Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Нуччи, Квантование классической механики: следует Ли?, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 1, 162–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6671>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 18:04:41

© 2011 г.

М. К. Нуччи*

КВАНТОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ: СЛЕДУЕТ ЛИ?

Предложено решение с лиевыми и нётеровыми симметриями для двух задач, возникающих в классическом квантовании: квантование обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа высших порядков (выше второго) классической механики и квантование любого обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера–Лагранжа второго порядка, которое связано с простым линейным уравнением посредством нелинейных канонических преобразований.

Ключевые слова: квантование, метод Остроградского, уравнение Шредингера, лиевы симметрии, нётеровы симметрии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Из-за введения состояний с отрицательной нормой, часто называемых духами, некоторые простые линейные уравнения классической механики приводят к серьезным проблемам при квантовании в духе Дирака. Возникающие духи – это не “духи Фаддеева–Попова”¹⁾. Как писал Фаддеев [1], “в терминологии теоретической физики термин “духи” используется для указания на объект, не имеющий реально-го физического смысла. Название “духи Фаддеева–Попова” дается нефизическим полям, исходно введенным при построении явным образом лоренц-ковариантного квантования поля Янга–Миллса. ... Требуется определенный механизм для того, чтобы избавиться от нефизических степеней свободы. Введение нефизических полей – духов – представляет собой один из способов добиться этой цели”. Поэтому “духи Фаддеева–Попова” – это “добрые духи”, не имеющего ничего общего со “злыми духами”, рассматриваемыми в настоящей работе.

В основе “охоты на привидения”, предложенной в работах [2], [3], лежит сохранение лиевых симметрий исходных классических уравнений. Данный метод применялся к теоретико-полевой модели Пейса–Уленбека четвертого порядка [4]

$$\ddot{z} + (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\ddot{z} + \Omega_1^2\Omega_2^2 z = 0, \quad (1)$$

¹⁾Автор благодарна А. Протогенову за указание на различие между этими “духами”.

*Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia, INFN Sezione Perugia, Perugia, Italy. E-mail: nucci@unipg.it

а именно к уравнению Эйлера–Лагранжа, соответствующему лагранжиану второго порядка

$$L = \frac{1}{2}\gamma\{\dot{z}^2 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\dot{z}^2 + \Omega_1^2\Omega_2^2 z^2\}. \quad (2)$$

Мы расширим область, в которой данный метод оказывается полезным, применяя его к лагранжиану третьего порядка из работы [5]

$$L = \frac{1}{2M^4}\{(x''')^2 - (\omega^2 + 2\cos(2\Theta)M^2)(x'')^2 - M^2(M^2 + 2\cos(2\Theta)\omega^2)(x')^2 - M^4\omega^2 x^2\}. \quad (3)$$

Этот лагранжиан приводит к следующему уравнению Эйлера–Лагранжа шестого порядка:

$$\frac{1}{M^4}x^{(vi)} + \frac{2}{M^2}\left(\cos(2\Theta) + \frac{\omega^2}{2M^2}\right)x^{(iv)} - \left(1 + \frac{2\omega^2}{M^2}\cos(2\Theta)\right)x'' + \omega^2 x = 0. \quad (4)$$

В работе [5] для записи гамильтониана, соответствующего лагранжиану (3), использовался, как обычно, метод Остроградского; в этом случае квантование такого гамильтониана приводит к векторам состояний с нулевой нормой, имеющих комплексную энергию, и к другим состояниям с отрицательной нормой. Поскольку, как отмечено в работе [6], правильное квантование “должно давать вещественный и ограниченный снизу энергетический спектр, а также все квантовые состояния должны иметь положительную норму”, мы покажем, что метод, применяемый в работах [2], [3], приводит к правильному гамильтониану, а именно такому, который сохраняет нётеровы симметрии исходного лагранжиана, причем реализуется квантование без духов. Необходимо упомянуть, что Бендер и Манхайм сумели “убедить” квантовый оператор, соответствующий гамильтониану Остроградского для лагранжиана Пейса–Уленбека, “отказаться от духов” с точки зрения $\mathcal{PT}$ -симметрии, а не эрмитова подхода, связанного с гамильтоновой формулировкой квантовой механики, предложенной Дираком [7] почти 80 лет назад. Их достижение имеет то преимущество, что модель Пейса–Уленбека делается приемлемой для физического сообщества, а в процессе появляются дополнительные аргументы в пользу перспективности использования $\mathcal{PT}$ -симметрии.

Кроме того, Бендер и Манхайм [6] писали, что “для придания смысла модели Пейса–Уленбека как непротиворечивой и физической квантовой теории необходимо интерпретировать гамильтониан Пейса–Уленбека как $\mathcal{PT}$ -квантовую теорию”. В работах [2], [3] было показано, что $\mathcal{PT}$ -квантовая теория не является необходимой для получения непротиворечивой и физической квантовой теории модели Пейса–Уленбека.

Быть может, точка зрения $\mathcal{PT}$ -симметрии окажется успешной даже при работе с “духами”, соответствующими гамильтониану Остроградского для уравнения (4). Понятно, что мы пропагандируем наш собственный метод, представляющийся нам более физически обоснованным, поскольку в нем требуется сохранение нётеровых симметрий. Поскольку “теории четвертого порядка можно придать смысл в лоренцевом пространстве, если рассматривать ее как теорию второго порядка”, как утверждают Хокинг и Хертог [8], наш метод в самом деле приводит к таким уравнениям

второго порядка. В разделе 2 мы выводим правильный квантовый гамильтониан для уравнения (4).

В течение более пятидесяти лет известно, что квантование и нелинейные канонические преобразования вовсе не обязательно согласованы друг с другом [9]. Никогда не ослабевал интерес к “переходу от канонических преобразований классической механики к квантовой механике”, как лаконично выражено в работе [10], но насколько нам известно, никто не предложил иную схему квантования, которая сохраняла бы нётеровы симметрии исходного лагранжиана. Мы представляем процедуру, которая устраняет ограничение, возникающее из-за конфликта между непротиворечивым квантованием и инвариантностью гамильтонова описания относительно нелинейных канонических преобразований. Она основана на сохранении нётеровых симметрий в качестве лиевых симметрий соответствующего уравнения Шредингера. В книге [11] (см. упражнение 18, с. 433) представлен альтернативный гамильтониан для простого гармонического осциллятора. Он получается применением нелинейного канонического преобразования к классическому гамильтониану гармонического осциллятора. В работе [12] этот альтернативный гамильтониан использовался для демонстрации той бессмыслицы, к которой приводят обычные схемы квантования. В настоящей работе мы применяем наш метод в том же случае гармонического осциллятора с целью вывести правильное квантовое уравнение Шредингера для альтернативного гамильтониана, требуя сохранения нётеровых симметрий. Раздел 3 посвящен этому методу и его применению.

2. КВАНТОВАНИЕ ЛАГРАНЖИАНОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Кратко сформулируем метод Остроградского для приведения к гамильтонову виду задачи исчисления вариаций по одной независимой переменной с лагранжианом высшего порядка [13], [14].

Пусть $L(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)})$, где x в общем случае может быть мультипеременной, а n мультииндексом (но мы ограничим свое рассмотрение случаем единственной зависимой переменной, которая может входить с производными по независимой переменной t вплоть до n -й), – лагранжиан, для которого уравнение Эйлера–Лагранжа из исчисления вариаций имеет вид

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial L}{\partial x^{(n)}} \right). \quad (5)$$

Чтобы получить гамильтоново представление, требуется лагранжиан первого порядка. Остроградский определяет импульсы как

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \right) + \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{\partial L}{\partial x^{(n)}} \right), \\ p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dddot{x}} \right) + \dots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \left(\frac{\partial L}{\partial x^{(n)}} \right), \\ &\dots, \\ p_n &= \frac{\partial L}{\partial x^{(n)}}, \end{aligned} \quad (6)$$

чем гарантируется, что охвачены все производные, присутствующие в лагранжиане. Канонические координаты определяются согласно

$$q_1 = x, \quad q_2 = \dot{x}, \quad \dots, \quad q_n = x^{(n-1)}. \quad (7)$$

Гамильтонова функция тогда определяется выражением

$$H = -L + p_1 q_2 + p_2 q_3 + \dots + p_{n-1} q_n + p_n x^{(n)}, \quad (8)$$

что сводится к стандартному предписанию, если лагранжиан имеет первый порядок. Применяя принцип Гамильтона, получаем стандартные уравнения на гамильтониан, описывающий систему с n степенями свободы:

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (9)$$

Это вполне пригодный формализм, однако же переход к квантовой механике приводит к дефектному описанию физических свойств исходной системы, как видно из работ [4], [5].

Рассмотрим далее уравнение шестого порядка (4) и соответствующий лагранжиан (3). Для упрощения выражений введем три новых параметра $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ так, что уравнение (4) можно переписать в виде

$$x^{(vi)} = -(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)x^{(iv)} - (\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_1^2\omega_3^2 + \omega_2^2\omega_3^2)x'' - \omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2x, \quad (10)$$

а соответствующий лагранжиан (3) в виде

$$L = \frac{1}{2}((x''')^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)(x'')^2 + (\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_1^2\omega_3^2 + \omega_2^2\omega_3^2)(x')^2 - \omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2x^2) + \frac{dg}{dt}, \quad (11)$$

где $g = g(t, x, x', x'')$ – калибровочная функция.

Уравнение (10) допускает восьмимерную алгебру точечных лиевых симметрий, порожденную операторами

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \sin(\omega_1 t) \partial_x, & \Gamma_2 &= \cos(\omega_1 t) \partial_x, & \Gamma_3 &= \sin(\omega_3 t) \partial_x, & \Gamma_4 &= \cos(\omega_3 t) \partial_x, \\ \Gamma_5 &= \sin(\omega_2 t) \partial_x, & \Gamma_6 &= \cos(\omega_2 t) \partial_x, & \Gamma_7 &= x \partial_x, & \Gamma_8 &= \partial_t, \end{aligned}$$

в то время как лагранжиан (11) допускает семь нётеровых точечных симметрий и соответственно семь первых интегралов, а именно

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\Rightarrow \text{Int}_1 = (\omega_2^2\omega_3^2x + (\omega_2^2 + \omega_3^2)x'' + x^{(iv)}) \cos(\omega_1 t)\omega_1 - \\ &\quad - (\omega_2^2\omega_3^2x' + (\omega_2^2 + \omega_3^2)x''' + x^{(v)}) \sin(\omega_1 t), \\ \Gamma_2 &\Rightarrow \text{Int}_2 = (\omega_2^2\omega_3^2x + (\omega_2^2 + \omega_3^2)x'' + x^{(iv)}) \sin(\omega_1 t)\omega_1 + \\ &\quad + (\omega_2^2\omega_3^2x' + (\omega_2^2 + \omega_3^2)x''' + x^{(v)}) \cos(\omega_1 t), \\ \Gamma_3 &\Rightarrow \text{Int}_3 = (\omega_1^2\omega_2^2x + (\omega_1^2 + \omega_2^2)x'' + x^{(iv)}) \cos(\omega_3 t)\omega_3 - \\ &\quad - (\omega_1^2\omega_2^2x' + (\omega_1^2 + \omega_2^2)x''' + x^{(v)}) \sin(\omega_3 t), \\ \Gamma_4 &\Rightarrow \text{Int}_4 = (\omega_1^2\omega_2^2x + (\omega_1^2 + \omega_2^2)x'' + x^{(iv)}) \sin(\omega_3 t)\omega_3 + \\ &\quad + (\omega_1^2\omega_2^2x' + (\omega_1^2 + \omega_2^2)x''' + x^{(v)}) \cos(\omega_3 t), \\ \Gamma_5 &\Rightarrow \text{Int}_5 = (\omega_1^2\omega_3^2x + (\omega_1^2 + \omega_3^2)x'' + x^{(iv)}) \cos(\omega_2 t)\omega_2 - \\ &\quad - (\omega_1^2\omega_3^2x' + (\omega_1^2 + \omega_3^2)x''' + x^{(v)}) \sin(\omega_2 t), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_6 \Rightarrow \text{Int}_6 &= (\omega_1^2 \omega_3^2 x + (\omega_1^2 + \omega_3^2) x'' + x^{(iv)}) \sin(\omega_2 t) \omega_2 + \\
&\quad + (\omega_1^2 \omega_3^2 x' + (\omega_1^2 + \omega_3^2) x''' + x^{(v)}) \cos(\omega_2 t), \\
\Gamma_8 \Rightarrow \text{Int}_8 &= \frac{1}{2} (-(x''')^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) x' x''' - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) (x'')^2 + \\
&\quad + (\omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_1^2 \omega_3^2 + \omega_2^2 \omega_3^2) (x')^2 + (\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2) x^2).
\end{aligned}$$

Заметим, что эти первые интегралы, за исключением Int_8 , нельзя получить, если калибровочную функцию g выбрать постоянной.

Если подходящим образом скомбинировать первые шесть интегралов в выражение

$$\frac{1}{2} (\text{Int}_1^2 + \text{Int}_2^2 + \text{Int}_3^2 + \text{Int}_4^2 + \text{Int}_5^2 + \text{Int}_6^2),$$

то получается автономный первый интеграл

$$\begin{aligned}
I_0 &= \frac{1}{2} [(\omega_2^2 \omega_3^2 x + (\omega_2^2 + \omega_3^2) x'' + x^{(iv)})^2 \omega_1^2 + (\omega_2^2 \omega_3^2 x' + (\omega_2^2 + \omega_3^2) x''' + x^{(v)})^2 + \\
&\quad + (\omega_1^2 \omega_2^2 x + (\omega_1^2 + \omega_2^2) x'' + x^{(iv)})^2 \omega_3^2 + (\omega_1^2 \omega_2^2 x' + (\omega_1^2 + \omega_2^2) x''' + x^{(v)})^2 + \\
&\quad + (\omega_1^2 \omega_3^2 x + (\omega_1^2 + \omega_3^2) x'' + x^{(iv)})^2 \omega_2^2 + (\omega_1^2 \omega_3^2 x' + (\omega_1^2 + \omega_3^2) x''' + x^{(v)})^2]. \quad (13)
\end{aligned}$$

Если сделать очевидные преобразования

$$\begin{aligned}
q_1 &= \omega_2^2 \omega_3^2 x + (\omega_2^2 + \omega_3^2) x'' + x^{(iv)}, \\
q_2 &= \omega_1^2 \omega_3^2 x + (\omega_1^2 + \omega_3^2) x'' + x^{(iv)}, \\
q_3 &= \omega_1^2 \omega_2^2 x + (\omega_1^2 + \omega_2^2) x'' + x^{(iv)}, \\
p_1 &= \omega_2^2 \omega_3^2 x' + (\omega_2^2 + \omega_3^2) x''' + x^{(v)}, \\
p_2 &= \omega_1^2 \omega_3^2 x' + (\omega_1^2 + \omega_3^2) x''' + x^{(v)}, \\
p_3 &= \omega_1^2 \omega_2^2 x' + (\omega_1^2 + \omega_2^2) x''' + x^{(v)},
\end{aligned}$$

то из (13) получается гамильтониан

$$H \equiv I_0 = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2 + \omega_3^2 q_3^2), \quad (14)$$

а соответствующие канонические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= p_1, & \dot{q}_2 &= p_2, & \dot{q}_3 &= p_3, \\
\dot{p}_1 &= -\omega_1^2 q_1, & \dot{p}_2 &= -\omega_2^2 q_2, & \dot{p}_3 &= -\omega_3^2 q_3.
\end{aligned} \quad (15)$$

Это правильный гамильтониан для квантования уравнения шестого порядка (4).

Применение преобразования Лежандра к гамильтониану (14) дает лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 - (\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2 + \omega_3^2 q_3^2)] \quad (16)$$

и соответствующие лагранжевы уравнения

$$\ddot{q}_1 = -\omega_1^2 q_1, \quad \ddot{q}_2 = -\omega_2^2 q_2, \quad \ddot{q}_3 = -\omega_3^2 q_3, \quad (17)$$

которые допускают десятимерную алгебру точечных лиевых симметрий²⁾, порождающую операторами

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \partial_t, & \Lambda_2 &= q_1 \partial_{q_1}, & \Lambda_3 &= \cos(\omega_1 t) \partial_{q_1}, & \Lambda_4 &= -\sin(\omega_1 t) \partial_{q_1}, \\ \Lambda_5 &= q_2 \partial_{q_2}, & \Lambda_6 &= \cos(\omega_2 t) \partial_{q_2}, & \Lambda_7 &= -\sin(\omega_2 t) \partial_{q_2}, \\ \Lambda_8 &= q_3 \partial_{q_3}, & \Lambda_9 &= \cos(\omega_3 t) \partial_{q_3}, & \Lambda_{10} &= -\sin(\omega_3 t) \partial_{q_3}.\end{aligned}$$

Заметим, что лагранжиан (16) обладает семью нётеровыми точечными симметриями и соответственно семью первыми интегралами:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &\implies I_1 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2 + \omega_3^2 q_3^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2), \\ \Lambda_3 &\implies I_3 = \sin(\omega_1 t) \omega_1 q_1 + \cos(\omega_1 t) \dot{q}_1, \\ \Lambda_4 &\implies I_4 = \cos(\omega_1 t) \omega_1 q_1 - \sin(\omega_1 t) \dot{q}_1, \\ \Lambda_6 &\implies I_6 = \sin(\omega_2 t) \omega_2 q_2 + \cos(\omega_2 t) \dot{q}_2, \\ \Lambda_7 &\implies I_7 = \cos(\omega_2 t) \omega_2 q_2 - \sin(\omega_2 t) \dot{q}_2, \\ \Lambda_9 &\implies I_9 = \sin(\omega_3 t) \omega_3 q_3 + \cos(\omega_3 t) \dot{q}_3, \\ \Lambda_{10} &\implies I_{10} = \cos(\omega_3 t) \omega_3 q_3 - \sin(\omega_3 t) \dot{q}_3.\end{aligned}\tag{18}$$

Это согласуется с нётеровыми точечными симметриями и первыми интегралами (12), допускаемыми лагранжианом (11).

Метод, который мы здесь использовали, исключает злые духи и состоит из следующих шагов.

1. Найти лиевы симметрии уравнения Лагранжа высшего порядка.
2. Найти нётеровы симметрии и соответствующие первые интегралы.
3. Построить гамильтониан из первых интегралов, комбинируя для этого их все, за исключением автономного.
4. Применить преобразование Лежандра и проверить, что получилось то же самое число нётеровых симметрий.

Можно сделать следующий вывод: настоящие изгонители духов – Ли и Нётер.

3. КВАНТОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

На протяжении более 50 лет известно, что квантование и нелинейные канонические преобразования вовсе не обязательно находятся в согласии друг с другом. Мы предлагаем процедуру, которая освобождает от ограничения, возникающего из-за конфликта между непротиворечивым квантованием и инвариантностью гамильтонова описания относительно канонических преобразований. Она основана на связи лиевых симметрий уравнения Шредингера с нётеровыми симметриями классического лагранжиана.

Альтернативный гамильтониан для простого гармонического осциллятора был получен в книге [11] (см. упражнение 18, с. 433):

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + p^2 x^4 \right).\tag{19}$$

²⁾ Система (17) допускает и 24-мерную алгебру точечных лиевых симметрий, если $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$.

Нелинейное каноническое преобразование

$$\tilde{x} = -\frac{1}{x}, \quad \tilde{p} = px^2 \quad (20)$$

приводит к гамильтониану простого гармонического осциллятора

$$H = \frac{1}{2}(\tilde{p}^2 + \tilde{x}^2). \quad (21)$$

Если рассмотреть гамильтониан (19), то ни метод нормального упорядочения, ни процедура вейлевского квантования не приводят к результату, который был бы физическим [12].

Преобразование Лежандра гамильтониана (19) приводит к лагранжиану

$$L = \frac{1}{2x^4}(\dot{x}^2 - x^2) + \frac{d}{dt}g(t, x), \quad (22)$$

где $g = g(t, x)$ – произвольная калибровочная функция. Этот лагранжиан можно также получить из последнего множителя Якоби $1/x^4$ [15].

Соответствующее лагранжево уравнение

$$\ddot{x} = 2\frac{\dot{x}^2}{x} + x \quad (23)$$

допускает восьмимерную алгебру точечных лиевых симметрий [15] с оператором Ли $V_0(t, x)\partial_t + V_1(t, x)\partial_x$. Среди этих восьми лиевых симметрий пять являются нётеровыми симметриями, т.е.

$$\begin{aligned} V_0 &= c_3 \cos 2t - c_4 \sin 2t + c_5, \\ V_1 &= x(c_4 \cos 2t + c_1 x \cos t + c_3 \sin 2t - c_2 x \sin t), \end{aligned} \quad (24)$$

и соответствующие первые интегралы имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{x^2}(x \sin t - \dot{x} \cos t), & g \neq 0, \\ I_2 &= \frac{1}{x^2}(x \cos t + \dot{x} \sin t), & g \neq 0, \\ I_3 &= \frac{1}{2x^4}(\dot{x}^2 \cos 2t - x^2 \cos 2t - 2x\dot{x} \sin 2t), & g \neq 0, \\ I_4 &= \frac{1}{2x^4}(x^2 \sin 2t - \dot{x}^2 \sin 2t - 2x\dot{x} \cos 2t), & g \neq 0, \\ I_5 &= \frac{1}{2x^4}(\dot{x}^2 + x^2). \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что I_5 есть действительно гамильтониан (19).

Чтобы получить правильное уравнение Шредингера для гамильтониана (19), потребуем выполнения общего уравнения

$$2iu_t + f_1(x)u_{xx} + f_2(x)u_x + f_3(x)u = 0, \quad (26)$$

где f_1, f_2, f_3 – произвольные функции от x , с тем чтобы допускались лиевы симметрии

$$V_0(t, x)\partial_t + V_1(t, x)\partial_x + G(t, x, u)\partial_u, \quad (27)$$

где V_0 и V_1 заданы в (24), а также обычная симметрия $u\partial_u$ и бесконечные симметрии $\alpha(t, x)\partial_u$, где α – любое решение уравнения (26).

Использование наших программ [16] дает

$$G = \frac{u}{2x^2}(-2c_3i \cos 2t - c_4x^2 \cos 2t - 2c_1x^3 \cos t + 2c_2ix \cos t - \\ - c_3x^2 \sin 2t + 2c_4i \sin 2t + 2c_1ix \sin t + 2c_2x^3 \sin t), \quad (28)$$

и уравнение (26) принимает вид уравнения Шредингера с гамильтонианом (19):

$$2iu_t + x^4u_{xx} + 4x^3u_x - \left(\frac{1}{x^2} - 2x^2\right)u = 0. \quad (29)$$

Это в точности уравнение Шредингера, определенное в работе [12] в рамках метода, предложенного в работе [17].

Предлагаемый нами метод состоит из следующих шагов.

1. Найти лиевы симметрии уравнения Лагранжа:

$$\Upsilon = W_0(t, x)\partial_t + W_1(t, x)\partial_x.$$

2. Найти нётеровы симметрии

$$\Gamma = V_0(t, x)\partial_t + V_1(t, x)\partial_x, \quad \Gamma \in \Upsilon.$$

3. Построить уравнение Шредингера, допускающее эти лиевы симметрии:

$$2iu_t + f_1(x)u_{xx} + f_2(x)u_x + f_3(x)u = 0, \\ \Omega = V_0(t, x)\partial_t + V_1(t, x)\partial_x + G(t, x, u)\partial_u.$$

Таким образом, можно сделать вывод: давайте квантовать, сохраняя нётеровы симметрии.

Список литературы

- [1] L. D. Faddeev, *Internat. J. Modern Phys. A*, **25**:6 (2010), 1079–1089.
- [2] M. C. Nucci, P. G. L. Leach, *Phys. Scr.*, **81**:5 (2010), 055003, 4 pp., arXiv: 0810.5772.
- [3] M. C. Nucci, P. G. L. Leach, *J. Math. Phys.*, **50**:11 (2009), 113508, 6 pp.
- [4] A. Pais, G. E. Uhlenbeck, *Phys. Rev.*, **79**:1 (1950), 145–165.
- [5] K. Jansenn, J. Kuti, Chuan Liu, *Phys. Lett. B*, **309**:1–2 (1993), 119–126, arXiv: hep-lat/9305003.
- [6] C. M. Bender, P. D. Mannheim, *J. Phys. A*, **41**:30 (2008), 304018, 7 pp.
- [7] П. А. М. Дирак, *Принципы квантовой механики*, Физматгиз, М., 1960.
- [8] S. W. Hawking, T. Hertog, *Phys. Rev. D*, **65**:10 (2002), 103515, arXiv: hep-th/0107088, 8 pages.
- [9] L. Van Hove, *Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. in 8°*, **26**:6 (1951), 61–102.
- [10] A. Brodlie, *J. Math. Phys.*, **45**:8 (2004), 3413–3431, arXiv: quant-ph/0401160.
- [11] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1980.
- [12] M. C. Nucci, P. G. L. Leach, *Lie groups and quantum mechanics*, arXiv: 0812.1362.
- [13] M. V. Ostrogradsky, *J. Reine Angew. Math.*, **15** (1836), 332–354.

- [14] E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge Math. Lib., **XVII**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
- [15] P. G. L. Leach, M. C. Nucci, *J. Math. Phys.*, **48**:12 (2007), 123510, 16 pp.
- [16] M. C. Nucci, “Interactive REDUCE programs for calculating Lie point, non-classical, Lie–Backlund, and approximate symmetries of differential equations: manual and floppy disk”, *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, v. 3: *New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods*, ed. N. H. Ibragimov, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996, 415–481.
- [17] M. C. Nucci, P. G. L. Leach, K. Andriopoulos, *J. Math. Anal. Appl.*, **319**:1 (2006), 357–368.