Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Палезе, Е. Уинтеррот, Вариационный взгляд на классические поля Хиггса в калибровочно-естественных теориях, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 1, 171–179

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6672>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 10:12:15

© 2011 г.

М. Палезе*, Е. Уинтеррот*

ВАРИАЦИОННЫЙ ВЗГЛЯД НА КЛАССИЧЕСКИЕ ПОЛЯ ХИГГСА В КАЛИБРОВОЧНО-ЕСТЕСТВЕННЫХ ТЕОРИЯХ

Поля Хиггса на естественно-калибровочных продолжениях главных расслоений определяются инвариантными вариационными задачами и соответствующими каноническими законами сохранения вдоль ядра калибровочно-естественного морфизма Якоби.

Ключевые слова: струи, калибровочно-естественное расслоение, сохраняющиеся величины, картанова связность, поле Хиггса.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1981 г. Ек [1] поместил естественные и калибровочные (классические) лагранжевы теории поля в рамки геометрического функториального построения, называемого калибровочно-естественным расслоением, в соответствии с которым физические поля считаются сечениями расслоений, функториально связанными с калибровочно-естественными продолжениями (также называемыми продолжениями Эресмана [2]) главных расслоений, с помощью левых действий групп Ли на многообразиях, обычно тензорные пространства. Изучение струйных продолжений главных расслоений со структурной группой $\mathbf{G}$ (группой Ли) очень важно в физике. Однако подобное продолжение, как известно, не является главным расслоением, в то время как структура главного расслоения передается так называемому калибровочно-естественному продолжению главного расслоения [2], [3]. Говоря точнее, мы рассматриваем лагранжевы теории поля, которые считаются инвариантными по отношению к действию калибровочно-естественной группы $W_n^{(r,k)}\mathbf{G}$, определяемому как полупрямое произведение дифференциальной группы k -го порядка базисного многообразия на группу порядка r n -х скоростей в $\mathbf{G}$; здесь $n = \dim \mathbf{X}$ – размерность базисного многообразия. Так как группа $\text{Diff}(\mathbf{X})$ не является канонически вложенной в группу $\text{Aut}(\mathbf{P})$ всех автоморфизмов подлежащего главного расслоения $\mathbf{P}$, априори не существует естественного способа связать инфинитезимальные

*Department of Mathematics, University of Torino, Torino, Italy.
E-mail: marcella.palese@unito.it, ekkehart.winterroth@unito.it

калибровочные преобразования с инфинитезимальными базисными преобразованиями, так что производные Ли калибровочного поля по отношению к инфинитезимальным базисным преобразованиям не могли бы определяться ни естественным, ни каноническим образом (по меньшей мере, априори).

Проблема существования ковариантных канонически определенных сохраняющихся токов связана с такими же свойствами производной Ли [4]. Хорошо известно, что ковариантность лагранжиана и уравнений Эйлера–Лагранжа не гарантирует соответствующую ковариантность нётеровских сохраняющихся величин. Вообще говоря, фиксирование линейной связности на базисном многообразии и главной связности на главном расслоении является необходимым для получения ковариантных сохраняющихся величин в калибровочно-естественных теориях поля (глобальная форма Пуанкаре–Картана может быть определена только с помощью фиксирования такой пары связностей; см., например, [5]). Однако мы обнаружили, что каноническое определение нётеровских сохраняющихся величин без фиксации какой-либо связности априори возможно не всегда на расслоении, получаемом из $W^{(r,k)}\mathbf{P}$ редукцией и задаваемом исходной $W_n^{(r,k)}\mathbf{G}$ -инвариантной вариационной задачей. Связности могут характеризоваться с помощью такой канонической редукции [6]–[8]. Это происходит благодаря тому, что расслоения полей, связанные с классом главных расслоений, полученных как калибровочно-естественные продолжения главных расслоений, имеют более богатую структуру, чем расслоения, связанные с произвольными главными расслоениями.

Вариационная задача о струях расслоенных многообразий является инвариантной по отношению к контактной структуре конечного порядка, индуцированной струями: мы рассмотрим вариационные задачи с лагранжианом конечного порядка в терминах внешних дифференциалов форм по модулю контактной формы, сформулированной в контексте вариационных последовательностей конечного порядка [9]; более того, в категории вариационных последовательностей на калибровочно-естественных расслоениях производная Ли сечений расслоений (с точностью до знака) является вертикальной частью по отношению к контактной структуре (а не вертикальной компонентой по отношению к проекции на базисном многообразии) калибровочно-естественных подъемов инфинитезимальных главных автоморфизмов [10]. В предыдущей статье [11] в рамках вариационных последовательностей конечного порядка мы характеризовали вторую вариацию калибровочно-естественного инвариантного лагранжиана произвольного порядка и использовали эту характеристику для того, чтобы перенести на частный случай теоремы Нётер и соответствующие сохраняющиеся токи, а также *обобщенные канонически определенные тождества Бергманна–Бианки* для существования суперпотенциалов [12]. Мы решили проблему канонической ковариантности сохраняющихся величин с помощью вариационных производных, взятых по отношению к обобщенным векторным полям, которые выбирались как производные Ли сечений калибровочно-естественных расслоений, взятых по отношению к калибровочно-естественным подъемам инфинитезимальных главных автоморфизмов.

Законы сохранения, связанные с группой преобразований, полученных подстановкой параметров с произвольными функциями (*бесконечные непрерывные группы*) были изучены Нётер [13] в 1918 г., которая установила существование определенных тождественных соотношений между выражениями Эйлера–Лагранжа и их произ-

водными как следствие инвариантности лагранжиана по отношению к такой более широкой группе преобразований (тождества Нётер). В 1956 г. Утияма [14] рассмотрел некоторые системы полей, инвариантных по отношению к определенной группе преобразований, зависящих от n параметров, и, постулируя инвариантность таких систем по отношению к более широкой группе, полученной заменой параметров на набор произвольных функций, он ввел новое поле с определенным типом взаимодействия с исходными полями, определенными с помощью *ковариантной производной*.

С такой точки зрения мы рассматриваем класс параметризованных контактных преобразований, определяемых с помощью калибровочно-естественного функтора: обращаясь к инвариантным свойствам, мы определяем ковариантные производные полей и новые законы сохранения с помощью построения главной связности, удовлетворяющей определенному дополнительному условию. В частности, мы характеризуем канонические ковариантные сохраняющиеся величины лагранжиана в классической теории поля в терминах полей Хиггса на таких калибровочных главных расслоениях, обладающих более богатой структурой калибровочно-естественного продолжения. С этой точки зрения топологические условия существования картановой связности на главном расслоении $W^{(r,k)}\mathbf{P}$ оказываются необходимым условием существования глобальных решений уравнений Якоби, связанных с существованием канонически определенных глобальных сохраняющихся величин. В результате производная Ли полей является ограниченной и параметризуется с помощью поля Хиггса h , определенного пространством полей Якоби.

2. ПОЛЯ ЯКОБИ, ПОРОЖДАЮЩИЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Напомним некоторые полезные понятия продолжений (подробнее см., например, [3], [15]). Пусть $J_s\mathbf{Y}$ – s -струйное продолжение (локальных) сечений расслоенного многообразия $\pi: \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ с $\dim \mathbf{X} = n$ и $\dim \mathbf{Y} = n + m$. Естественные слоения π_{s-1}^s являются *аффинными* слоениями, индуцирующими естественное расщепление (см., например, [9], [16])

$$J_s\mathbf{Y} \times_{J_{s-1}\mathbf{Y}} T^*J_{s-1}\mathbf{Y} = J_s\mathbf{Y} \times_{J_{s-1}\mathbf{Y}} (T^*\mathbf{X} \oplus V^*J_{s-1}\mathbf{Y}),$$

которое дает разложения возрастающего порядка: задано векторное поле $\Xi: J_s\mathbf{Y} \rightarrow TJ_s\mathbf{Y}$, $T\pi_{s-1}^{s+1} \circ \Xi = \Xi_H + \Xi_V$, где Ξ_H и Ξ_V – соответственно *горизонтальная* и *вертикальная части поля* Ξ ; для внешнего дифференциала на $\mathbf{Y}$ мы имеем $(\pi_r^{r+1})^* \circ d = d_H + d_V$, где d_H и d_V называются *горизонтальным* и *вертикальным дифференциалами* соответственно; *расщепление пучка* записывается как $\mathcal{H}_{(s+1,s)}^p = \bigoplus_{t=0}^p \mathcal{C}_{(s+1,s)}^{p-t} \wedge \mathcal{H}_{s+1}^t$, где $\mathcal{H}_{(s,q)}^p$ и $\mathcal{H}_s^p$ – пучки *горизонтальных форм* по отношению к проекциям π_q^s и π_0^s соответственно, в то время как $\mathcal{C}_{(s,q)}^p \subset \mathcal{H}_{(s,q)}^p$ и $\mathcal{C}_s^p \subset \mathcal{C}_{(s+1,s)}^p$ являются *контактными формами*, т. е. горизонтальными формами со значениями в $\mathcal{C}_s^*[Y]$. Положим $\mathcal{H}_{s+1}^{p,h} \doteq h(\Lambda_s^p)$ при $0 < p \leq n$, где проекция на слагаемое меньшей контактной степени h является *горизонтализацией*.

Обозначим через $d \ker h$ пучок, порожденный предпучком $d \ker h$ стандартным образом. Положим $\Theta_s^* \doteq \ker h + d \ker h$. Мы имеем *вариационную последовательность* $0 \rightarrow \mathbb{R}_Y \rightarrow \mathcal{V}_s^*$, где $\mathcal{V}_s^* = \Lambda_s^*/\Theta_s^*$, что является точным расщеплением постоянно-го пучка $\mathbb{R}_Y$ [9]. Сечение $E_{d\lambda} \doteq \mathcal{E}_n(\lambda) \in \mathcal{V}_s^{n+1}$ является *обобщенным морфизмом старшего порядка типа Эйлера–Лагранжа*, связанного с λ .

Пусть $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{X}$ – главное расслоение со структурной группой $\mathbf{G}$. Для целочисленных $r \leq k$ рассмотрим *калибровочно-естественное продолжение расслоения* $\mathbf{P}$, задаваемое как $\mathbf{W}^{(r,k)}\mathbf{P} \doteq J_r\mathbf{P} \times_{\mathbf{X}} L_k(\mathbf{X})$, где $L_k(\mathbf{X})$ – расслоение k -реперов в $\mathbf{X}$ [1], [3]; $\mathbf{W}^{(r,k)}\mathbf{P}$ – главное расслоение над $\mathbf{X}$ со структурной группой $\mathbf{W}_n^{(r,k)}\mathbf{G}$, которая является полупрямым произведением по отношению к действию $GL_k(n)$ на $\mathbf{G}_n^r$, задаваемому композицией струй, а $GL_k(n)$ – группа k -реперов в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathbf{G}_n^r$ пространство (r, n) -скоростей на $\mathbf{G}$. Пусть $\mathbf{F}$ – многообразие, а $\zeta: \mathbf{W}_n^{(r,k)}\mathbf{G} \times \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ – левое действие $\mathbf{W}_n^{(r,k)}\mathbf{G}$ на $\mathbf{F}$. Имеется естественное правое действие $\mathbf{W}_n^{(r,k)}\mathbf{G}$ на $\mathbf{W}^{(r,k)}\mathbf{P} \times \mathbf{F}$, так что мы имеем стандартным образом ассоциированное *калибровочно-естественное расслоение* порядка (r, k) : $\mathbf{Y}_\zeta \doteq \mathbf{W}^{(r,k)}\mathbf{P} \times_\zeta \mathbf{F}$. Во всех наших рассуждениях $\mathbf{Y}$ будет калибровочно-естественным расслоением, определенным выше.

Теперь обозначим через $\mathcal{A}^{(r,k)}$ пучок правоинвариантных векторных полей на $\mathbf{W}^{(r,k)}\mathbf{P}$. *Калибровочно-естественный подъем* определяется как функториальное отображение $\mathfrak{G}: \mathbf{Y}_\zeta \times_{\mathbf{X}} \mathcal{A}^{(r,k)} \rightarrow T\mathbf{Y}_\zeta: (\mathbf{y}, \Xi) \mapsto \hat{\Xi}(\mathbf{y})$, где для любого $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_\zeta$ мы полагаем $\hat{\Xi}(\mathbf{y}) = \frac{d}{dt}[(\Phi_{\zeta t})(\mathbf{y})]_{t=0}$, а $\Phi_{\zeta t}$ обозначает (локальный) поток, соответствующий калибровочно-естественному подъему автоморфизма Φ_t . Такой функтор определяет класс параметризованных контактных преобразований. Это отображение удовлетворяет следующим свойствам (см. [3]): $\mathfrak{G}$ линейно над $id_{\mathbf{Y}_\zeta}$; мы имеем $T\pi_\zeta \circ \mathfrak{G} = id_{T\mathbf{X}} \circ \bar{\pi}^{(r,k)}$, где $\bar{\pi}^{(r,k)}$ – естественная проекция $\mathbf{Y}_\zeta \times_{\mathbf{X}} \mathcal{A}^{(r,k)} \rightarrow T\mathbf{X}$; для любой пары $(\bar{\Lambda}, \bar{\Xi}) \in \mathcal{A}^{(r,k)}$, $\mathfrak{G}$ – гомоморфизм алгебр Ли.

Производная Ли является фундаментальным геометрическим объектом, дающим информацию о поведении решений уравнений Эйлера–Лагранжа при инфинитезимальных преобразованиях (автоморфизмах) калибровочно-естественного расслоения. Пусть γ – (локальное) сечение расслоения $\mathbf{Y}_\zeta$, $\bar{\Xi} \in \mathcal{A}^{(r,k)}$, а $\hat{\Xi}$ – его калибровочно-естественный подъем. Следуя работе [3], определим *обобщенную производную Ли* сечения γ вдоль векторного поля $\hat{\Xi}$ таким образом, что она является (локальным) сечением $\mathcal{L}_{\bar{\Xi}}\gamma: \mathbf{X} \rightarrow V\mathbf{Y}_\zeta$, задаваемым выражением $\mathcal{L}_{\bar{\Xi}}\gamma = T\gamma \circ \xi - \hat{\Xi} \circ \gamma$. Благодаря функториальной природе $\hat{\Xi}$ производная Ли сечений наследует некоторые полезные свойства линейности, в частности она является гомоморфизмом алгебр Ли. Ввиду теорем Нётер, интерес к производным Ли сечений вызван тем, что в случае калибровочно-естественного подъема мы имеем $\hat{\Xi}_V = -\mathcal{L}_{\bar{\Xi}}$. Далее мы рассмотрим вариационные последовательности на калибровочно-естественном расслоении $\mathbf{Y}$.

Пусть $\eta \in \mathcal{C}_{(s,0)}^1 \wedge \mathcal{H}_{s+1}^{n,h}$, а Ξ – вертикальное векторное поле; морфизм $E_{j_s \Xi} \eta = (\pi_{s+1}^{2s+1})^* j_s \Xi \eta + F_{j_s \Xi} \eta$ (где $F_{j_s \Xi} \eta$ – локальная дивергенция) является однозначно определенным глобальным сечением расслоения $\mathcal{C}_{(2s,0)}^1 \wedge \mathcal{H}_{2s+1}^{n,h}$ (см. [16]). Пусть λ – лагранжиан, $\hat{\Xi}_V$ – обобщенное вариационное векторное поле, и $\eta = hd\mathcal{L}_{j_{2s} \Xi_V} \lambda$. Положим $\chi(\lambda, \hat{\Xi}_V) \doteq E_{j_s \hat{\Xi}_V} \eta$. Применяя свойства функториальной линейности поля $\hat{\Xi}$, определим *линейный морфизм, калибровочно-естественный обобщенный морфизм Якоби*, связанный с лагранжианом λ и вариационным векторным полем $\hat{\Xi}_V$, $\mathcal{J}(\lambda, \hat{\Xi}_V) \doteq E_{j_s \chi(\lambda, \hat{\Xi}_V)}$ [10]. Оказывается, что $\mathcal{J}(\lambda, \hat{\Xi}_V)$, вторая вариационная производная $\mathcal{L}_{j_s \Xi_V} \mathcal{L}_{j_s \Xi_V} \lambda$ и гессиянов морфизм $\mathfrak{H}(\lambda, \hat{\Xi}_V) \doteq \hat{\Xi}_V \rfloor \mathcal{E}_n(\hat{\Xi}_V \rfloor \mathcal{E}_n(\lambda))$ являются представителями одного и того же класса эквивалентности в соответствующей вариационной последовательности [11], таким образом характеризуя $\mathcal{J}(\lambda, \hat{\Xi}_V)$

как симметричный самосопряженный морфизм. Актуальность этого свойства связана с важными геометрическими аспектами пространства $\mathfrak{K} \doteq \ker \mathcal{J}(\lambda, \widehat{\Xi}_V)$, определяющего обобщенные калибровочно-естественные уравнения Якоби, решения которых мы называем *обобщенными векторными полями Якоби*; они характеризуют *канонические* ковариантные сохраняющиеся величины [4].

Хорошо известно, что первую теорему Нётер можно записать в новой форме, если использовать *вариационную производную Ли* классов форм, представленных в вариационной последовательности: $\mathcal{L}_{j_s \Xi} \lambda = \vartheta(\lambda, \mathcal{L}_{\Xi}) + d_H \epsilon(\lambda, \mathcal{L}_{\Xi})$, где мы полагаем $\vartheta(\lambda, \mathcal{L}_{\Xi}) \doteq -\mathcal{L}_{\Xi} \mathcal{E}_n(\lambda)$, а $\epsilon(\lambda, \mathcal{L}_{\Xi})$ – нётеровский ток. Как обычно, λ определяется как *калибровочно-естественный инвариантный лагранжиан*, если калибровочно-естественный подъем $(\widehat{\Xi}, \xi)$ любого векторного поля $\Xi \in \mathcal{A}^{(r,k)}$ является симметрией для λ т.е. если $\mathcal{L}_{j_s \Xi} \lambda = 0$. Замечательно то, что в общем случае $\mathcal{L}_{j_s \Xi_V} \lambda \neq 0$.

Как уже отмечалось, существование канонического глобального суперпотенциала для $\epsilon(\lambda, \mathcal{L}_{\Xi})$ зависит от ковариантных тождеств Бергманна–Бианки, которые, как можно доказать, существуют канонически только вдоль $\ker \mathcal{J}(\lambda, \widehat{\Xi}_V)$ [10]. Благодаря тому, что они являются тождествами Нётер, ассоциированными со свойствами инвариантности морфизма Эйлера–Лагранжа $\mathcal{E}_n(\vartheta)$, ядро $\mathfrak{K}$, будучи ядром гамильтонова оператора, может быть охарактеризовано как векторное подрасслоение [11], [17]. Для теории производной Ли калибровочно-естественных полей существенно то, что неопределенность сохраняющихся зарядов, свойственная им и связанная с калибровочно-естественными симметриями лагранжевых теорий поля, разрешена таким образом.

3. ХИГГСОВЫ ПОЛЯ НА КАЛИБРОВОЧНО-ЕСТЕСТВЕННОМ РАССЛОЕНИИ

Обозначим через $\mathfrak{k}$ алгебру Ли обобщенных векторных полей Якоби. Пусть $\mathfrak{h}$ – алгебра Ли правоинвариантных вертикальных векторных полей на $W^{(r+4s, k+4s)} \mathbf{P}$. Теперь предположим, что существуют глобальные решения обобщенных калибровочно-естественных уравнений Якоби. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{k}$ характеризуется как подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{h}$, морфизм Якоби является самосопряженным, а $\mathfrak{k}$ имеет постоянный ранг. Расщепленная структура $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus \text{Im } \mathcal{J}$ является корректно определенной и также редуктивной, $[\mathfrak{k}, \text{Im } \mathcal{J}] = \text{Im } \mathcal{J}$ [18]. В частности, для каждого $\mathbf{p} \in W^{(r,k)} \mathbf{P}$ с помощью обозначений $\mathcal{W} \equiv \mathfrak{h}_{\mathbf{p}}$, $\mathcal{K} \equiv \mathfrak{k}_{\mathbf{p}}$ и $\mathcal{V} \equiv \text{Im } \mathcal{J}_{\mathbf{p}}$ мы имеем разложение редуктивной алгебры Ли $\mathcal{W} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{V}$, причем $[\mathcal{K}, \mathcal{V}] = \mathcal{V}$. Заметим, что $\mathcal{W}$ является алгеброй Ли группы Ли $W_n^{(r,k)} \mathbf{G}$.

Поскольку $\mathcal{K}$ является редуктивной алгеброй Ли алгебры Ли $\mathcal{W}$, существует изоморфизм между $\mathcal{V} \equiv \text{Im } \mathcal{J}_{\mathbf{p}}$ и $T\mathbf{X}$, так что $\mathcal{V}$ оказывается образом горизонтального подпространства. Таким образом, мы характеризуем главное расслоение $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{X}$, причем $\dim \mathbf{Q} = \dim \mathcal{W}$ так, что $\mathbf{X} = \mathbf{Q}/\mathbf{K}$. Главное подрасслоение $\mathbf{Q} \subset \mathbf{W}^{(r,k)} \mathbf{P}$ такое, что $\mathcal{K} = T_{\mathbf{q}} \mathbf{Q}/\mathbf{K}$, где $\mathbf{K}$ – (редуцированная) группа Ли алгебры Ли $\mathcal{K}$, поэтому является редуцированным главным расслоением.

Далее мы опустим порядки калибровочно-естественного продолжения для упрощения обозначений. Группа Ли $\mathbf{K}$ алгебры Ли $\mathcal{K}$ является, в частности, замкнутой подгруппой в $W\mathbf{G}$ ($\mathfrak{k}$ – векторное подрасслоение). Мы имеем составное расслоение

$$W\mathbf{P} \rightarrow W\mathbf{P}/\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{X},$$

где $W\mathbf{P} \rightarrow W\mathbf{P}/\mathbf{K}$ – главное расслоение со структурной группой $\mathbf{K}$, а $W\mathbf{P}/\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{X}$ – расслоение, связанное с $W\mathbf{P}$, с типичным слоем $W\mathbf{G}/\mathbf{K}$, на который структурная группа $W\mathbf{G}$ действует слева. Таким образом,

$$W\mathbf{P}/\mathbf{K} = W\mathbf{P} \times_{W\mathbf{G}} W\mathbf{G}/\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{X}$$

является калибровочно-естественным расслоением, функториально ассоциированным с $W\mathbf{P} \times W\mathbf{G}/\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{X}$ с помощью правого действия $W\mathbf{G}$. Левое действие со стороны $W\mathbf{G}$ на $W\mathbf{G}/\mathbf{K}$ согласуется с разложением редуктивной алгебры Ли $\mathcal{W} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{V}$, причем $[\mathcal{K}, \mathcal{V}] \subset \mathcal{V}$. На самом деле векторное пространство $\mathcal{V} = \text{Im } \mathcal{J}_{\mathbf{p}} = \mathcal{W}/\mathcal{K}$ содержит в себе левое действие $\mathcal{W}$, задаваемое с помощью сопряженного представления (так как $[\mathcal{K}, \mathcal{V}] \subset \mathcal{V}$, мы также имеем $[\mathcal{W}, \mathcal{V}] = [\mathcal{K} \oplus \mathcal{V}, \mathcal{V}] = [\mathcal{K}, \mathcal{V}] \oplus [\mathcal{V}, \mathcal{V}] \subset \mathcal{V}$).

Назовем глобальное сечение $h: \mathbf{X} \rightarrow W\mathbf{P}/\mathbf{K}$ *калибровочно-естественным полем Хиггса* [19]. Заметим, что это векторное поле, лежащее в образе морфизма Якоби (напомним, что $\mathcal{W}/\mathcal{K} = \mathcal{V} = \text{Im } \mathcal{J}_{\mathbf{p}}$), который, в свою очередь, является образом горизонтального подпространства $T\mathbf{X}$. Прообраз расслоения

$$\mathbf{Q} \doteq W\mathbf{P} \times_{W\mathbf{P}/\mathbf{K}} h(\mathbf{X}) \subset W\mathbf{P}/\mathbf{K} = W\mathbf{P} \times_{W\mathbf{G}} (h(\mathbf{X}) \subset W\mathbf{P} \times_{W\mathbf{G}} W\mathbf{G}/\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{X}$$

является редуцированным главным подрасслоением в $\mathbf{P}$. Заметим, что калибровочно-естественное поле Хиггса является глобальным сечением расслоения $\hat{H}_p$, причем $\mathbf{p} \in \mathbf{Q}$.

Пусть ω – главная связность на $\mathbf{W}^{(r,k)}\mathbf{P}$, а $\bar{\omega}$ – главная связность на главном расслоении $\mathbf{Q}$, т. е. $\mathcal{K}$ -инвариантное горизонтальное распределение, определяющее вертикальный параллелизм $\bar{\omega}: V\mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{K}$ стандартным образом. Оно определяет расщепление $T_{\mathbf{p}}\mathbf{Q} \simeq_{\bar{\omega}} \mathcal{K} \oplus \hat{H}_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} \in \mathbf{Q}$. Так как $\mathcal{K}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathcal{W}$ и $\dim \mathbf{Q} = \dim \mathcal{W}$, определена главная картанова связность типа $\mathcal{W}/\mathcal{K}$, т. е. $\mathcal{W}$ -значный абсолютный параллелизм $\hat{\omega}: T\mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{W}$, который является гомоморфизмом алгебр Ли при ограничении величиной $\mathcal{K}$. Скобки Ли сохраняются, если один из аргументов находится в $\mathcal{K}$ и $\hat{\omega}$ является продолжением естественного вертикального параллелизма, т. е. $\hat{\omega}|_{V\mathbf{Q}} = \bar{\omega}$. В работе [7] мы определили $\hat{\omega}$ как ограниченный величиной $T\mathbf{Q}$ естественный вертикальный параллелизм, определяемый главной связностью ω на $\mathbf{W}^{(r,k)}\mathbf{P}$ с помощью фундаментального векторного отображения $\omega: V\mathbf{W}^{(r,k)}\mathbf{P} \rightarrow \mathcal{W}$. Он удовлетворяет соотношению $H_{\mathbf{p}} \cap T_{\mathbf{p}}\mathbf{Q} = \emptyset$, при этом $\mathbf{p} \in \mathbf{Q}$, и является связностью на $\mathbf{W}^{(r,k)}\mathbf{P} = \mathbf{Q} \times_{\mathbf{K}} \mathbf{W}_n^{(r,k)}\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{X}$, т. е. картановой связностью на $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{X}$ с значениями в $\mathcal{W}$. Заметим, что она расщепляется на $\mathcal{K}$ -компоненту, которая является формой главной связности на $\mathcal{K}$ -многообразии $\mathbf{Q}$, и на $\mathcal{V}$ -компоненту, которая является формой смещения. Действительно, так как $\mathbf{K}$ является редуктивной подгруппой Ли в $\mathbf{W}_n^{(r,k)}\mathbf{G}$, главную картанову связность можно рассматривать как $\mathbf{K}$ -структуру, снабженную главной формой связности $\eta = pr_{\mathcal{K}} \circ \hat{\omega}$ на $\mathbf{Q}$ [20].

Калибровочно-естественное поле Хиггса, будучи глобальным сечением расслоения $\hat{H}_p$, $\mathbf{p} \in \mathbf{Q}$, связано с формой смещения, определяемой с помощью $\mathcal{V}$ -компоненты картановой связности $\hat{\omega}$. Главное расслоение $W\mathbf{P}$ ($\mathcal{W}$ – алгебра Ли структурной группы) допускает главное подрасслоение $\mathbf{Q}$ (с алгеброй Ли $\mathcal{K}$ структурной группы); более того, задана прямая сумма $\mathcal{W} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ является таким подпространством, что $\text{ad}(g)(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$, $g \in \mathbf{K}$. Тогда полученный с помощью h обратный образ

$\mathcal{K}$ -значной компоненты $\mathcal{W}$ -значной главной связности ω на $W\mathbf{P}$ на редуцированном подрасслоении $\mathbf{Q}$ является формой связности главной связности на $\mathbf{Q}$ [21].

Если задано составное расслоение

$$W\mathbf{P} \rightarrow W\mathbf{P}/\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{X},$$

то мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow V_{W\mathbf{P}/\mathbf{K}}W\mathbf{P} \rightarrow VW\mathbf{P} \rightarrow W\mathbf{P} \times_{W\mathbf{P}/\mathbf{K}} VW\mathbf{P}/\mathbf{K} \rightarrow 0,$$

где $V_{W\mathbf{P}/\mathbf{K}}W\mathbf{P}$ – вертикальное касательное расслоение к расслоению $W\mathbf{P} \rightarrow W\mathbf{P}/\mathbf{K}$. Каждая связность на последнем расслоении определяет расщепление

$$VW\mathbf{P} = V_{W\mathbf{P}/\mathbf{K}}W\mathbf{P} \bigoplus_{W\mathbf{P}/\mathbf{K}} \hat{\omega}(W\mathbf{P} \times_{W\mathbf{P}/\mathbf{K}} VW\mathbf{P}/\mathbf{K}),$$

с помощью которого мы можем определить вертикальный ковариантный дифференциал $\mathcal{D}: J^1W\mathbf{P} \rightarrow T^*\mathbf{X} \otimes_{W\mathbf{P}} V_{W\mathbf{P}/\mathbf{K}}W\mathbf{P}$, который связан с ковариантным дифференциалом на $W\mathbf{P}_h$ относительно связности обратного образа $h^*(\tilde{\omega})$.

Поля Хиггса и производная Ли классических полей. В качестве примера рассмотрим случай производной Ли спинорных полей (этот пример изучался с новой точки зрения в работах [8], [17], а затем в работе [6], в контексте канонических связностей).

На четырехмерном многообразии, допускающем лоренцевы структуры ($SO(1, 3)^e$ -редукции) $\mathbf{X}$, рассмотрим $SPIN(1, 3)^e$ -главное расслоение $\pi: \Sigma \rightarrow \mathbf{X}$ и отображение расслоений, индуцирующее спин-репер на Σ , задаваемый с помощью $\hat{\Lambda}: \Sigma \rightarrow L(\mathbf{X})$, определяющие метрику g с помощью редуцированного подрасслоения $SO(\mathbf{X}, g) = \hat{\Lambda}(\Sigma)$ расслоения $L(\mathbf{X})$. Левое действие ρ группы $W^{(0,1)}SPIN(1, 3)^e$ на многообразии $GL(4, \mathbb{R})$ задается так, что ассоциированное расслоение $\Sigma_\rho \doteq W^{(0,1)}\Sigma \times_\rho GL(4, \mathbb{R})$ является калибровочно-естественным расслоением порядка $(0, 1)$ – *расслоением спин-тетрад* θ [22]. Индуцированная метрика записывается как $g_{\mu\nu} = \theta_\mu^a \theta_\nu^b \eta_{ab}$, где θ_μ^a – локальные компоненты спин-тетрады θ , а η_{ab} – метрика Минковского. Пусть $\mathfrak{so}(1, 3) \simeq \mathfrak{spin}(1, 3)$ – алгебра Ли группы $SO(1, 3)$. Можно рассмотреть левое действие $W^{(1,1)}SPIN(1, 3)^e$ на векторном пространстве $(\mathbb{R}^4)^* \otimes \mathfrak{so}(1, 3)$. Ассоциированное расслоение $\Sigma_l \doteq W^{(1,1)}\Sigma \times_l ((\mathbb{R}^4)^* \otimes \mathfrak{so}(1, 3))$ является калибровочно-естественным расслоением порядка $(1, 1)$ – *расслоением спиновых связностей* ω . Если $\hat{\gamma}$ является линейным представлением $SPIN(1, 3)^e$ на векторном пространстве $\mathbb{C}^4$, индуцированным выбором матриц γ , то мы получаем калибровочно-естественное расслоение порядка $(0, 0)$ $\Sigma_{\hat{\gamma}} \doteq \Sigma \times_{\hat{\gamma}} \mathbb{C}^4$ – *расслоение спиноров*. Спинорная связность $\tilde{\omega}$ определяется стандартным образом через спиновую связность.

Далее, лагранжиан Эйнштейна–Картана является морфизмом, сохраняющим базис $\lambda_{\text{EC}}: \Sigma_\rho \times_{\mathbf{X}} J_1 \Sigma_l \rightarrow \Lambda^4 T^*\mathbf{X}$, в то время как лагранжиан Дирака является морфизмом, сохраняющим базис $\lambda_{\text{D}}: \Sigma_\rho \times_{\mathbf{X}} \Sigma_l \times_{\mathbf{X}} J_1 \Sigma_{\hat{\gamma}} \rightarrow \Lambda^4 T^*\mathbf{X}$ (локальные выражения можно найти, например, в работе [5]). Мы полагаем, что полный лагранжиан гравитационного поля, взаимодействующего со спинорной материей, описывается выражением $\lambda = \lambda_{\text{EC}} + \lambda_{\text{D}}$.

Пусть теперь $\bar{\Xi} - SPIN(1, 3)^e$ -инвариантное векторное поле на Σ . Лагранжиан λ инвариантен по отношению к любому подъему $\hat{\Xi}$ поля $\bar{\Xi}$ на полное пространство теории. Согласно первой теореме Нётер можно найти сохраняющийся нётеровский ток $\epsilon(\lambda, \bar{\Xi})$ такой, что соответствующим суперпотенциалом будет $\nu(\lambda, \bar{\Xi}) \doteq -\frac{1}{2k} \bar{\Xi}_v^{ab} \epsilon_{ab}$, где $\bar{\Xi}_{vb}^a = \bar{\Xi}_b^a - \omega_{b\mu}^a \xi^\mu$ – вертикальная часть поля $\bar{\Xi}$ по отношению к спиновой связности ω .

Мы упоминали, что без априорной фиксации связности существование канонических глобальных сохраняющихся величин в теории поля связано с тождествами Нётер: в работе [8] мы обнаружили, что это означает, что $\bar{\Xi}_v^{ab} = -\tilde{\nabla}^{[a} \xi^{b]}$ (так называемый подъем Косманн [23]), где $\tilde{\nabla}$ – ковариантная производная по отношению к стандартной транспонированной связности на Σ_ρ . Подъем Косманн может быть охарактеризован с вариационной точки зрения: он является единственным калибровочно-естественным подъемом, который гарантирует, что условие естественности (тождества Нётер) $\mathcal{L}_{j_{s+1}\hat{\Xi}_H}[\mathcal{L}_{j_{s+1}\hat{\Xi}_V}\lambda] \equiv 0$ выполняется. Вдоль такого подъема инвариантным является не только исходный лагранжиан λ , но также и его первая вариационная производная $\vartheta(\lambda, \mathfrak{K})$. С другой стороны, производная Ли спинорных полей может быть записана с помощью канонической спинорной связности $\hat{\omega}$ следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\bar{\Xi}}\psi = \xi^\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{4} \hat{\Xi}_{hab} \gamma^a \gamma^b \psi - \frac{1}{4} \nabla_{[a} \xi_{b]} \gamma^a \gamma^b \psi,$$

где $\hat{\Xi}_h$ – горизонтальная часть поля $\hat{\Xi}$ по отношению к спинорной связности [6].

Ясно, что мы здесь рассматриваем редукцию полного главного расслоения, которое является основным структурным расслоением теории. Каждое глобальное сечение h расслоения $WP/\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{X}$ (напомним, что $\mathbf{K}$ следует из калибровочно-естественных уравнений Якоби) позволяет определить вертикальный ковариантный дифференциал, который связан с вертикальным дифференциалом, определяемым главной связностью на полном калибровочно-естественном продолжении WP , т. е. также и со спиновой и спинорной связностями, функториально индуцированными на ассоциированном расслоении, как было только что показано. В результате мы получили, что производная Ли полей является ограниченной и параметризуется полем Хиггса h , определяемым с помощью $\mathfrak{K}$. В частности, подъем Космана до полного расслоения тетрадь и спиноров связан с вариационным полем Хиггса на калибровочно-естественном расслоении.

Благодарности. Исследование было выполнено при финансовой поддержке Туринского университета и MIUR и при частичной финансовой поддержке (М. Палезе) университета Брно (Чехия).

Список литературы

- [1] D. J. Eck, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **33**:247 (1981), 1–48.
- [2] C. Ehresmann, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **240** (1955), 1755–1757.
- [3] I. Kolář, P. W. Michor, J. Slovák, *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer, New York, 1993.
- [4] M. Palese, E. Winterroth, *Rep. Math. Phys.*, **54**:3 (2004), 349–364, arXiv: math-ph/0406009.

- [5] L. Fatibene, M. Francaviglia, *Natural and Gauge Natural Formalism for Classical Field Theories. A Geometric Perspective Including Spinors and Gauge Theories*, Kluwer, Dordrecht, 2003.
- [6] M. Ferraris, M. Francaviglia, M. Palese, E. Winterroth, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **5:6** (2008), 973–988.
- [7] M. Ferraris, M. Francaviglia, M. Palese, E. Winterroth, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **8:1** (2011), 177–185.
- [8] E. H. K. Winterroth, *Variational derivatives of gauge-natural invariant Lagrangians and conservation laws*, PhD thesis, University of Torino, 2007.
- [9] D. Krupka, “Variational sequences on finite order jet spaces”, *Differential Geometry and Its Applications* (Brno, Czechoslovakia, 27 Aug. – 2 Sept. 1989), eds. J. Janyška et al., World Sci., Singapore, 1990, 236–254.
- [10] M. Palese, E. Winterroth, *Arch. Math.*, **41:3** (2005), 289–310.
- [11] М. Палезе, Е. Уинтеррот, *ТМФ*, **152:2** (2007), 377–389.
- [12] P. G. Bergmann, *Phys. Rev.*, **75:4** (1949), 680–685.
- [13] E. Noether, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, **2** (1918), 235–257.
- [14] R. Utiyama, *Phys. Rev.*, **101:5** (1956), 1597–1607.
- [15] D. J. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [16] R. Vitolo, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **125:2** (1999), 321–333.
- [17] M. Palese, E. Winterroth, “Noether identities in Einstein–Dirac theory and the Lie derivative of spinor fields”, *Proc. of the 10th International Conference on Differential Geometry and its Applications, DGA 2007* (Olomouc, Czech Republic, August 27–31, 2007), World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008, 643–653.
- [18] M. Palese, E. Winterroth, *Rep. Math. Phys.*, **62:2** (2008), 229–239, arXiv:0712.0925.
- [19] G. Sardanashvily, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **3:1** (2006), 139–148.
- [20] L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, *Connections in Classical and Quantum Field Theory*, World Sci. Publ., Singapore, 2000.
- [21] M. Palese, E. Winterroth, “Invariant variational problems and Cartan connections on gauge-natural bundles”, *AIP Conf. Proc.*, **1191**, eds. P. Kielanowski, Springer, Berlin, 2009, 160–165.
- [22] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, New York, 1972.
- [23] Y. Kosmann, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **262** (1966), A289–A292; A394–A397.