Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Манько, Вероятностное представление спиновых состояний и неравенства для унитарных матриц, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 1, 151–161

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6670>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:10:01

© 2011 г.

М. А. Манько*

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СПИНОВЫХ СОСТОЯНИЙ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ УНИТАРНЫХ МАТРИЦ

Дается обзор вероятностного представления спиновых состояний, описываемых распределениями вероятностей (томограммами). При получении некоторых неравенств для унитарных матриц используется связь томограммы с элементами унитарной группы. Граница Цирельсона и энтропийные неравенства для зацепленных спиновых состояний представляются в виде соотношений для функций на унитарной группе.

Ключевые слова: зацепленность, томографическая вероятность, неравенства Белла, энтропийные соотношения неопределенностей.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1], [2] было предложено новое представление квантовых состояний для систем с непрерывными переменными такими, как координата и импульс. В этом представлении обычное распределение вероятностей, названное томограммой состояния, используется в качестве альтернативы волновой функции или матрицы плотности. Для дискретных переменных таких, как спин, томографическое вероятностное представление было введено в работах [3], [4]. Обзор томографического подхода дан в недавней работе [5]. Квантовая томография связана с экспериментальными измерениями квантовых состояний [6], [7], выраженных через функцию Вигнера [8] с использованием интегрального преобразования Радона [9], [10].

Вероятностное представление квантовых состояний обладает определенными особенностями, которые проливают свет на некоторые квантово-механические явления такие, как, например, энтангLEMENT – зацепленность квантовых состояний [11], с точки зрения чисто классической теории вероятности. Развитие вероятностного представления квантовых состояний в этом аспекте дано в работах [12], [13].

Так как квантовые состояния ассоциируются с распределениями вероятностей, концепции теории вероятности такие, как энтропия Шеннона [14] и энтропия Реньи [15], естественным образом появляются в томографической картине квантовой

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: mmanko@sci.lebedev.ru

механики в виде томографической энтропии Шеннона [16], [17] и томографической энтропии Реньи [18].

Оказалось, что в томографии состояний с дискретными переменными [4], [19] (см. также работы [20], [21]) вероятностное представление тесно связано как со свойствами унитарных матриц, так и со свойствами стохастических и бистохастических матриц, отображающих распределения вероятностей, записанных в форме векторов вероятностей, на другие векторы вероятностей.

В теории вероятности существуют хорошо известные неравенства для энтропии Шеннона и энтропии Реньи, которые могут быть использованы в томографическом подходе для изучения новых свойств квантовых состояний [13], [22]. С другой стороны, в теории энтанглементы имеются аспекты, которые следовало бы осветить лучше, например представить в явном виде роль собственных векторов и собственных значений матрицы плотности составной системы, что могло бы пролить свет на различие сепарабельных и запутанных состояний. Целью настоящей работы является обзор томографического вероятностного представления квантовых состояний и нахождение новых неравенств для дискретных переменных (спин, кудиты), выраженных исключительно через неравенства для унитарных матриц.

2. ВЕКТОРЫ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НА УНИТАРНЫХ ГРУППАХ И СПИНОВЫЕ СОСТОЯНИЯ

В настоящем разделе мы напомним схему вероятностного представления спиновых состояний, предложенную в работах [3], [4] и записанную в форме векторов вероятностей, зависящих от унитарных матриц [23], [24].

В этом представлении спиновое состояние некоторой частицы со спином j (кудит) связывается с вектором вероятности $\vec{w}(u) = \{w_m(u)\}$, который называется спиновой томограммой, где u является унитарной матрицей размерности $(2j+1) \times (2j+1)$ [24]:

$$\vec{w}(u) = |u u_0|^2 \vec{\rho}, \quad (1)$$

при этом имеется в виду, что любая матрица $|v|^2$ по определению имеет матричные элементы $|v|_{jk}^2 = |v_{jk}|^2$. Матрицу u_0 в формуле (1) можно записать как

$$u_0 = \|\vec{u}_j \vec{u}_{j-1} \dots \vec{u}_{-j}\|, \quad (2)$$

$$\rho \vec{u}_m = \rho_m \vec{u}_m. \quad (3)$$

Вектор $\vec{\rho}$ в выражении (1) имеет компоненты $\vec{\rho} = \{\rho_m; m = j, j-1, \dots, -j\}$, где ρ_m – собственные значения матрицы плотности. Если матрица u является матрицей неприводимого представления группы $SU(2)$ с матричными элементами представления $D_{mm'}^{(j)}(\varphi, \theta, \psi)$, зависящими от трех углов Эйлера φ , θ и ψ :

$$D_{mm'}^{(j)}(\varphi, \theta, \psi) = e^{im'\psi} d_{mm'}^{(j)}(\theta) e^{im\varphi}, \quad (4)$$

где

$$d_{mm'}^{(j)} = \left[\frac{(j+m')!(j-m')!}{(j+m)!(j-m)!} \right]^2 \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{m'+m} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{m'-m} P_{j-m'}^{m'-m, m'+m}(\cos \theta), \quad (5)$$

и $P_n^{a,b}(x)$ – полином Якоби, то матричные элементы матрицы плотности $\rho_{mm'}$ определяются формулой [4]

$$(-1)^{-m'_2} \sum_{j_3=0}^{2j} \sum_{m_3=-j_3}^{j_3} (2j_3+1)^2 \sum_{m_1=-j}^j \int (-1)^{m'_1} w(m_1, \varphi, \theta) D_{0m_3}^{(j_3)}(\varphi, \theta, \psi) \times \\ \times \begin{pmatrix} j & j & j_3 \\ m_1 & -m_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & j_3 \\ m'_1 & -m'_2 & m_3 \end{pmatrix} \frac{d\omega}{8\pi^2} = \rho_{m'_1 m'_2}^{(j)}, \quad (6)$$

где $m'_1, m'_2 = -j, -j+1, \dots, j$ и интегрирование производится по параметрам поворота φ, θ и ψ , причем $\int d\omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi$. В формуле (6) мы взяли значение u при $\psi = 0$ и $w_{m_1}(u) = w(m_1, \varphi, \theta)$.

Компоненты $w_m(u)$ вектора вероятности $\vec{w}(u)$ имеют физический смысл вероятностей существования проекции спина m на оси квантования, заданные единичным вектором $\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$. Для чистого состояния $\vec{\rho} = (1, 0, \dots, 0)$ вектор $\vec{w}(u)$ имеет вид

$$\vec{w}(u) = |u\vec{u}_j|^2. \quad (7)$$

Это означает, что m -я компонента вектора вероятности может быть записана как

$$w_m(u) = \left| \sum_{m'=-j}^j u_{mm'}(u_0)_{m'j} \right|^2. \quad (8)$$

Компоненты векторов вероятностей являются диагональными элементами матрицы плотности, преобразованной унитарной матрицей [4]

$$w_m(u) = \langle m | u \rho u^\dagger | m \rangle. \quad (9)$$

Для смешанных спиновых состояний с матрицей плотности ρ , обладающей собственными векторами $\vec{u}_m$ и собственными значениями ρ_m , компоненты вектора вероятности являются выпуклыми суммами, в которых собственные значения играют роль распределений вероятностей:

$$w_m(u) = \sum_{m''=-j}^j \left| \sum_{m'=-j}^j u_{mm'}(u_0)_{m'm''} \right|^2 \rho_{m''}. \quad (10)$$

В такой форме роль собственных значений и собственных векторов матрицы плотности ρ показана явно. Итак, дана матрица плотности ρ , т. е. даны унитарная матрица u_0 и собственные значения $\rho_m \geq 0$, $\sum_{m=-j}^j \rho_m = 1$, тогда спиновое состояние идентифицируется с вектором вероятности $\vec{w}(u)$ на унитарной группе. Вектор вероятности удовлетворяет условию

$$\sum_{m=-j}^j w_m(u) = 1 \quad (11)$$

для любого значения унитарной матрицы.

3. ЭНТАНГЛЕМЕНТ ДВУХСПИНОВЫХ СОСТОЯНИЙ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ УНИТАРНЫХ МАТРИЦ

Явление энтанглемента в составной системе описывается свойствами матрицы плотности, например для двухчастичной системы – через $\rho(1, 2)$. Если матрицу $\rho(1, 2)$ можно представить в виде выпуклой суммы тензорных произведений матриц плотности состояний подсистем $\rho^{(k)}(1)$ и $\rho^{(k)}(2)$,

$$\rho(1, 2) = \sum_k p_k \rho^{(k)}(1) \otimes \rho^{(k)}(2), \quad p_k \geq 0, \quad \sum_k p_k = 1, \quad (12)$$

состояние называется сепарабельным. Если это невозможно, состояние называется запутанным.

В этом разделе мы напомним томографическую картину запутанных состояний для двухспиновой системы (два кудита) и получим в явном виде новые выражения для собственных состояний и собственных векторов матрицы плотности составной системы для случаев сепарабельного и запутанного состояний.

Томограмма двухкудитных состояний является совместной функцией распределения вероятностей $w(m_1, m_2, u)$ двух проекций спина m_1 и m_2 , зависящих от унитарной матрицы u . Размерность этой матрицы равна $(2j_1 + 1) \times (2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1) \times (2j_2 + 1)$, и томограмма определяется формулой (см., например, работу [5])

$$w(m_1, m_2, u) = \langle m_1 m_2 | u \rho(1, 2) u^\dagger | m_1 m_2 \rangle, \quad (13)$$

где u – унитарная матрица.

В случае $u = u_1 \times u_2$, где u_1 и u_2 – унитарные матрицы локального унитарного преобразования в пространствах состояний со спинами j_1 и j_2 , томограмма дает вероятность получения проекций спинов m_1 и m_2 на оси квантования $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ для каждого из спинов. Векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ определяются углами Эйлера θ_1, φ_1 и θ_2, φ_2 , соответствующими матрицам u_1 и u_2 , взятым как матрицы неприводимого представления группы $SU(2)$ для каждого из двух спинов.

В томографическом представлении томограмма задается вектором вероятности $\vec{w}(u)$ с компонентами $w_{m_1 m_2}(u)$. Поясним наши обозначения. Для двухспиновой системы мы используем двойной индекс $m_1 m_2$ для любой компоненты вектора. Для любой матрицы u матричные элементы обозначаются как $w_{m_1 m_2, m'_1 m'_2}$, где $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$, $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$, $-j_1 \leq m'_1 \leq j_1$ и $-j_2 \leq m'_2 \leq j_2$.

Вектор вероятности в столбце, определяющий состояние двух кудитов, задается тем же уравнением (1), в котором вектор

$$\vec{\rho} = \{\rho_{m_1 m_2}, m_1 = j_1, j_1 - 1, \dots, -j_1, m_2 = j_2, j_2 - 1, \dots, -j_2\}$$

содержит собственные значения матрицы плотности, а унитарная матрица u_0 составлена из собственных векторов этой матрицы плотности.

Запишем компоненты вектора вероятности для чистого состояния ($\text{Tr } \rho^2(1, 2) = 1$):

$$w_{m_1 m_2}(u) = |u u_0|_{m_1 m_2, j_1 j_2}^2 = \left| \sum_{m'_1 = -j_1}^{j_1} \sum_{m'_2 = -j_2}^{j_2} u_{m_1 m_2, m'_1 m'_2}(u_0)_{m'_1 m'_2, j_1 j_2} \right|^2. \quad (14)$$

Нетрудно заметить, что чистое состояние двухспиновой системы задается квадратом модуля матричных элементов унитарной матрицы, а именно матричными элементами uu_0 . Таким образом, задача о свойствах энтанглементы двухспинового квантового состояния отображается на задачу о свойствах матричных элементов унитарной матрицы uu_0 и связанной с ней ортостохастической матрицы $|uu_0|^2$.

Сепарабельность квантового состояния (12) сводится к нахождению совместного распределения вероятностей (13), которое может быть представлено в виде выпуклой суммы распределений вероятностей без корреляций для каждой подсистемы [22]:

$$w(m_1, m_2, u = u_1 \otimes u_2) = \sum_k p_k w_1^{(k)}(m_1, u_1) w_2^{(k)}(m_2, u_2). \quad (15)$$

Это соотношение означает, что для подгруппы $u_1 \otimes u_2$ унитарной группы матриц u совместное распределение вероятностей (13) имеет вид (15), где $w_1^{(k)}(m_1, u_1)$ и $w_2^{(k)}(m_2, u_2)$ – томограммы состояний подсистем, зависящие соответственно от матриц локальных преобразований u_1 и u_2 . Данное свойство сепарабельности, выраженное через свойства функций распределения вероятностей и обсуждавшееся ранее (см., например, работы [5], [19]), теперь может быть сформулировано как некоторые свойства унитарных матриц.

На самом деле, применяя формулу (14) для случая двухспиновой системы, можно записать условие сепарабельности в виде

$$|uu_0|^2 \vec{\rho} = \sum_k p_k |u_1 u_{10}^{(k)}|^2 \vec{\rho}_1^{(k)} \otimes |u_2 u_{20}^{(k)}|^2 \vec{\rho}_2^{(k)}, \quad (16)$$

где $u = u_1 \otimes u_2$, и это уравнение должно выполняться для всех матриц $u_1 \otimes u_2$. Формула (16) есть представление вектора вероятности, описывающего состояние со спинами j_1 и j_2 . В выпуклой сумме векторы $\vec{\rho}_1^{(k)}$ и $\vec{\rho}_2^{(k)}$ содержат в качестве компонент собственные значения соответственно k -х матриц плотности $\rho^{(k)}(1)$ и $\rho^{(k)}(2)$. Унитарные матрицы $u_{10}^{(k)}$ и $u_{20}^{(k)}$ содержат столбцы, являющиеся соответствующими собственными векторами k -х матриц плотности $\rho^{(k)}(1)$ и $\rho^{(k)}(2)$.

Таким образом, проблема сепарабельности или энтанглементы сводится к следующей проблеме. Может ли для заданных унитарных матриц u и u_0 и вектора вероятности $\vec{\rho}$ (который можно рассматривать как квадрат модуля матричных элементов фиксированных столбцов унитарной матрицы u_3 , например как столбец ортостохастической матрицы $|u_3|^2$, обозначенный как $|\vec{u}_3|^2$) произведение $|uu_0|^2 |\vec{u}_3|^2$ быть представлено в форме (16)? Это означает, что размерность матрицы u допускает существование подгруппы матриц $u_1 \otimes u_2$.

Итак, для заданной унитарной матрицы u_0 и столбца $|\vec{u}_3|^2$ ортостохастической матрицы $|u_3|^2$, действующих в пространстве состояний двух кудитов, возможно представление произведения двух прямоугольных матриц в виде выпуклой суммы

$$|u_1 \otimes u_2 \cdot u_0|^2 |\vec{u}_3|^2 = \sum_k p_k |u_1 u_{10}^{(k)}|^2 |\vec{u}_4^{(k)}|^2 \otimes |u_2 u_{20}^{(k)}|^2 |\vec{u}_5^{(k)}|^2, \quad (17)$$

в которой $|\vec{u}_4^{(k)}|^2$ является столбцом ортостохастической матрицы для первого кудита, а $|\vec{u}_5^{(k)}|^2$ – столбцом ортостохастической матрицы для второго кудита.

В такой формулировке проблема сепарабельности или энтанглементы двухчастичной спиновой системы сводится к проблеме нахождения некоторого специфического

свойства унитарных матриц u и анализа поведения соответствующего произведения (17) относительно подгрупп матриц $u_1 \otimes u_2$.

Используя хорошо известные нарушения неравенств Белла [25] для зацепленных состояний двух кудитов, можно переформулировать эти неравенства в рамках подхода, основанного на свойствах унитарных матриц.

Для этого рассмотрим следующий частный случай.

Пусть заданы фиксированная четырехмерная унитарная матрица $u_0 = u_{10} \times u_{20}$ и прямоугольная матрица $|\vec{u}_3|^2$ с четырьмя компонентами вида

$$|\vec{u}_3|^2 = |\vec{u}_4|^2 \otimes |\vec{u}_5|^2, \quad (18)$$

где

$$|\vec{u}_4|^2 = \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix}, \quad |\vec{u}_5|^2 = \begin{pmatrix} b \\ 1-b \end{pmatrix}, \quad 0 \leq a, \quad b \leq 1. \quad (19)$$

В этом случае уравнение (17) выполняется для выбранных матриц u_0 и любых допустимых параметров a и b , так как

$$|u_1 \otimes u_2 \cdot u_{01} \otimes u_{02}|^2 \cdot |\vec{u}_4|^2 \otimes |\vec{u}_5|^2 = |u_1 u_{01}|^2 |\vec{u}_4|^2 \otimes |u_2 u_{02}|^2 |\vec{u}_5|^2. \quad (20)$$

Для вектора вероятности $|\vec{u}_3|^2$ с четырьмя компонентами $(x, y, z, 1-x-y-z)$ всегда можно найти выпуклую сумму векторов $|\vec{u}_4^{(k)}|^2$ и $|\vec{u}_5^{(k)}|^2$ в форме (19), так что

$$|\vec{u}_3|^2 = \sum_k \mathcal{P}_k |\vec{u}_4^{(k)}|^2 \otimes |\vec{u}_5^{(k)}|^2. \quad (21)$$

В связи с этим, если матрица u_0 факторизуется как $u_{10} \otimes u_{20}$, уравнение (17) выполняется. Особенным свойством таких выпуклых сумм является тот факт, что параметры Белла, связанные с проблемой квантовых корреляций в системе двух спинов $1/2$, могут быть представлены такими суммами в случае сепарабельных состояний. Тогда, как было показано в работе [12], параметр Белла можно представить в виде следа от произведения двух матриц, а именно

$$I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

и стохастической матрицы M корреляций проекций спина, измеренных для четырех пар осей квантования $(\vec{n}_a \vec{n}_b)$, $(\vec{n}_a \vec{n}_c)$, $(\vec{n}_d \vec{n}_b)$ и $(\vec{n}_d \vec{n}_c)$.

Ниже мы выразим стохастическую матрицу M через вектор-столбцы с компонентами, определяемыми собственными векторами матрицы плотности, задающими фиксированную унитарную матрицу u_0 , причем собственные векторы отвечают собственным значениям матрицы плотности, рассматриваемым как компоненты 4-вектора вероятности $|\vec{u}_3|^2$, а также через двумерные матрицы u_1 , u_2 , v_1 , v_2 и их тензорные произведения $u_1 \otimes v_1$, $u_1 \otimes v_2$, $u_2 \otimes v_1$, $u_2 \otimes v_2$.

Четырехмерная стохастическая матрица M имеет вид

$$M = \left\| |u_1 \otimes v_1 u_0|^2 |\vec{u}_3|^2 |u_1 \otimes v_2 u_0|^2 |\vec{u}_3|^2 |u_2 \otimes v_1 u_0|^2 |\vec{u}_3|^2 |u_2 \otimes v_2 u_0|^2 |\vec{u}_3|^2 \right\|. \quad (23)$$

Для чистого состояния, т. е. $|\vec{u}_3|^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, обозначим матрицу M как M_p . Четырехмерная матрица M_p выражается через первый столбец $\vec{u}_0$ матрицы u_0 :

$$M_p = \left\| |u_1 \otimes v_1 \vec{u}_0|^2 |u_1 \otimes v_2 \vec{u}_0|^2 |u_2 \otimes v_1 \vec{u}_0|^2 |u_2 \otimes v_2 \vec{u}_0|^2 \right\|. \quad (24)$$

Параметр Белла B удовлетворяет следующему неравенству для сепарабельных состояний:

$$|B| = |\text{Tr } MI| \leq 2. \quad (25)$$

В случае запутанных состояний граница этого неравенства является границей Цирельсона $2\sqrt{2}$ [26].

Используя полученные результаты и нашу формулу для параметра Белла (25), содержащую только унитарные матрицы u_0, u_1, v_1, u_2, v_2 и u_3 , мы можем утверждать, что максимум $|\text{Tr } MI|$ для сепарабельных состояний имеет вид

$$\max |\text{Tr } MI| = |\text{Tr } M_p I| = 2, \quad (26)$$

а для запутанных состояний –

$$\max |\text{Tr } MI| = |\text{Tr } M_p I| = 2\sqrt{2}. \quad (27)$$

Обратим внимание на тот факт, что в обоих выражениях (26) и (27) максимум вычисляется относительно матриц u_0, u_1, u_2, v_1 и v_2 . Таким образом, выведенные неравенства являются свойствами унитарных матриц. Они существуют независимо от квантово-механических свойств состояний двух кудитов.

Аналогичный результат можно сформулировать для произвольной системы двух спинов j_1 и j_2 . Это означает, что для любых унитарных $(N \times N)$ -матриц u и подгруппы группы этих унитарных матриц $u_1 \otimes u_2$, где $N = N_1 N_2$, u_1 – унитарная $(N_1 \times N_1)$ -матрица, а u_2 – унитарная $(N_2 \times N_2)$ -матрица, матрица u_0 со столбцами – собственными векторами неотрицательной эрмитовой матрицы ρ определяет максимум линейных комбинаций матричных элементов мультикудитных аналогов матрицы (23).

4. ЭНТРОПИЙНЫЕ СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ДЛЯ СПИНОВЫХ СОСТОЯНИЙ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ УНИТАРНЫХ МАТРИЦ

Энтропийные неравенства для томограмм спиновых состояний рассмотрены в работе [13]. Здесь мы получим некоторые неравенства для унитарных матриц, связанные с этими энтропийными неравенствами.

Рассмотрим функцию на унитарной группе

$$H(u) = -(|uu_0|^2 |\vec{u}_3|^2) \{ \ln(|uu_0|^2 |\vec{u}_3|^2) \}, \quad (28)$$

где использован вектор вероятности (1) и собственный вектор $\vec{\rho}$ заменен на вектор $|\vec{u}_3|^2$. Уравнение (28) можно записать подробнее в виде скалярного произведения двух векторов:

$$H(u) = - \sum_j \left\{ \sum_{k,s} |u_{jk}(u_0)_{ks}|^2 |(u_3)_{ps}|^2 \right\} \left\{ \ln \sum_{k',s'} |u_{jk'}(u_0)_{k's'}|^2 |(u_3)_{ps'}|^2 \right\}. \quad (29)$$

Индекс p фиксирован и определяет столбец в унитарной матрице u_3 , а вектор $\vec{u}_3$ есть не что иное, как произвольный столбец этой матрицы. В случае спиновых состояний с томограммой (1) функция $H(u)$ есть не что иное как энтропия Шеннона, связанная с томографическим распределением вероятности.

Теперь мы рассмотрим эту функцию для унитарных матриц u вида $u = u_1 \otimes u_2$, что соответствовало бы томографической энтропии двухкудитных состояний

$$H(u_1, u_2) = -(|u_1 \otimes u_2 u_0|^2 |\vec{u}_3|^2) \{ \ln(|u_1 \otimes u_2 u_0|^2 |\vec{u}_3|^2) \}. \quad (30)$$

Мы найдем неравенство, используя дополнительную унитарную матрицу u_P оператора, осуществляющего перестановку базисных векторов $\tilde{P}\vec{e}_j = \vec{e}_k$, которую мы взяли для определения другой матрицы $\tilde{P}$ при помощи следующей процедуры.

$(N \times N)$ -матрица u_P содержит N единиц как в столбцах, так и в строках. Сдвинем некоторые единицы вдоль столбца. В результате такой операции получим N единиц, расположенных в столбцах и строках таким образом, что некоторые строки состоят только из нулей, в то время как другие строки содержат несколько единиц. Обозначим матрицу, полученную в результате такой процедуры, как $\tilde{P}$. Количество таких различных матриц соответствует количеству возможностей вставить единицу и ноль в столбцы и строки квадратных матриц с единственной единицей в каждом столбце. Для каждой из этих матриц выполняется неравенство

$$-(\tilde{P}|uu_0|^2 |\vec{u}_3|^2) \{ \ln(\tilde{P}|uu_0|^2 |\vec{u}_3|^2) \} \leqslant -(|uu_0|^2 |\vec{u}_3|^2) \{ \ln(|uu_0|^2 |\vec{u}_3|^2) \}, \quad (31)$$

являющееся обобщением некоторого эквивалентного неравенства для энтропии Шеннона составной системы. Утверждение состоит в том, что энтропия любой составной системы не превышает энтропию любой ее части (подсистемы). В случае двухчастичной системы с операцией локальной симметрии $u_1 \otimes u_2$ неравенство сохраняется, но в этом случае матрица $\tilde{P}$ соответствует маркировке базиса некоторой парой проекций спина $m_1 m_2$. Итак матрицу $\tilde{P}_{m_1 m_2, m'_1 m'_2}$ мы строим из унитарных матриц $(u_P)_{m_1 m_2, m'_1 m'_2}$, собирая все единицы в одну строку либо с фиксированным $m'_2 = m_2$ (при этом в других строках содержатся только нули вместо единиц), либо с фиксированным $m'_1 = m_1$. Оба случая эквивалентны рассмотрению маргинальных распределений вероятностей $w_1(m_1, u_1)$ или $w_2(m_2, u_2)$, если задано совместное распределение вероятностей $w(m_1, m_2, u_1, u_2)$, причем вычисленные энтропии Шеннона связаны соответственно со всеми этими вероятностями.

Мы проиллюстрируем полученный результат для системы двух спинов $1/2$. В этом случае матрицы u , u_0 , и u_3 являются четырехмерными унитарными матрицами. Состояние является чистым, если его томограмма задается как любой столбец ортостохастической матрицы $|uu_0|^2$. Состояние является смешанным, если его томограмма задается как выпуклая сумма столбцов ортостохастической матрицы $|uu_0|^2$, причем коэффициенты этой суммы являются собственными значениями матрицы плотности и одновременно числами в некотором столбце ортостохастической матрицы $|u_3|^2$. Можно взять четырехмерную матрицу u_P , например, в виде

$$u_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

В качестве матриц $\tilde{\mathcal{P}}$ для этой матрицы в неравенстве (31) можно выбрать любые из нижеследующих матриц:

$$\tilde{\mathcal{P}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{P}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{P}}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Неравенство (31) выполняется, если, например, использовать любую матрицу из (33) вместо матрицы $\hat{\mathcal{P}}$. Если взять минимум функции $H(u)$ из (28), то он равен энтропии фон Неймана состояния с данной матрицей плотности. Следовательно, для унитарных матриц имеет место равенство

$$\min_u [-(|uu_0|^2 |\vec{u}_3|^2) \{ \ln(|uu_0|^2 |\vec{u}_3|^2) \}] = -|\vec{u}_3|^2 \ln |\vec{u}_3|^2. \quad (34)$$

Минимум достигается для матрицы u , равной матрице u_0^{-1} .

Для чистого состояния минимум, задаваемый равенством (34), равен нулю.

Для функции $H(u_1, u_2)$, заданной формулой (30), минимум по группе $u_1 \otimes u_2$ удовлетворяет неравенству

$$\min H(u) \leq \min H(u_1, u_2), \quad (35)$$

где минимум $H(u)$ берется по групповым параметрам u .

В случае двух спинов $1/2$ в уравнении (28) томографические энтропии первого и второго спинов задаются двумя ненулевыми компонентами 4-вектора, а именно

$$\vec{w}_1(u) = \tilde{\mathcal{P}}_1 |uu_0|^2 |\vec{u}_3|^2, \quad (36)$$

$$\vec{w}_2(u) = \tilde{\mathcal{P}}_2 |uu_0|^2 |\vec{u}_3|^2. \quad (37)$$

Для $u_1 \otimes u_2$ эти ненулевые компоненты задают два вектора вероятностей $\vec{\Omega}_1(u_1)$ и $\vec{\Omega}_2(u_2)$, где

$$\vec{w}_1(u) \rightarrow \vec{\Omega}_1(u_1) = \tilde{\mathcal{P}}_1 |u_1 \otimes u_2 u_0|^2 |\vec{u}_3|^2, \quad (38)$$

$$\vec{w}_2(u) \rightarrow \vec{\Omega}_2(u_2) = \tilde{\mathcal{P}}_2 |u_1 \otimes u_2 u_0|^2 |\vec{u}_3|^2. \quad (39)$$

После умножения вектора вероятности на матрицы $\tilde{\mathcal{P}}_1$ и $\tilde{\mathcal{P}}_2$ исчезает зависимость результата от u_2 для первого спина и соответственно от u_1 для второго спина.

Минимум энтропии Шеннона относительно вектора вероятности $\vec{\Omega}_1(u_1)$ равен энтропии фон Неймана для первого спинового состояния. Соотношение между энтропией фон Неймана составной системы из двух спинов и энтропией фон Неймана для первого спинового состояния зависит от матрицы u_0 . Например, для чистого состояния двух спинов энтропия фон Неймана равна нулю. Энтропия фон Неймана подсистемы больше нуля, если матрица $u_0 \neq u_{01} \otimes u_{02}$, что соответствует неравенству

$$\min_u (-|u\vec{u}_j|^2 \ln |u\vec{u}_j|^2) \leq \min_{u_1 \otimes u_2} (-\tilde{\mathcal{P}}_1 |u_1 \otimes u_2 \vec{u}_j|^2 \ln \tilde{\mathcal{P}}_1 |u_1 \otimes u_2 \vec{u}_j|^2), \quad (40)$$

в котором u – четырехмерная унитарная матрица, u_1 и u_2 – двумерные унитарные матрицы, а $\vec{u}_j$ – первый столбец четырехмерной матрицы u_0 .

Для просто сепарабельного состояния $u_0 = u_{10} \otimes u_{20}$. В этом случае минимумы в обеих частях уравнения (40) совпадают и равны нулю. Таким образом, известное свойство нарушения классических неравенств для энтропии системы и ее подсистемы в квантовой области соответствует неравенству (40) для унитарных матриц.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведем основные результаты настоящей работы.

Используя предложенную ранее формулировку квантовой механики [5], в которой квантовые состояния описываются распределениями вероятностей, а конкретное выражение для распределений в случае спинового состояния – с помощью вектора вероятности, зависящего от элементов унитарной группы, мы представили известные неравенства Белла и границы этих неравенств (26), (27) в форме неравенств для унитарных матриц.

Мы выразили разницу классических и квантовых соотношений между энтропиями составных систем и их подсистем для случаев сепарабельных и запутанных состояний как разницу в форме неравенств и их минимумов для функций на унитарной группе. Таким образом, мы прояснили механизм явления энтанглемент в составных квантовых спиновых системах и связали его со свойствами собственных векторов оператора плотности состояния (матрица u_0) и его собственных значений (вектор $|\vec{u}_3|^2$). Роль свойств ортостохастических матриц, которые определяются унитарными матрицами, мы изучим в следующей работе.

Благодарности. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 10-02-00312). Автор выражает благодарность организаторам Международной конференции “Нелинейная физика. Теория и эксперимент. VI” и особенно проф. М. Боити за приглашение и гостеприимство, а также РФФИ (грант № 10-02-08190) за частичную оплату командировочных расходов. Автор благодарен рецензенту за полезные замечания, которые помогли значительно улучшить настоящую статью.

Список литературы

- [1] S. Mancini, V.I. Man'ko, P. Tombesi, *Phys. Lett. A*, **213**:1–2 (1996), 1–6, arXiv: quant-ph/9603002.
- [2] S. Mancini, V.I. Man'ko, P. Tombesi, *Found. Phys.*, **27**:6 (1997), 801–824, arXiv: quant-ph/9609026.
- [3] V.V. Dodonov, V.I. Man'ko, *Phys. Lett. A*, **229**:6 (1997), 335–339.
- [4] В.И. Манько, О.В. Манько, *ЖЭТФ*, **112**:3 (1997), 430–434.
- [5] A. Ibort, V.I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia, *Phys. Scr.*, **79**:6 (2009), 065013, 29 pp., arXiv: 0904.4439.
- [6] D.T. Smith, M. Beck, M.G. Raymer, A. Faridani, *Phys. Rev. Lett.*, **70**:9 (1993), 1244–1247.
- [7] G. Breitenbach, S. Schiller, J. Mlynek, *Nature*, **387**:6632 (1997), 471–475.
- [8] E. Wigner, *Phys. Rev.*, **40**:5 (1932), 749–759.
- [9] J. Bertrand, P. Bertrand, *Found. Phys.*, **17**:4 (1987), 397–405.
- [10] K. Vogel, H. Risken, *Phys. Rev. A*, **40**:5 (1989), 2847–2849.
- [11] E. Schrödinger, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **31**:4 (1935), 555–563; *Naturwiss.*, **23**:48 (1935), 807–812; **23**:49 (1935), 823–828.
- [12] В.А. Андреев, В.И. Манько, О.В. Манько, Е.В. Шукин, *ТМФ*, **146**:1 (2006), 172–185.

- [13] М. А. Манько, В. И. Манько, *ТМФ*, **160**:1 (2009), 143–156, arXiv:0902.4381.
- [14] C. E. Shannon, *Bell System Tech. J.*, **27** (1948), 379–423.
- [15] A. Rényi, *Probability Theory*, North-Holland Ser. Appl. Math. Mech., **10**, North-Holland, Amsterdam, London, 1970.
- [16] O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, *J. Russ. Laser Res.*, **25**:2 (2004), 115–122, arXiv: quant-ph/0401131.
- [17] M. A. Man'ko, *J. Russ. Laser Res.*, **27**:5 (2006), 405–413.
- [18] M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, R. V. Mendes, *J. Russ. Laser Res.*, **27**:6 (2006), 507–532, arXiv: quant-ph/0602189.
- [19] S. N. Filippov, V. I. Man'ko, *J. Russ. Laser Res.*, **31**:3 (2010), 211–231, arXiv:1005.4091.
- [20] G. M. D'Ariano, L. Maccone, M. Paini, *J. Opt. B*, **5**:1 (2003), 77–84, arXiv: quant-ph/0210105.
- [21] S. Weigert, *Phys. Rev. Lett.*, **84**:5 (2000), 802–805, arXiv: quant-ph/9903103.
- [22] M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, *Found. Phys.*, **41**:3 (2011), 330–344.
- [23] V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, F. Zaccaria, *Phys. Lett. A*, **327**:5–6 (2004), 353–364.
- [24] V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia, *Phys. Lett. A*, **372**:43 (2004), 6490–6497, arXiv:0807.0329.
- [25] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.*, **23**:15 (1969), 880–884.
- [26] B. S. Cirel'son, *Lett. Math. Phys.*, **4**:2 (1980), 93–100.