметим сначала, что $B(1)$ -система (1) переходит в систему (1.8) при подстановке $u \rightarrow v$, $v \rightarrow -u$. Тогда, если выбрать

$$W = f(u, v) + xv - uvt,$$

то уравнения годографа (30) принимают вид уравнений (2.4) из работы [4], а уравнение (31) редуцируется к уравнению (2.5) из той же работы. Наконец, при таком выборе условия (33) переходят в условие (2.12) из работы [4].

Наконец, заметим, что согласно предложению 4 для подпространства $\mathcal{M}_1^{\text{sing}}$ ко-размерность соответствующего подпространства $(x, t_2, t_3, \dots)$ равна двум, а функция W при $t_n = 0$, $n \geq 4$, т. е.

$$W = xU + t_2 \left(U^2 - \frac{1}{8} V^2 \right) + t_3 \left(U^3 - \frac{3}{2} UV^2 \right),$$

проявляет эллиптическую омбилическую сингулярность согласно классификации Тома [17] (см., например, работы [16], [18], [19]). Эти результаты воспроизводят формулы, впервые полученные в работе [4] (формула (4.2)).

5. БЕЗДИСПЕРСИОННАЯ ИЕРАРХИЯ ТОДЫ

Теперь рассмотрим функцию

$$W_T(x, \beta_1, \beta_2) = \int \frac{d\lambda}{2\pi i} V_T(x, \lambda) \sqrt{\left(1 - \frac{\beta_1}{\lambda}\right) \left(1 - \frac{\beta_2}{\lambda}\right)}, \quad (34)$$

где $V_T(x, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n x_n$. Критические точки для этой функции определяются уравнениями

$$\frac{\partial W_T}{\partial \beta_1} = 0, \quad \frac{\partial W_T}{\partial \beta_2} = 0. \quad (35)$$

Простая проверка показывает, что W_T удовлетворяет уравнению ЭПД типа $E(-1/2, -1/2)$:

$$2(\beta_1 - \beta_2) \frac{\partial^2 W_T}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} = - \left(\frac{\partial W_T}{\partial \beta_1} - \frac{\partial W_T}{\partial \beta_2} \right). \quad (36)$$

В явной записи функция W_T представляет собой ряд:

$$\begin{aligned} W_T = & -\frac{1}{2} x_0 (\beta_1 + \beta_2) - \frac{1}{8} x_1 (\beta_1 - \beta_2)^2 - \frac{1}{16} x_2 (\beta_1 + \beta_2) (\beta_1 - \beta_2)^2 - \\ & - \frac{1}{128} x_3 (5\beta_1^2 + 6\beta_1\beta_2 + 5\beta_2^2) (\beta_1 - \beta_2)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (37)$$

а уравнения годографа принимают вид

$$\begin{aligned} x_0 + \frac{1}{2} x_1 (\beta_1 - \beta_2) + \frac{1}{8} x_2 (3\beta_1^2 - 2\beta_1\beta_2 - \beta_2^2) + \dots &= 0, \\ x_0 - \frac{1}{2} x_1 (\beta_1 - \beta_2) + \frac{1}{8} x_2 (3\beta_2^2 - 2\beta_1\beta_2 - \beta_1^2) + \dots &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения дают решения системы

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} = \frac{1}{2} (\beta_1 - \beta_2) \frac{\partial \beta_1}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} (\beta_1 - \beta_2) \frac{\partial \beta_2}{\partial x_0}. \quad (38)$$

В терминах переменных $u = -(\beta_1 + \beta_2)$, $v = (\beta_1 - \beta_2)^2/4$ получаем бездисперсионную систему Тоды (2). Рассматривая высшие времена $x_2, x_3, \dots$, получаем полную бездисперсионную иерархию Тоды.

Аналогично случаю Бенни функция W_T является производящей функцией для классических сингулярностей функций двух переменных. Действительно, в переменных $X = (\beta_1 + \beta_2)/2$, $Y = (\beta_1 - \beta_2)/2$ она имеет вид

$$W_T = -x_0 X - \frac{1}{2} x_1 Y^2 - \frac{1}{2} x_2 X Y^2 - \frac{1}{8} x_3 (4X^2 + Y^2) Y^2 + \dots, \quad (39)$$

где третий член представляет параболическую омбилическую особенность как для гиперболического, так и для эллиптического случаев.

Представленные здесь формулы для бездисперсионной иерархии Тоды совпадают с формулами, полученными в работе [20], после отождествления

$$V_T(x, \lambda) = -2T\lambda + \lambda V_H'(t, \lambda), \quad (40)$$

т. е. $x_0 = -2T$, $x_n = nt_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Очевидно, что описание регулярного и сингулярного секторов для бездисперсионной иерархии Тоды полностью совпадает с описанием соответствующих секторов для однослойной иерархии Бенни.

6. ВЗАИМНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ УРАВНЕНИЯМИ ЭПД С РАЗЛИЧНЫМИ ИНДЕКСАМИ, А ТАКЖЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ W И ПЛОТНОСТЕЙ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ

Однослойная иерархия Бенни и бездисперсионная иерархия Тоды – два примера систем гидродинамического типа, для которых функции W удовлетворяют уравнениям ЭПД

$$L_\varepsilon W_\varepsilon := \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\varepsilon}{x-y} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] W_\varepsilon = 0 \quad (41)$$

с различными индексами ε . Такие линейные уравнения хорошо изучены (см., например, монографию [8]). У операторов L_ε есть несколько замечательных свойств. Одно из них (возможно, ранее пропущенное) определяется тождеством

$$L_{\varepsilon+1} L_\mu = L_{\mu+1} L_\varepsilon \quad (42)$$

для произвольных индексов ε и μ . Из этого тождества, например, следует, что для любого решения W_ε функция $L_\mu W_\varepsilon$ с произвольным μ удовлетворяет уравнению ЭПД с индексом $\varepsilon+1$, более точно, $L_\mu W_\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon-\mu)W_{\varepsilon+1}$. В частности, при $\varepsilon = -1/2$ и $\mu = 0$ получаем $L_{1/2} L_0 = L_1 L_{-1/2}$. В терминах операторов $\tilde{L}_\varepsilon$, определяемых как $\tilde{L}_\varepsilon = (x-y)L_\varepsilon$, последнее соотношение принимает вид

$$\partial_x \partial_y \tilde{L}_{-1/2} = \tilde{L}_{1/2} \partial_x \partial_y. \quad (43)$$

Это тождество ясно демонстрирует дуальность между уравнениями ЭПД с индексами $1/2$ и $-1/2$ и, следовательно, между однослойной иерархией Бенни и бездисперсионной иерархией Тоды.

Дуальность между функциями W и плотностями интегралов движения является дуальностью другого типа, типичного для так называемых ε -интегрируемых систем

гидродинамического типа. Действительно, в соответствии с результатом Царева [21] симметрия w_i полугамильтоновой гидродинамической системы

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial t} = \lambda_i(\beta) \frac{\partial \beta_i}{\partial x}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (44)$$

т. е. решение системы

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial \tau} = w_i(\beta) \frac{\partial \beta_i}{\partial x}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (45)$$

которая коммутирует с системой (44), определяется системой

$$\frac{\partial w_k / \partial \beta_i}{w_i - w_k} = \frac{\partial \lambda_k / \partial \beta_i}{\lambda_i - \lambda_k}, \quad i \neq k. \quad (46)$$

Такие w_i обеспечивают нас решениями систем (44) посредством уравнений годографа:

$$\Omega_i := -x + \lambda_i(\beta)t + w_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (47)$$

Для такой системы (44) плотности P интегралов движения удовлетворяют уравнениям [21]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \beta_i \partial \beta_k} = \frac{\partial \lambda_i / \partial \beta_k}{\lambda_i - \lambda_k} \frac{\partial P}{\partial \beta_i} - \frac{\partial \lambda_k / \partial \beta_i}{\lambda_i - \lambda_k} \frac{\partial P}{\partial \beta_k}, \quad i \neq k. \quad (48)$$

Определим ε -системы как системы (особый класс таких систем см., например, в работе [22]), для которых

$$\frac{\partial \lambda_i / \partial \beta_k}{\lambda_i - \lambda_k} = \frac{\partial \lambda_k / \partial \beta_i}{\lambda_i - \lambda_k} = \frac{\varepsilon}{\beta_i - \beta_k}. \quad (49)$$

Для таких систем плотности интегралов удовлетворяют уравнениям ЭПД:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \beta_i \partial \beta_k} = \frac{\varepsilon}{\beta_i - \beta_k} \frac{\partial P}{\partial \beta_i} - \frac{\varepsilon}{\beta_i - \beta_k} \frac{\partial P}{\partial \beta_k}, \quad i \neq k. \quad (50)$$

В то же время уравнения для w_i принимают вид

$$\frac{\partial w_k}{\partial \beta_i} = -\varepsilon \frac{w_i - w_k}{\beta_i - \beta_k}, \quad i \neq k. \quad (51)$$

Из симметрии этих уравнений относительно перестановки индексов i и k следует, что $\partial w_k / \partial \beta_i = \partial w_i / \partial \beta_k$, поэтому

$$w_i = \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \beta_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

для некоторой функции $\widetilde{W}$. Таким образом, уравнения (51) представляют собой уравнения ЭПД типа $E(-\varepsilon, -\varepsilon)$ для функции $\widetilde{W}$:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial \beta_i \partial \beta_k} = -\left(\frac{\varepsilon}{\beta_i - \beta_k} \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \beta_i} - \frac{\varepsilon}{\beta_i - \beta_k} \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \beta_k} \right), \quad i \neq k. \quad (52)$$

Тот факт, что производящие функции для симметрий в уравнениях Уизема и некоторых других интегрируемых гидродинамических систем удовлетворяют уравнениям ЭПД, был отмечен ранее в работах [9], [22], [23]. Дуальность между уравнениями ЭПД для плотностей интегралов движения и производящих функций симметрий также уже отмечалась. Однако приведенное выше доказательство представляется отличным от обсуждавшихся ранее.

Кроме того, можно отметить следующее: из уравнений (49) следует, что для ε -систем также $\lambda_i = \partial g / \partial \beta_i$ для некоторой функции g . В результате этого уравнения годографа (47) для ε -систем принимают вид

$$\Omega_i = -x + t \frac{\partial g}{\partial \beta_i} + \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \beta_i} = \frac{\partial W}{\partial \beta_i} = 0, i, \dots, n, \quad (53)$$

где $W = -x(\beta_1 + \beta_2) + gt + \widetilde{W}$. Таким образом, уравнения годографа для интегрируемых систем гидродинамического типа являются не чем иным, как уравнениями, определяющими критические точки функции W . По-видимому, этот факт был упущен в предыдущих публикациях. Более того, согласно уравнениям (49) функция g также удовлетворяет уравнению ЭПД $E(-\varepsilon, -\varepsilon)$, и поэтому то же верно для функции W . Заметим, что ε -системы особого класса, для которых λ_i являются линейными функциями β_i , рассматривались ранее в работе [22].

Таким образом, для интегрируемых ε -систем гидродинамического типа плотности интегралов и функций W (а также функций $\widetilde{W}$ производящих симметрии) играют двойственную роль, удовлетворяя уравнениям ЭПД с противоположным знаком индекса ε . Это свойство очень похоже на хорошо известную дуальность между производящими функциями интегралов движения и симметриями для интегрируемых уравнений с дисперсией.

Благодарности. Авторы благодарят Ministerio de Educación y Ciencia Италии (исследовательский проект FIS2008-00200/FIS).

Список литературы

- [1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *УМН*, **44:6**(270) (1989), 29–98.
- [2] D. J. Benney, *Stud. Appl. Math.*, **52** (1973), 45–50.
- [3] В. Е. Захаров, *Функц. анализ и его прил.*, **14:2** (1980), 15–24.
- [4] B. Dubrovin, T. Grava, C. Klein, *Nonlinear Sci.*, **19:1** (2009), 57–94, arXiv: 0704.0501.
- [5] C. P. Boyer, J. D. Finley, *J. Math. Phys.*, **23:6** (1982), 1126–1130.
- [6] M. Mineev-Weinstein, P. B. Wiegmann, A. Zabrodin, *Phys. Rev. Lett.*, **84:22** (2000), 5106–5109, arXiv: nlin/0001007.
- [7] L. Martínez Alonso, E. Medina, *J. Phys. A*, **41:33** (2008), 335202, 17 pp., arXiv: 0804.3498.
- [8] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, v. II, Gauthier Villars, Paris, 1915.
- [9] V. R. Kudashev, S. E. Sharapov, *Phys. Lett. A*, **154:9** (1991), 445–448; В. Р. Кудашев, С. Е. Шарапов, *ТМФ*, **87:1** (1991), 40–47.
- [10] F. R. Tian, *Comm. Pure Appl. Math.*, **46** (1993), 1093–1129.
- [11] F. R. Tian, *Duke Math. J.*, **74:1** (1994), 203–221.
- [12] Y. Kodama, B. G. Konopelchenko, *J. Phys. A*, **35:31** (2002), L489–L500, arXiv: nlin/0205012.
- [13] B. G. Konopelchenko, L. Martínez Alonso, *J. Phys. A*, **37:32** (2004), 7859–7877.

- [14] I. M. Krichever, *Comm. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475.
- [15] B. G. Konopelchenko, L. Martínez Alonso, E. Medina, *J. Phys. A*, **43**:43 (2010), 434020, 15 pp., arXiv: 1003.2892.
- [16] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, М., 1969.
- [17] R. Thom, *Structural Stability and Morphogenesis. An Outline of a General Theory of Models*, Adv. Book Class., Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989.
- [18] В. И. Арнольд, *Функц. анализ и его прил.*, **6**:4 (1972), 3–25; *УМН*, **30**:5(185) (1975), 3–65.
- [19] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, т. 1, 2, Наука, М., 1982.
- [20] B. Konopelchenko, L. Martínez Alonso, E. Medina, *Phys. Lett. A*, **375**:5 (2011), 867–872, arXiv: 1005.4773.
- [21] С. П. Царев, *Докл. АН СССР*, **282**:3 (1985), 534–537.
- [22] M. V. Pavlov, *J. Math. Phys.*, **44**:9 (2003), 4134–4156, arXiv: nlin/0301010.
- [23] М. В. Павлов, *Гамильтонов формализм уравнений электрофореза. Интегрируемые уравнения гидродинамики*, Препринт № 17, ИТФ, М., 1987.