Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Кушнер, С. Б. Лебле, Б. Рейхель, Многомодовые системы нелинейных уравнений: вывод, интегрируемость и численные решения, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 1, 138–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6669>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 09:48:21

© 2011 г.

М. Кушнер*, С. Б. Лебле*, Б. Рейхель*

МНОГОМОДОВЫЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ: ВЫВОД, ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрен процесс распространения электромагнитных импульсов в изотропных средах с учетом эффектов нелинейности третьего порядка. Предложено развитие метода преобразования уравнений Максвелла на основе полного набора проекционных операторов. Эти операторы отвечают ветвям волновой дисперсии (в волноводе или в материальной среде) и учитывают направление распространения. Наиболее важным результатом применения метода является система уравнений, которые описывают одномерную динамику импульсов, распространяющихся в противоположных направлениях, без учета дисперсии. Выведены соответствующие уравнения самодействия. Таким образом, в рассмотрение вводится дисперсия в среде; показано, как при этом изменяются операторы. Получены обобщенные уравнения коротких импульсов Шафера–Вайна, учитывающие распространение волн в обоих направлениях. В случае трехмерной задачи основное внимание уделено оптическим волокнам с дисперсией материала, выведены и решены численно уравнения взаимодействия мод волновода. Обсуждаются эффекты взаимодействия однонаправленных импульсов. Рассматривается метод численного интегрирования для связанных нелинейных уравнений Шредингера и применяются разработанные схемы вычислений.

Ключевые слова: метод проекционных операторов, многомодовый волновод, связанные нелинейные уравнения Шредингера, уравнения коротких импульсов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Значительный интерес к динамике системы, в которой волны распространяются в обоих направлениях, появляется в связи с различными задачами [1]–[4]. В монографии [5] введен основной метод получения эволюционных уравнений первого порядка по времени, которые естественным образом включают в себя уравнения однонаправленного распространения волн, что соответствует простым корням уравнения дисперсии. Этот метод основан на построении полного набора проекционных операторов, по одному оператору на каждое дисперсионное соотношение, который

*Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland. E-mail: leble@mif.pg.gda.pl

фиксирует подпространство линеаризованной фундаментальной системы, такой, например, как уравнения Максвелла. Одна из целей настоящей работы состоит в привлечении внимания исследователей, работающих в области оптики и в других областях, к методу проекционных операторов. Этот метод позволяет комбинировать уравнения из сложной системы наиболее рациональным образом, давая возможность принять в расчет дисперсию, диссипацию и, после некоторой модификации, нелинейность путем добавления составных (гибридных) полей в качестве базисных мод. Таким образом, он позволяет эффективно сформулировать математическую задачу: задать начальные или граничные условия (например, в теории нелинейного резонатора) на подходящем физическом языке.

Один из примеров такой теории, основанной на волновом уравнении второго порядка, приведен недавно в работе [4], автор которой, на самом деле следуя методу монографии [5], показал, что подход однонаправленного распространения к гибриднему электромагнитному полю позволяет написать волновое уравнение первого порядка для распространения импульсов. Также в этой работе было предложено обобщение подходов однонаправленного [4] и двунаправленного [3] распространения. Эти результаты были тем не менее получены без учета дисперсии, а потому нуждаются в обобщении.

Случай импульсов малой продолжительности с длиной волны в диапазоне примерно от 1600 нм до инфракрасных волн был недавно исследован в книге [6]. Полученное уравнение (уравнение Шафера–Вайна), названное уравнением коротких импульсов (УКИ), решалось численными методами в работе [7], а в статьях [8], [9] было показано, что оно интегрируемо. Вывод УКИ основан на нескольких приближениях, включающих нелинейность третьего порядка, дисперсионное соотношение, модифицированное для данного волнового диапазона, и предположение об однонаправленности распространения импульса. Последнее условие было реализовано с помощью введения переменной медленного времени в системе отсчета, связанной с импульсом.

Принимая во внимание интерес к подобным задачам, мы возвращаемся к применениям общего метода [5], [10] и развиваем его с учетом поправок, обусловленных дисперсией материала среды, которые приспособлены к рассматриваемой задаче. Этот метод связывает подход однонаправленного распространения импульса [2] с выводом УКИ [6] и его обобщениями.

В качестве трехмерной задачи мы продолжаем исследование цилиндрических диэлектрических волноводов (оптических волокон) [11], [12], применяя базис Хондраса–Дебая. Он был получен с помощью метода проекционных уравнений для взаимодействия мод волновода, которое включает в себя эффекты однонаправленных импульсов. В продолжение этого исследования мы возвращаемся к общему методу интегрируемых уравнений эволюции, приспособленному к рассматриваемой задаче. Этот метод связывает подход однонаправленного распространения импульсов с известным нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) [13], связанным НУШ, уравнением Манакова [14], УКИ и их обобщениями на задачи в волноводах. Наши результаты также учитывают распространяющиеся в противоположных направлениях волны со всевозможными поляризациями, взаимодействиями и, как новый элемент теории, дисперсию материала среды.

Доказано (см. работу [15]), что связанные НУШ, возникающие в контексте теории огибающей оптического импульса, являются численно интегрируемыми в смысле

существования устойчивых и сходящихся по мере пространства L_2 конечно-разностных представлений данных уравнений.

В разделе 2 мы намечаем в общих чертах идею метода проекционных операторов, которые задают подпространства операторов эволюции, и ее воплощение. Далее мы применяем этот подход при выводе системы двунаправленных волновых уравнений для гибридных полей [4], [10]. Затем мы вводим в рассмотрение дисперсию и показываем, при каких условиях возможен переход к уравнениям Шафера–Вайна [6]. В разделе 3 мы описываем применения проекционной техники при описании мод цилиндрического волновода, а также при выводе уравнений типа связанного НУШ и приводим результаты численных исследований огибающей взаимодействия импульсных мод.

2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ

2.1. Схема модели. Система уравнений Максвелла для немагнитной среды, не содержащей электрических зарядов, в системе единиц Лоренца–Хевисайда (c – скорость света в вакууме),

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

замыкается материальными уравнениями

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}.$$

Чтобы учесть *нелинейные эффекты*, запишем вектор поляризации в виде (амплитудно-параметрического) разложения:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL} = \chi^{(1)}\mathbf{E} + \chi^{(2)}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E} + \chi^{(3)}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots, \quad (1)$$

где символами $\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}$ и $\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}\mathbf{E}$ обозначены тензорные произведения. В разложении (1) $\chi^{(1)}$ – линейная диэлектрическая восприимчивость, а $\chi^{(2)}$ – диэлектрическая восприимчивость второго порядка, далее мы считаем $\chi^{(2)} = 0$ (т. е. рассматриваем материалы с симметричными молекулами). В силу свойств изотропных оптически неактивных сред [16] в подобной модели следует учитывать третий порядок нелинейности поляризации. Например, ее y -компонента имеет вид

$$(P_{NL})_y = 4\pi\chi_{yyyy}^{(3)}E_y^3, \quad (2)$$

который, равно как и выражения для других компонент, будет использоваться в дальнейшем.

2.2. Метод проекции: полезный пример. Начнем, как и в работах [6], [14], с одномерной модели, выбрав в качестве направления распространения импульса ось x . Будем предполагать, что $D_x = 0$ и $B_x = 0$, и принимать в расчет только одну поляризацию электромагнитной волны. При этом уравнения Максвелла можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial D_y}{\partial t} &= -\frac{\partial B_z}{\partial x}, & D_y &= E_y + 4\pi\chi^{(1)}E_y + (P_{NL})_y, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} &= -\frac{\partial E_y}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3)$$

В качестве первого этапа описания основных положений метода [5] определим проекционные операторы для линейной изотропной диэлектрической среды, в которой $D_y = \varepsilon E_y$ и $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi^{(1)}$. В этой простейшей модели мы не учитываем дисперсию материала (параметр ε считается постоянным). Перепишем уравнения (3) в матричном виде $\Psi_t = L\Psi$, в котором вектор поля Ψ и оператор L ,

$$\Psi = \begin{pmatrix} E_y \\ B_z \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & -(c/\varepsilon) \partial_x \\ -c \partial_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

дают следующее матричное операторное уравнение:

$$\begin{pmatrix} \partial E_y / \partial t \\ \partial B_z / \partial t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(c/\varepsilon) \partial_x \\ -c \partial_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(c/\varepsilon) \partial B_z / \partial x \\ -c \partial E_y / \partial x \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Рассмотрим задачу Коши для системы (5). Применяя преобразование Фурье по переменной x ,

$$E_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ikx} \widetilde{E}_y dk, \quad B_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ikx} \widetilde{B}_z dk,$$

получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, параметризованных параметром k :

$$\begin{pmatrix} \partial \widetilde{E}_y / \partial t \\ \partial \widetilde{B}_z / \partial t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ick/\varepsilon) \widetilde{B}_z \\ ik \widetilde{E}_y \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Эта система имеет решение $e^{i\omega t}$, где $\omega = \pm ck/\sqrt{\varepsilon}$. Тем самым мы приходим к k -представлению задачи на собственные значения для (2×2) -матрицы эволюции, что является отправной точкой метода проекционных операторов.

Будем искать матрицы P_i такие, что $\Psi_i = P_i \Psi$, $i = 1, 2$, являются собственными векторами матрицы эволюции, заданной уравнением (6). Предполагается, что имеют место стандартные свойства проекционных операторов:

$$P_i P_j = 0, \quad P_i^2 = P_i, \quad \sum_i P_i = 1.$$

Для уравнения (6) матрицы P_i принимают вид

$$P_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{\varepsilon} \\ -\sqrt{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Технически задача сначала решается в k -пространстве, а затем с помощью обратного преобразования Фурье строится x -представление операторов [5]. В нашем случае матричные элементы проекционных операторов (7) не зависят от k , а потому их x -представление совпадает с k -представлением.

Применяя проекционные операторы к вектору Ψ (4), введем новые переменные

$$\Lambda = \frac{1}{2} E_y + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} B_z, \quad \Pi = \frac{1}{2} E_y - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} B_z,$$

отвечающие распространению волны влево и вправо [5]. Сравнивая новые переменные Λ и Π с (так называемыми гибридными) переменными, введенными в работе [2], замечаем их сходство. В рассматриваемом простейшем случае имеем

$$E_y = \Lambda + \Pi, \quad B_z = \sqrt{\varepsilon}(\Pi - \Lambda). \quad (8)$$

Это соответствие представляет собой взаимно однозначное локальное отображение и, следовательно, позволяет определить начальные условия задачи Коши для обеих волновых переменных Λ и Π , левой и правой, в физических терминах. Предложенный вид равенств (8) однозначно задается дисперсионным соотношением $\omega = \pm ck/\sqrt{\varepsilon}$, вытекающим из уравнения (6), и поэтому позволяет включить произвольную зависимость k от частоты ω . Более того, эта процедура допускает алгоритмическое представление как для электрического, так и для магнитного полей [10]. Она также дает возможность следовать за волной, получая данные в каждый момент времени t путем соответствующего проецирования в наиболее общем случае.

Если мы поместим *нелинейность* в правую часть,

$$\Psi_t - L\Psi = N(\Psi), \quad (9)$$

где нижним индексом t обозначена частная производная по t , а также учтем соотношения (2), (5), то уравнение (3) примет следующий вид [6], [17]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} E_y \\ B_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -(c/\varepsilon) \partial_x \\ -c \partial_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ B_z \end{pmatrix} = 4\pi \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \chi^{(3)} E_y^3/\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Применяя операторы P_i (7) к этому уравнению и используя свойство проекторов $[P_i, (\partial/\partial t - L)] = 0$, мы получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L \right) P_i \Psi = P_i N(\Psi).$$

Правая часть этого уравнения вычисляется с помощью тождества $(P_1 + P_2)\Psi = \Psi$ или, в явном виде, – с помощью формул (8).

Повторяя вычисления для уравнения (9) с применением второго проекционного оператора и вводя обозначение $c_0 = c/\sqrt{\varepsilon}$, получим замкнутую систему уравнений, которая описывает взаимодействие между двумя волнами, распространяющимися в противоположных направлениях:

$$\begin{aligned} \Pi_t + c_0 \Pi_x &= \frac{2\pi\chi^{(3)}}{\varepsilon} \frac{\partial(\Lambda + \Pi)^3}{\partial t}, \\ \Lambda_t - c_0 \Lambda_x &= \frac{2\pi\chi^{(3)}}{\varepsilon} \frac{\partial(\Lambda + \Pi)^3}{\partial t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что переменная Λ связана с дисперсионным соотношением $\omega = -ck/\sqrt{\varepsilon}$, а потому задает левую волну, аналогично переменная Π связана с $\omega = ck/\sqrt{\varepsilon}$. В результате мы имеем эволюционное уравнение для правой волны, взаимодействующей с левой, и наоборот. По условиям своего вывода эта система эквивалентна системе уравнений Максвелла и, следовательно, описывает все линейно поляризованные волны с произвольными частотами.

2.3. Случай доминирующей правой стационарной волны. Обсудим результат (10). Решение системы связанных уравнений (10) содержит два вклада [5], возникающих из-за наличия нелинейности. Один из них обусловлен начальным возмущением (дополнительным самодействием за счет генерации волн противоположных направлений), а второй связан с генерацией обратных волн.

Это можно понять с помощью формального интегрирования по характеристикам. При этом в общем случае ответ зависит от начальных (граничных) условий. Рассмотрим случай с доминирующей правой стационарной волной $\Pi(t - x/c_0)$. Во втором уравнении из (10) пренебрежем членом в правой части, содержащим Λ , и по-прежнему не будем учитывать дисперсию ($\varepsilon = \text{const}$),

$$\Lambda_t - c_0 \Lambda_x = \frac{2\pi}{\varepsilon} \chi^{(3)} (\Pi^3) t;$$

перейдем к переменным $\xi = t - x/c_0$, $\eta = t + x/c_0$: имеем

$$2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi} = \frac{2\pi}{\varepsilon} \chi^{(3)} \left(\frac{\partial \Pi^3}{\partial \xi} + \frac{\partial \Pi^3}{\partial \eta} \right).$$

При $\Pi_\eta = 0$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi} = \frac{2\pi}{\varepsilon} \chi^{(3)} \frac{\partial \Pi^3}{\partial \xi}.$$

Интегрирование этого уравнения от $-\infty$ до ξ дает $\Lambda = (\pi/\varepsilon) \chi^{(3)} \Pi^3$. Мы подставляем этот результат в уравнение для функции Π , чтобы получить замкнутое уравнение для задачи Коши данного типа:

$$\Pi_t + c_0 \Pi_x = \frac{2\pi}{\varepsilon} \chi^{(3)} \left[\left(\Pi + \frac{\pi}{\varepsilon} \chi^{(3)} \Pi^3 \right)^3 \right]_t. \quad (11)$$

В этом уравнении учитывается накопление взаимодействия с противоположной волной. Такое взаимодействие можно включить в проекционные операторы, если учитывается нелинейность первого порядка, как это было сделано в работе [18]. Оно дает существенный вклад в случае нелинейностей старших порядков. Заметим, что уравнение (11) обладает структурой уравнения Хопфа, и в нем присутствует явление опрокидывания волны. В более реалистичных моделях (учитывающих влияние геометрии волновода или дисперсии материала) рост наклона фронта волны останавливается в результате наличия дисперсии или диссипации.

Важно также отметить, что если скорость уединенной волны Π не совпадает с c_0 , или если мы ищем решение общей системы (10), то результат интегрирования оказывается более сложным.

Рассмотренный пример достаточно прост, но он содержит все принципиальные составляющие метода, изложенного в книге [5]. Более сложный пример, представленный в следующем разделе, показывает, какие отличия возникают в случае, когда матричные элементы проекционного оператора зависят от k .

2.4. Учет дисперсии в УКИ. Обобщенное уравнение Шафера–Вайна.

Учет дисперсии существенно меняет вид проекционных операторов. Соотношение между основными векторами электродинамики $\vec{D}$ и $\vec{E}$ в материальной среде обычно задается интегральным тензорным оператором. Если в рассматриваемом случае изотропной среды пренебречь пространственной дисперсией, то k -представления векторов можно выразить с помощью довольно простого скалярного соотношения:

$$\widetilde{D}_y = \widetilde{\varepsilon}(k) \widetilde{E}_y. \quad (12)$$

Следуя работе [6], уделим особое внимание распространению света с длиной волны $\lambda = 1600 \div 3000$ нм в инфракрасном диапазоне и аппроксимируем величину $\chi^{(1)}(\lambda)$ следующим образом:

$$\chi^{(1)}(\lambda) \approx \chi_0^{(1)} + \chi_2^{(1)} \frac{c^2}{k^2}. \quad (13)$$

Подставляя это выражение в $\tilde{\varepsilon}$ и в формулы (7), получим, что правые проекционные операторы в k -пространстве примут вид

$$P_{1,2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm \left(\sqrt{1 + 4\pi\chi_0^{(1)} + 4\pi\chi_2^{(1)} c^2/k^2} \right)^{-1} \\ \pm \sqrt{1 + 4\pi\chi_0^{(1)} + 4\pi\chi_2^{(1)} c^2/k^2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Для решения основной системы необходимо рассмотреть вышеприведенные операторы в x -представлении. Вообще говоря, их матричные элементы являются интегральными операторами, однако, применив разложение Тейлора по параметру $1/k$ для величины $\sqrt{\tilde{\varepsilon}}$, можно ограничиться первыми двумя членами, предположив, что длина волны $\lambda = 2\pi/k$ мала по сравнению с длиной волны λ_0 , которая определяет положение главного резонанса [6], как и в выражении (13). Поэтому разложение в k -пространстве оказывается типичным для теории коротких нелинейных волн, в которой малым параметром считается λ/λ_0 . Вместе с новыми проекционными операторами введем новые переменные

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 4\pi\chi_0^{(1)}} E_y + \frac{2\pi\chi_2^{(1)} c^2}{\sqrt{1 + 4\pi\chi_0^{(1)}}} (i\partial_x)^{-2} E_y + B_z \right), \\ \Lambda &= \frac{1}{2} \left(-\sqrt{1 + 4\pi\chi_0^{(1)}} E_y - \frac{2\pi\chi_2^{(1)} c^2}{\sqrt{1 + 4\pi\chi_0^{(1)}}} (i\partial_x)^{-2} E_y + B_z \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $(i\partial_x)^{-2}$ – интегральный оператор, обратный к $(i\partial_x)^2$. По аналогии с уравнением (8) соотношения между новыми переменными и электрическим и магнитным полями принимают вид

$$\begin{aligned} \Pi + \Lambda &= B_z, \\ \left(\sqrt{1 + 4\pi\chi_0^{(1)}} + \frac{4\pi\chi_2^{(1)} c^2}{2\sqrt{1 + 4\pi\chi_0^{(1)}}} (i\partial_x)^{-2} \right)^{-1} (\Pi - \Lambda) &= E_y. \end{aligned}$$

Нелинейный член, задаваемый равенством (2) для поляризации, можно оставить неизменным, но линейный член получает добавку в соответствии с соотношением (13) [6], [17]. Тогда уравнение (5) можно переписать с помощью оператора, отвечающего разложению $\tilde{\varepsilon} = 1 + 4\pi(\chi_0^{(1)} + \chi_2^{(1)}(c/k)^2)$ в x -представлении. По аналогии с предыдущим примером мы жестко связываем новые переменные с ветвями дисперсионного соотношения и получаем систему уравнений, которые описывают взаимодействие между двумя волнами, распространяющимися в противоположных

направлениях:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial t} + c\sqrt{\hat{\varepsilon}-1}\frac{\partial \Pi}{\partial x} &= 2\pi\chi^{(3)}\hat{\varepsilon}^{-1}\frac{\partial(\Lambda + \Pi)^3}{\partial t}, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial t} - c\sqrt{\hat{\varepsilon}-1}\frac{\partial \Lambda}{\partial x} &= 2\pi\chi^{(3)}\hat{\varepsilon}^{-1}\frac{\partial(\Lambda + \Pi)^3}{\partial t},\end{aligned}$$

где $\hat{\varepsilon} = 1 + 4\pi\chi_0^{(1)} + 4\pi\chi_2^{(1)}c^2(i\partial_x)^{-2}$ – оператор в x -представлении, обратный к которому, а также другие функции от этого оператора задаются с помощью соответствующих разложений в ряды Тейлора. Это уравнение описывает взаимодействие между импульсами, распространяющимися в противоположных направлениях, и представляет собой основной результат данного раздела.

Умножая уравнения на $\hat{\varepsilon}$, разлагая $\sqrt{\hat{\varepsilon}}$ в степенной ряд по обратному дифференциальному оператору и удерживая члены одного и того же порядка, получим

$$\begin{aligned}&(1 + 4\pi\chi_0^{(1)} + 4\pi\chi_2^{(1)}c^2(i\partial_x)^{-2})\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \\ &+ c\left(\sqrt{1 + 4\pi\chi_0^{(1)}} + \frac{2\pi\chi_2^{(1)}c^2}{\sqrt{1 + 4\pi\chi_0^{(1)}}}(i\partial_x)^{-2}\right)\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 2\pi\chi^{(3)}\frac{\partial(\Lambda + \Pi)^3}{\partial t}, \\ &(1 + 4\pi\chi_0^{(1)} + 4\pi\chi_2^{(1)}c^2(i\partial_x)^{-2})\frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \\ &- c\left(\sqrt{1 + 4\pi\chi_0^{(1)}} + \frac{2\pi\chi_2^{(1)}c^2}{\sqrt{1 + 4\pi\chi_0^{(1)}}}(i\partial_x)^{-2}\right)\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = 2\pi\chi^{(3)}\frac{\partial(\Lambda + \Pi)^3}{\partial t}.\end{aligned}$$

Выберем второе уравнение этой системы. Если взять импульс, зарождающийся на правом конце оптического волокна, то мы можем рассмотреть только одно направление распространения. Поэтому функция Λ выбирается в качестве доминирующей левой волны. Предположив тем самым, что $\Pi = 0$, и дважды продифференцировав по переменной x , мы получаем обобщенное УКИ:

$$\begin{aligned}&-\left(1 + 4\pi\chi_0^{(1)}\right)\frac{\partial^3 \Lambda}{\partial x^2 \partial t} + 4\pi\chi_2^{(1)}c^2\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \\ &+ c\sqrt{1 + 4\pi\chi_0^{(1)}}\frac{\partial^3 \Lambda}{\partial x^3} - \frac{2\pi\chi_2^{(1)}c^3}{\sqrt{1 + 4\pi\chi_0^{(1)}}}\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = -2\pi\chi^{(3)}\frac{\partial^3 \Lambda^3}{\partial x^2 \partial t}.\end{aligned}$$

Следуя методу работы [6], применим анзац для разложения на различных масштабах:

$$\Pi(x, t) = (\kappa A_0(\phi, x_1, x_2) + \kappa^2 A_1(\phi, x_1, x_2) + \dots),$$

где $\phi = (ct - x)/\kappa$ и $x_n = \kappa^n x$, $n = 1, 2$. Если рассмотреть все члены порядка $O(\kappa^0)$, то получим УКИ, отличающееся от приведенного в [6] масштабным преобразованием переменных:

$$\begin{aligned}&\left(1 + 4\pi\chi_0^{(1)} - \frac{3}{2}\sqrt{1 + 4\pi\chi_0^{(1)}}\right)\frac{\partial^2 A_0}{\partial \phi \partial x_1} - \\ &- 2\pi\chi_2^{(1)}c^2\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1 + 4\pi\chi_0^{(1)}}}\right)A_0 = \pi\chi^{(3)}\frac{\partial^2 A_0^3}{\partial \phi^2}.\end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее ультракороткий импульс, выпущенный в одном направлении, выводится с помощью метода проекции. Для завершения этого описания надо задать начальные и граничные условия, которые непосредственно вытекают из проекции, задаваемой уравнением (15) при выборе $\Pi = 0$. Это уравнение имеет вид коррелированного действия магнитного и электрического полей.

3. ТЕОРИЯ В РАЗМЕРНОСТИ ТРИ: МОДЫ ВОЛНОВОДОВ В ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ

3.1. Поперечные моды волноводов. В этой части работы мы ограничим наше рассмотрение случаем диэлектрического цилиндрического волновода с нелинейностями, возникающими только за счет диэлектрической восприимчивости третьего порядка. Диэлектрическая восприимчивость для стекол, представляющих собой изотропные среды, задается единственной компонентой $\chi_{xxxx}^{(3)}$ тензора восприимчивости. Данное предположение ограничивает длительность импульса: она не должна быть меньше 0.1 псек, это означает, что отклик среды считается мгновенным, и такая модель является стандартной для передающего волокна в указанном диапазоне временных интервалов.

Мы спиваем решения поперечной задачи Хондроза–Дебая (в полярных переменных r, ϕ) внутри и снаружи бесконечно длинного волновода на его границе $r = r_0$, получая при этом уравнение на собственные значения α_{ln} , и решаем его численными методами. Мы используем описание полного поля [11], а также предполагаем стандартное распределение мод этого поля, из которых составляется базис в пространстве разделенных поперечных и продольных z -переменных; далее для поперечных переменных решается задача Штурма–Лиувилля.

3.2. Решение линейной задачи: путь к проекционной процедуре. Функции Бесселя удовлетворяют условиям ортогональности, образуя тем самым удобный базис. Чтобы завершить постановку задачи, сформулируем задачу Коши с условием на границе $z = 0$, которое фиксирует поперечные компоненты (поляризации) электрического поля.

Проекционная процедура состоит в следующем [5]: сначала разложим базисные поля в ряды по базису Хондроза–Дебая $N_{nl}^{-1} J_l(\alpha_{nl} r) e^{il\varphi}$, затем подставим разложение в линейные уравнения. Каждое число α_{nl} задает ветвь дисперсионного соотношения с помощью уравнения

$$\frac{\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}'_1(\omega - \omega_0)}{c^2}(\omega - \omega_0)^2 - k^2 = \alpha^2 \quad (16)$$

или

$$\frac{\hat{\epsilon}}{c^2}\omega^2 - k^2 = \alpha^2,$$

где $\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}'_1(\omega - \omega_0)$ – диэлектрическая константа волокна. С помощью этого уравнения можно вычислить $k(\omega)$ для каждого α_{nl} .

Таким образом, мы можем написать уравнение для амплитуды $\mathcal{A}$ ln -моды z -компоненты электрического поля:

$$(\square_z + \alpha_{ln}^2) \mathcal{A}_{ln}^p = \frac{2}{\pi c^2 N_{nl}} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} r J_l(\alpha_{ln} r) e^{-il\varphi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum_{k,l,m} \chi_{zklm} E_k E_l E_m \right) d\varphi dr, \quad (17)$$

где использовалось условие ортогональности функций Бесселя, и

$$\square_z = \frac{\varepsilon_1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Коэффициенты разложения (функции от z и t) образуют систему, к которой применяется процедура, изложенная в предыдущем разделе, что приводит в итоге к построению (4×4) -матриц проекционных операторов, задающих подпространства мод, которые различаются своими поляризациями и направлениями распространения. Применяя затем проекционные операторы к нелинейным уравнениям, учитывая тождество $\psi = \sum_i P_i \psi$ как в линейной, так и в нелинейной частях этих уравнений, мы получаем систему, задающую взаимодействие мод.

В случае двух поляризаций ($p = \pm$) получим проекционное разложение

$$\begin{aligned} E_z^\pm(r, \varphi, z, t) &= \frac{1}{2} \sum_{p,l,n} \mathcal{A}_{ln}^p(z, t) J_l(\alpha_{nl} r) e^{il\varphi} + \text{к. с.}, \\ E_r^\pm(r, \varphi, z, t) &= \mp \sum_{l,n} \frac{1}{\alpha_{ln}} [\partial_z \mathcal{A}_{ln} J_{l\pm 1}(\alpha_{ln} r)] e^{il\varphi} + \text{к. с.}, \\ E_\varphi^\pm(r, \varphi, z, t) &= \sum_{l,n} \frac{i}{\alpha_{ln}} [\partial_z \mathcal{A}_{ln} J_{l\pm 1}(\alpha_{ln} r)] e^{il\varphi} + \text{к. с.}, \end{aligned} \quad (18)$$

которое представляет собой векторный аналог простейшего соотношения (8). Вводя масштабирование (примененное в контексте экспериментов по распространению импульсов с медленно меняющимися огибающими $X^\pm$ [19] как самый простой способ перехода от безразмерного описания к экспериментальным единицам), получим

$$\xi = \sigma z, \quad \tau = (t - k'z)\epsilon, \quad \mathcal{A}_{ln}^\pm(t, z) = \sigma X_{ln}^\pm(\tau, \xi) e^{i(\omega t - k^\pm z)}.$$

Групповая скорость есть $k' = dk/d\omega$, связь между k и ω возникает при учете граничных условий (16) для диэлектрического волновода. Малый параметр ϵ пропорционален $\Delta k/2\alpha \ll 1$ (и связан с шириной волнового пакета), σ представляет собой малый параметр нелинейности, $\sigma \sim \epsilon^2$ [20]. Эти параметры оказываются полезными при сравнении теоретических результатов с экспериментальными и при построении теории возмущений. Структура поля (можно сказать, анзац) остается прежней вследствие малой величины нелинейных членов (см. пример в одномерном пространстве).

Вычислим теперь правую часть уравнения (17). Подставим сначала (18) в правую часть уравнения (17) и проинтегрируем по r, φ . Затем учтем то обстоятельство, что волокно проводит только некоторые моды и излучает высшие. Например, может

существовать волокно, проводящее всего лишь одну моду. Затем учтем соотношение (2) и будем рассматривать случай изотропного материала оптоволокна. Удерживая члены разложения вплоть до третьего порядка по амплитудному параметру ϵ , как предписывается приближением (2), дополнительно сохраняя выражение с членом $\partial_\tau X^\pm$ и опуская нерезонансные члены, получим (детали вычисления см. в работе [21])

$$i\partial_\xi X^\pm - ik^\pm \partial_\tau X^\pm + \frac{\epsilon^2 k''}{2\sigma} \partial_{\tau\tau} X^\pm + \mathbb{P}[|X^\pm|^2 + \mathbb{Q}|X^\mp|^2] X^\pm = 0, \quad (19)$$

где $k^\pm$ – групповая скорость распространения для двух поляризаций. Параметр дисперсии $k'' = d^2 k / d\omega^2$ вычисляется при частоте несущей волны с помощью дисперсионного соотношения волновода. Обе амплитуды $X^\pm$ относятся к одной и той же однонаправленной поперечной моде, но соответствуют разным поляризациям. Интегралы $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$ суть коэффициенты нелинейности, явный вид которых приведен в работах [11], [21]. В этих работах также содержатся коэффициенты для случая нескольких мод (с различными числами l и n) для связанных НУШ. Пример такой системы был впервые получен в работе [14] без учета условий, порожденных наличием дисперсии, связанной с распространением волны в волноводе.

Уравнение (17) оказывается общим в рамках указанных предположений, которые позволяют учесть поляризацию материи, как и в предыдущем разделе (отправной точкой при этом служит уравнение (12)), или подобно подходу работы [6]. Формально это означает, что в ω -представлении учитывается зависимость коэффициента ε_1 от ω , как в п. 2.4, т.е. $\widetilde{D}_y = \widetilde{\varepsilon}(\omega) \widetilde{E}_y$. Обратное преобразование Фурье $\widetilde{\varepsilon}_1(\omega) \widetilde{A}_{ln}^p \rightarrow \widehat{\varepsilon}_1 A_{ln}^p$ приводит (как и в одномерном случае в п. 2.3) к интегральному оператору $\widehat{\varepsilon}_1$. Дисперсионное соотношение, задающее $k_{nl}(\omega)$, теперь можно найти из аналога уравнения (16) при подстановке в него выражения для $\varepsilon_1(\omega)$. При этом можно вычислить производные величин $k_{nl}(\omega) = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 c^{-2} \varepsilon_1(\omega - \omega_0) - \alpha_{nl}^2}$ по переменной ω и получить тем самым групповую скорость и дисперсионную постоянную для каждого параметра α_{nl} .

Разлагая ядро оператора $\widehat{\varepsilon}_1$ в ряд Тейлора в окрестности несущей частоты, получим только одномодовую ненулевую амплитуду поляризации (при фиксированных p, n, l):

$$\left(\frac{\widetilde{\varepsilon}_1}{c^2} - k'^2 + 3 \frac{\widetilde{\varepsilon}_1'}{c^2} (\omega' - \omega_0) \right) X_{\tau\tau} \epsilon^2 + 2i \left((\omega' - \omega_0) \frac{\widetilde{\varepsilon}_1}{c^2} - k k' + \frac{3}{2} \frac{\widetilde{\varepsilon}_1'}{c^2} (\omega' - \omega_0)^2 \right) X_\tau \epsilon - X_{\xi\xi} \sigma^2 + 2k' X_{\xi\tau} \sigma \epsilon + 2ik X_\xi \sigma = \sigma^3 q_1 |X|^2 X.$$

В этом случае групповую скорость можно получить из уравнения (16) с помощью дифференцирования по ω :

$$\frac{2(\omega' - \omega_0) \widetilde{\varepsilon}_1 / c^2 + 3(\omega' - \omega_0)^2 \widetilde{\varepsilon}_1' / c^2}{2k} = k', \quad \frac{1}{k} \left(\frac{\widetilde{\varepsilon}_1}{c^2} + 3 \frac{\widetilde{\varepsilon}_1'}{c^2} (\omega' - \omega_0) - k'^2 \right) = k''.$$

Это уравнение обобщает аналогичный результат работы [11], полученный с учетом дисперсии в материале среды, оно является уравнением типа уравнения Шредингера [13], схожим с уравнением с нелинейным коэффициентом q_1 . Алгоритм, обобщающий процедуры этого раздела и п. 2.4, приводит к аналогу УКИ для волокон с той же постоянной нелинейности.

Зависимость суммы модулей $|X_1(x, t)| + |X_2(x, t)|$ компонент решений системы (20) от x при $t = 6$. Начальные импульсы $X_1(x, 0) = B_1 \operatorname{sech}(x + D_1)e^{iv_1 x/4}$ и $X_2(x, 0) = B_2 \operatorname{sech}(x + D_2)e^{iv_2 x/4}$, где $D_{1,2}$ – расстояние, пройденное импульсом от места его зарождения; групповые скорости: $v_1 = 3.7$ и $v_2 = 0$; параметры системы: $k'' = 0.8$, $a_1 = 1/3$, $q_1 = 1$ и $a_2 = 1/3$, $q_2 = 1$.

Полученные уравнения являются интегрируемыми только в весьма специальных случаях НУШ, уравнения Манакова и УКИ. С физической точки зрения, однако, требуются решения для более широкого класса уравнений, чем те, что обсуждаются в настоящей работе. Такие решения можно получить с помощью численных методов. Для получения численных решений связанных НУШ (например, уравнения (19) или его многомодовой модификации) используется метод конечных разностей, для которого доказаны устойчивость и сходимость в пространстве L_2 [15]. Норма

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|V|^2 + |U|^2) dx,$$

используемая при доказательстве, представляется естественной, поскольку она основана на законе сохранения [15]. Для системы

$$\begin{aligned} i\partial_z X_1 + \frac{k''}{2} \partial_{tt} X_1 + (q_1 |X_1|^2 + a_1 |X_2|^2) X_1 &= 0, \\ i\partial_z X_2 + \frac{k''}{2} \partial_{tt} X_2 + (q_2 |X_2|^2 + a_2 |X_1|^2) X_2 &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

результаты, показывающие поведение ее решения, показаны на рисунке.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Систему уравнений (10), описывающих взаимодействие между двумя волнами, распространяющимися в противоположных направлениях, можно применить для изучения импульсов, отраженных от границы между материалами с различными показателями преломления, что имеет место на концах оптоволокна. Фундаментальное значение учета взаимодействия между волнами, идущими в противоположных направлениях, вполне отчетливо видно в случае оптических резонаторов, в

которых происходит накопление эффекта взаимодействия. Некоторые интересные свойства применения техники проекционных операторов к задачам оптики также отмечались в работе [1]. В акустике многочисленные важные применения и продолжения развития техники проекционных операторов с учетом нелинейности были отмечены в недавней работе [18] (см. также литературу к этой работе). В работе [22] был сделан важный шаг вперед в развитии методики численного интегрирования, исследованы сходимость и устойчивость для уравнений типа Шафера–Вайна, интегрирование которых производилось с помощью эффективного мультисимплектического алгоритма. Возможное развитие конечно-разностных методов в применении к системе типа связанного НУШ будет предметом дальнейших публикаций. Прямой учет обеих компонент поляризации с помощью метода из раздела 2 приводит к (4×4) -матрицам проекционных операторов и также будет рассмотрен в следующих работах.

Благодарности. Работа была поддержана COST CM0702 и Polish Ministry of Science (грант 645/N-COST/2010/0).

Список литературы

- [1] M. Kolesik, J. V. Moloney, M. Mlejnek, *Phys. Rev. Lett.*, **89**:28 (2002), 283902, 4 pp.
- [2] P. Kinsler, S. B. P. Radnor, G. H. C. New, *Phys. Rev. A*, **72**:6 (2005), 063807, arXiv: physics/0611215.
- [3] P. Kinsler, *J. Opt. Soc. Amer. B*, **24**:9 (2007), 2363–2368, arXiv:0707.0986.
- [4] P. Kinsler, *Phys. Rev. A*, **81**:2 (2010), 023808, 8 pp., arXiv:0909.3407.
- [5] S. B. Leble, *Nonlinear Waves in Waveguides*, Springer, Berlin, 1991.
- [6] T. Schäfer, C. E. Wayne, *Propagation of Ultra-short Optical Pulses in Nonlinear Media*, Elsevier, New York, 2002.
- [7] Y. Chung, C. K. R. T. Jones, T. Schäfer, C. E. Wayne, *Nonlinearity*, **18**:3 (2005), 1351–1374, arXiv: nlin/0408020.
- [8] S. Sakovich, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **12** (2008), 123001, 4 pp., arXiv:0801.3179.
- [9] A. Sakovich, S. Sakovich, *J. Phys. A*, **39**:22 (2006), L361–L367, arXiv: nlin/0601019.
- [10] S. Leble, “Nonlinear waves in optical waveguides and soliton theory applications”, *Optical solitons. Theoretical and Experimental Challenges*, Lecture Notes in Physics, **613**, eds. K. Porsezian, V. C. Kuriakose, Springer, 2003, 71–104.
- [11] S. B. Leble, B. Reichel, *J. Mod. Opt.*, **55**:1 (2008), 1–11.
- [12] S. Leble, B. Reichel, *Eur. Phys. J.*, **173**:1 (2009), 5–55.
- [13] В. Е. Захаров, *ПМТФ*, **2** (1968), 86–94.
- [14] А. Л. Берхоер, В. Е. Захаров, *Sov. Phys. JETP*, **31**:3 (1970), 486–490.
- [15] B. Reichel, S. Leble, *Comput. Math. Appl.*, **55**:4 (2008), 745–759, arXiv: math/0611420.
- [16] С. Келих, *Молекулярная нелинейная оптика*, М., Наука, 1981.
- [17] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, New York, 2001.
- [18] A. Perelomova, *Phys. Lett. A*, **357**:1 (2006), 42–47.
- [19] A. Hasegawa, Y. Kodama, *Proc. IEEE*, **69**:9 (1981), 1145–1150.
- [20] A. Hasegawa, Y. Kodama, *Solitons in Optical Communication*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [21] S. B. Leble, B. Reichel, *J. Modern Opt.*, **55**:21 (2008), 3651–3664.
- [22] M. Pietrzyk, I. Kanattšikow, *Multisymplectic analysis of the short pulse equation and numerical application*, WIAS Preprint № 1278, 2007.
http://www.wias-berlin.de/preprint/1278/wias_preprints_1278.pdf.