Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ренна, Ф. Паладини, Синусоидальные и гауссовы ударные возмущения диссипативного осцилляторного отображения, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 1, 180–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6673>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 11:12:21

© 2011 г.

Л. Ренна^{*†}, Ф. Паладини^{*}

СИНУСОИДАЛЬНЫЕ И ГАУССОВЫ УДАРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ДИССИПАТИВНОГО ОСЦИЛЛЯТОРНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Предлагается двумерное отображение, которое в пределе нулевой диссипации совпадает с отображением Пуанкаре для ударно-возмущенного осциллятора. Изучены основные свойства отображения под влиянием нечетных возмущений общего вида. Отображение исследовано численными методами при изменении контрольных параметров для двух различных модельных возмущений (синусоидального и гауссова), которые задают дополнительные свойства системы: в первой системе доминирующую роль играет вынужденная симметрия, а во второй – резонансная.

Ключевые слова: ударно-возмущенный осциллятор, периодические движения, хаотические отображения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что наиболее интересным примером отображений оказываются отображения консервативного гармонического осциллятора, возмущаемого последовательностью δ -образных импульсов (ударных возмущений, или киков), периодически применяемых в моменты времени $t = T, 2T, 3T, \dots$ [1]. Эта система использовалась в качестве модельной при исследовании квантового хаоса в ионах в ловушках [2], [3], ионизации атомов последовательностью импульсов [4] или при изучении переноса электронов в полупроводниковых суперрешетках [5].

Добавление диссипативного слагаемого в уравнение движения гамильтоновой системы может кардинально изменить характер движения и привести к возникновению странных аттракторов. Роль, которую играют диссипативные силы в квантовых ударно-возмущенных системах, было предметом многочисленных исследований [2]–[7] в отличие от такой роли в соответствующих классических системах [8]–[10]. Поэтому в настоящей работе основное внимание уделяется пониманию свойств, привносимых диссипацией в классические ударно-возмущенные системы.

Обычно систему можно разрешить с помощью интегрирования уравнений движения по периоду T с учетом того, что между двумя соседними толчками ($t \neq nT$)

^{*}Dipartimento di Fisica, Università del Salento, Lecce, Italy.

[†]Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Lecce, Italy. E-mail: luigi.renna@le.infn.it

решение удовлетворяет уравнению движения свободного осциллятора с затуханием, а эффект толчка сводится к добавочному мгновенному изменению скорости, зависящему от местоположения [10]. При синусоидальном возмущении и при нулевом затухании получаются хорошо известные дискретные отображения, называемые *веб-отображениями* [1].

Мы будем следовать другому подходу. Рассмотрим линейный осциллятор с диссипацией, находящийся под действием внешней силы $F(x)$, зависящей от координаты. Тогда получим отображение Пуанкаре при непосредственной дискретизации классических уравнений движения вынужденного гармонического осциллятора. Если затухание положить равным нулю, это отображение совпадет с отображением, сохраняющим площадь, получаемым в стандартном подходе [1]. Кроме того, это отображение проявляет все типичные свойства ударно-возмущенных систем. На самом деле дискретизация привносит дополнительную половинную степень свободы и производит эффект, эквивалентный воздействию периодической последовательности δ -импульсов. Это отображение приводит также к возникновению сложного поведения и в пределе сильного подавления, в котором оно переходит в одномерное отображение, что предоставляет возможность исследования ситуации, когда стабильные гамильтоновы орбиты непрерывно связываются с одномерным отображением. Нами численно исследуется влияние двух различных видов силового члена: синусоидального возмущения, описывающего динамику заряженных частиц в поле волнового пакета, распространяющегося поперек внешнего магнитного поля, и гауссова возмущения, которое моделирует динамику отдельно взятого иона в ловушке, испытывающего нелинейные ударные взаимодействия, производимые серией гауссовых лазерных импульсов [3]. Если выполняется условие резонанса, в области хаоса параметрического пространства, где внешнее возмущение имеет характер сильного, свойства этих систем дополнительные. В первой системе доминирующую роль играет вынуждающее возмущение, и при этом наблюдается последовательность периодических состояний, сосуществующих со странным аттрактором и расположенных на одинаковых расстояниях относительно параметра вынуждающей силы; во второй системе доминирующую роль играет резонансная симметрия.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 с помощью дискретизации уравнений движения диссипативного гармонического осциллятора, подвергаемого зависящему от времени внешнему воздействию общего вида, строится соответствующее отображение, а также анализируются общие свойства стабильности системы в параметрическом пространстве. Ударные возмущения синусоидального и гауссова типов исследуются соответственно в разделах 3 и 4. Наконец, обзор результатов приведен в разделе 5.

2. ОТОБРАЖЕНИЯ УДАРНО-ВОЗМУЩЕННОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Начнем с уравнения, описывающего движение линейного осциллятора, который испытывает воздействие внешней силы, зависящей от местоположения:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma \dot{x} = F(x). \quad (1)$$

Здесь ω_0 – угловая частота осциллятора, γ – параметр затухания, а $F(x)$ – внешняя сила.

Введя дискретизацию времени $t_n = n\Delta t$ и положив

$$x_n = x(n\Delta t), \quad \frac{y_n}{\Delta t} = \dot{x}_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}, \quad \ddot{x}_n = \frac{\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n}{\Delta t}, \quad (2)$$

получим отображение

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= by_n - Qx_n + f(x_n), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$b = 1 - 2\gamma\Delta t, \quad Q = (\omega_0\Delta t)^2, \quad f(x) = F(x)(\Delta t)^2. \quad (4)$$

Если $Q = 0$ и $f(x) = K \sin x$ (K – параметр силы), то отображение (3) перейдет в хорошо известное (диссипативное) *стандартное отображение*, описывающее линейный ротатор, возмущенный периодически повторяющимися ударными воздействиями [11], [12].

Вводя переменные

$$x_n = z_n, \quad y_n = w_n \sin \alpha + (1 - \cos \alpha)z_n \quad (5)$$

и полагая

$$Q = (1 + b)(1 - \cos \alpha), \quad k\varphi(z) = \frac{f(z)}{\sin \alpha}, \quad \alpha = \omega\Delta t, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (6)$$

можно выразить отображение (3) в терминах переменных z, w следующим образом:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= [bw_n + k\varphi(z_n)] \sin \alpha + z_n \cos \alpha, \\ w_{n+1} &= [bw_n + k\varphi(z_n)] \cos \alpha - z_n \sin \alpha, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\varphi(z)$ задает возмущение, b – диссипацию, а $\alpha = 2\pi/q$ (q – целое число) – условие резонанса. Кроме того, в отличие от стандартного описания ударно-возмущенного осциллятора с диссипацией отображение (7) можно продолжить на $b = 0$, где оно становится одномерным.

Независимо от вида функции $\varphi(z)$ определитель Якоби отображения (7) равен b . Поэтому при $b < 1$ отображение относится к классу сжимающих для площади, а при $b = 1$ отображение сохраняет площадь.

Рассмотрим случай внешних сил, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(-z) = -\varphi(z), \quad \varphi'(0) = 1. \quad (8)$$

В этом случае отображение имеет стационарную точку $z = w = 0$. Поэтому приблизительным критерием возникновения хаоса в диссипативном случае оказывается условие неустойчивости системы, расположенной в начале координат [10]. Линеаризуя уравнение (7) вблизи начала координат, получим, что фиксированная точка $(0, 0)$ стабильна, когда

$$-(1 + b)(1 + \cos \alpha) < k \sin \alpha < (1 + b)(1 - \cos \alpha), \quad (9)$$

и неустойчива в противоположном случае.

Возможные фиксированные точки с периодами 1 и 2 исследуемого отображения расположены на соответствующих прямых

$$w = -z \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad (10)$$

$$w = z \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \quad (11)$$

Эти точки можно определить численными методами, разрешив соответствующие нелинейные уравнения

$$z(1+b) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = k\varphi(z), \quad (12)$$

$$z(1+b) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = -k\varphi(z). \quad (13)$$

Условие резонанса между последовательностью толчков и частотой осциллятора ω имеет вид

$$\alpha = \frac{2\pi}{q}, \quad (14)$$

где q – целое число.

Пусть $[k_1, k_2]$ – интервалы стабильности системы в начале координат при заданных значениях b и q . При $k_1 < k < k_2$ начало координат оказывается стабильной фиксированной точкой. С уменьшением b ширина интервала $[k_1, k_2]$ также уменьшается; с ростом q (> 2) абсолютное значение отрицательной величины k_1 возрастает, в то время как k_2 монотонно убывает и стремится к нулю при $q \rightarrow \infty$. При $k > 0$ система в начале координат теряет стабильность при $q > \pi / \operatorname{arctg}[k/(1+b)]$. При $k > k_2$ система в начале координат теряет стабильность ввиду развития бифуркации типа вилки, фиксированные точки которой задаются решениями уравнения (12), а при $k < k_1$ потеря стабильности обуславливается бифуркациями с удвоенными периодами, и их стабильные точки (периодические с периодом 2) можно вычислить, применив формулу (13).

При $b = 1$ фазовое пространство демонстрирует поведение, характерное для гамильтоновой системы с зависимостью, периодической по времени. Такие системы характеризуются как системы, обладающие $n+1/2$ степенями свободы и содержащие области хаотического и квазипериодического поведения в так называемом острове. Если выполняется условие резонанса (14), то портрет фазовой плоскости обладает симметрией порядка q .

Нами были исследованы ударные возмущения двух различных видов – синусоидального $\varphi(z) = \sin z$ и гауссова $\varphi(z) = ze^{-z^2}$, которые задают системы с дополняющими свойствами: в первой из этих систем главенствующую роль играет вынужденная симметрия, а во второй – резонансная. В случае синусоидального возмущения на некоторых интервалах параметра силы k наблюдается сосуществование хаотических и периодических аттракторов (аттрактор периода 1 вместе со своим быстрым каскадом удвоений периода). В случае гауссова возмущения даже при очень больших величинах параметра k можно найти q -симметричные периодические орбиты, а хаотические состояния бифурцируют при изломах (кризисах) периодического отображения.

3. СИНУСОИДАЛЬНЫЕ УДАРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Рассмотрим случай, когда член вынуждающей силы имеет вид

$$\varphi(z) = \sin z. \quad (15)$$

При $b = 1$ уравнения (7) совпадают с (бездиссипативным) веб-отображением из монографии [1]. В присутствии резонанса и для малых значений параметра k формируется стохастическая сетевая структура, проявляющая свойства кристаллической ($q \in \{q_c\}$) или квазикристаллической ($q \notin \{q_c\}$) симметрии. Диссипация разрушает стохастическую сеть фазовой плоскости, и периодические аттракторы P_N с периодами $N = nq$, $n = 1, 2, \dots$, связанные с бифуркациями типа “седло–узел” и с удвоением периода, начинают появляться и исчезать. Если увеличивать k в сторону области неустойчивости состояния в начале координат, то начинают возникать хаотические области ленточного типа и странные аттракторы.

Нами при наличии резонанса были вычислены, начиная с $b = 1$, последовательные представления фазовой плоскости, построенные при плавном уменьшении параметра b и различных значениях параметра k . В ситуации общего положения при малой диссипации, введенной в систему ($0 \ll b < 1$), эллиптические клетки распадаются после (долгого хаотического) переходного периода, продолжительность которого уменьшается с уменьшением b , стохастическая сеть разрушается и заменяется периодическими точками. Число этих аттракторов может быть в принципе произвольным, если выбрать затухание достаточно малым. В наших исследованиях были найдены тысячи периодических орбит в случае параметра b , приближающегося к единице. Например, при $k = 1.5$, $q = 3$ и $b = 0.99$, начиная с 25×10^4 изначальных точек внутри квадрата со стороной размера 200, с помощью метода Ньютона были найдены более 1200 P_3 -орбит (потомков эллиптических точек), находящихся в окружении мультипериодических состояний с периодами $3n$ (происходящих от островов, окружающих эти точки). Такое значительное число аттракторов возникает в широком диапазоне параметрического пространства. Обычно расположение периодических точек в фазовом пространстве отражает топологию фазового пространства в точке $b = 1$. В области стабильности состояния в начале координат при уменьшении b мультипериодические состояния распадаются в основном при помощи бифуркаций типа “седло–узел”, и число периодических состояний монотонно убывает.

Обычно с увеличением k (> 0) число стабильных периодических аттракторов также растет, в основном в результате бифуркаций типа “седло–узел”. Этот рост может существенно прерываться возникновением изломов (кризисов). Периодические точки при этом испытывают каскады удвоений периода. Для симметричных фиксированных точек наблюдались бифуркации типа вилки, приводящие к нарушению симметрии и возникающие перед каскадным процессом удвоений периода [12]–[14]. В целом внутри области стабильности состояния в начале координат система проявляет богатое динамическое поведение, в основном состоящее в появлении и исчезновении периодических аттракторов с различными периодами (при $k \approx 2$ и $b \approx 0.95$ обнаруживаются тысячи аттракторов с максимальными периодами, превышающими 50) при вариации параметров затухания и силы, что приводит к весьма запутанным диаграммам бифуркаций.

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма для z при фиксированном затухании ($b = 0.9$) и при $q = 3$ при варьировании параметра силы k (> 0). Чтобы добиться появления такого значительного числа аттракторов (с учетом ограниченного числа начальных условий) десять начальных точек были выбраны случайным образом при каждом значении параметра k в квадрате со стороной 40 и центром в начале координат. Система в начале координат остается стабильной при значениях $k \in [-1.097, 3.291]$, задаваемых уравнением (9).

3.1. Бифуркационные диаграммы. Многообразие поведения систем в присутствии внешней силы (15) хорошо видно на диаграмме, показанной на рис. 1, где представлена бифуркационная структура при значениях параметров $q = 3$, $b = 0.9$. Из диаграммы отчетливо видно, что динамика в основном состоит во внезапном появлении и последующем исчезновении как периодических аттракторов с различными периодами, так и зон хаотического поведения. В области параметров, представленной на рис. 1, наблюдается множество сосуществующих аттракторов, и малая вариация параметра k приводит к внезапным существенным изменениям аттрактора. Эти изменения имеют в основном характер граничных изломов (кризисов). Например, в окрестности $k \cong 2.11901$ в системе наблюдаются пара 9-компонентных хаотических аттракторов и несколько периодических аттракторов ($1P_1$, $12P_3$, $1P_4$, $2P_9$, $2P_{36}$). С ростом k хаотические области внезапно исчезают при значении параметра $k \cong 2.11902$; при этом значении k в системе выживают только периодические аттракторы.

Траектории с начальными данными вблизи границы могут испытывать иррегулярное движение в течение длительного времени, прежде чем стабилизироваться на периодическом аттракторе. Это проявляется особенно отчетливо в области $k \cong 4.7-7$, где динамика характеризуется кратковременным хаосом. В общем случае области регулярного и хаотического поведения оказываются сложным образом перепутанными в зависимости от конкретных значений параметров. При $k \geq 7$ вблизи граничного значения $k = 7$ доминирующую роль в системе играет хаотическое поведение. Тем не менее даже в этой области может наблюдаться сосуществование хаотических и периодических аттракторов внутри некоторых интервалов значений

Рис. 2. Диаграмма периодических орбит P_1 и P_2 , вложенных в область хаотического поведения. Параметры те же, что и на рис. 1.

параметра вынуждающей силы k . На самом деле орбиты P_1 и P_2 появляются в области хаоса благодаря бифуркации типа “седло–узел” и иногда благодаря бифуркации типа вилки, а затем теряют стабильность в процессе быстрого каскада удвоений периода. Это регулярное поведение проявляется вновь в областях параметра k , которые не удается визуализировать в бифуркационной диаграмме, так как они замаскированы сосуществующим с ними хаотическим движением. Чтобы численно найти эти орбиты на бифуркационной диаграмме, каждую траекторию, которая должна начинаться со своего собственного бассейна притяжения, не следует восстанавливать заново при каждом значении параметра k ; ее начальными значениями нужно выбирать последние по времени точки для графика при предыдущем значении k . Интервалы с регулярным движением повторяются при старших значениях параметра k , постепенно становясь все уже и уже. Внутри каждой из их областей стабильности стабильные периодические орбиты с конечным периодом развиваются в соответствии со своими собственными бифуркационными последовательностями и дестабилизируются с помощью удвоения периода. Диаграмма орбит P_1 и P_2 , стабильных относительно амплитуды возмущения k , показана на рис. 2.

Размеры бассейнов притяжения этих периодических аттракторов сравнительно малы по сравнению с размерами бассейнов притяжения хаотических аттракторов (примеры бассейна притяжения фиксированных точек показаны на рис. 3), и эти бассейны быстро уменьшаются с ростом k , так что они вряд ли могут возникать из обычной бифуркационной диаграммы. Однако эти траектории можно детально проанализировать, поскольку они получаются из периодичности возмущающего члена.

3.2. Фиксированные точки в области хаоса. Нетрудно найти P_1 -орбиты в бифуркационной диаграмме. Пусть z^* и w^* представляют собой координаты фиксированной точки общего положения. Одно из свойств якобиана уравнения (7) состоит в том, что он зависит только от z^* . Из условия стабильности следует уравнение

$$-(1+b) < k\varphi'(z^*) \sin \alpha + (1+b) \cos \alpha < (1+b). \quad (16)$$

Рис. 3. Бассейны притяжения P_1 -аттракторов при $k = 25.85$ (другие параметры те же, что и на предыдущих рисунках). Отметим примечательную симметрию бассейнов относительно пространственных отражений.

Получив k из уравнения (12), получим при $q > 2$ условие

$$-\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} < z^* \frac{\varphi'(z^*)}{\varphi(z^*)} < 1. \quad (17)$$

Если $\varphi(z)$ задается формулой (15), то из этого условия следует, что

$$-\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} < z^* \operatorname{ctg} z^* < 1. \quad (18)$$

Очевидно, что условие (18) явно выполнено для

$$\begin{aligned} z_m^* &= \pm \frac{\pi}{2} \pm 2m\pi, & k > 0, \\ z_m^* &= \pm \frac{\pi}{2} \pm (2m+1)\pi, & k < 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Применив уравнение (12), получим, что эти точки располагаются на кривой

$$k = \frac{z}{\sin z} (1+b) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad (20)$$

имеющей производную

$$\left. \frac{dk}{dz} \right|_{z=z^*} = \pm (1+b) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (21)$$

Значения w^* на фазовой плоскости, отвечающие z^* , задаются уравнением (10), так что они располагаются на кривой, имеющей производную

$$\left. \frac{dk}{dw} \right|_{w=w^*} = \mp (1+b), \quad (22)$$

Рис. 4. Фиксированные точки P_1 , погруженные в область хаоса. Точками обозначены фиксированные значения z_m^* , предсказываемые уравнением (19). Выбраны следующие значения параметров: $b = 0.9$, $q = 3$.

которая не зависит от q . Нетрудно увидеть, что значения z^* располагаются на равном удалении друг от друга в k :

$$\Delta k_m = 2\pi(1+b) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (23)$$

Местоположения фиксированных точек z^* в бифуркационной диаграмме можно получить численно с применением метода Ньютона или просто с помощью уравнений (18), (20). С помощью обоих этих методов получаются графики, весьма напоминающие представленные на рис. 4, где изображены периодические точки бифуркационной диаграммы, погруженной в область хаоса. Точками обозначены значения, предсказываемые уравнением (19). Области регулярного поведения бифуркационного графа увеличиваются в размере с ростом q . Это не так уж и неожиданно с учетом того, что с ростом q также увеличивается ширина интервала (18), а абсолютное значение производной (21) уменьшается.

Эти свойства имеют весьма общий характер, так как они типичны для осциллятора, подвергаемого воздействию периодической внешней силы. При $\varphi(z) = \cos z$ из неравенства (17) получим, что в областях значений z , сконцентрированных вокруг точек $z = \pm m\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$, имеются фиксированные точки, а из уравнения (12) получим, что соответствующие значения параметра имеют вид $k = \pm m\pi(1+b) \operatorname{tg}(\alpha/2)$ при четных m и $k = \mp m\pi(1+b) \operatorname{tg}(\alpha/2)$ – при нечетных. Интересно отметить, что функция $\varphi(z) = \cos z$ не обладает свойством (8). Таким образом, в случае периодического возмущающего воздействия можно найти фиксированные точки при каждом, в том числе сколь угодно большом, значении параметра k . Это является следствием противодействия между частотами осциллятора и вынуждающей силы.

Рис. 5. Та же диаграмма, что и на рис. 1, но при значении параметра $b = 0$.

3.3. Предел сильной абсорбции ($b = 0$). Отображение (7) можно продолжить на предельный случай очень сильного подавления $b = 0$, в котором оно перейдет в одномерное отображение (как это имеет место в случае стандартного диссипативного отображения [11], [12]).

Относительная бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 5, имеет вид, типичный для одномерных отображений: с хаосом, каскадами удвоений периодов, окнами периодичности, областями хаотического поведения, изломами (кризисами) и т. д. Характерными для диаграммы оказываются внутренние изломы странных аттракторов. Например, видно, что вблизи $k \approx 4.3$ на диаграмме возникает излом двухкомпонентного аттрактора, сосуществующего с однокомпонентным аттрактором. Этот второй хаотический аттрактор сталкивается с седловым аттрактором периода 2 примерно при $k \approx 5.0$, скачком меняя при этом размер, испытывая внутренний излом. Тем самым из двух аттракторов, существующих при $k \approx 4.25$, первый исчезает, испытывая граничный излом, а затем появляется вновь при $k \approx 5$, чтобы образовать вместе со вторым единый аттрактор, возникновение которого обусловлено внутренним изломом. Также для бифуркационной диаграммы характерно наличие последовательности окон периодичности, размер которых уменьшается с ростом k . На рис. 5 видно, что, начиная примерно с $k = 4$, диаграмма состоит из последовательности хаотических областей, каждая из которых прерывается внезапным появлением стабильной периодической орбиты с конечным периодом и последующей бифуркацией. Окна периодичности повторяются при почти равноудаленных значениях параметра k . Вне каждого окна между двумя аттракторами развивается излом, и это явление повторяется с той же частотой, с которой появляются окна, следующие за этими изломами. При больших значениях параметра k окна периодичности заполняются областями хаотического поведения, и такая структура исчезает.

Фиксированные точки, сходные с полученными в предыдущем разделе ($b \neq 0$), продолжают сосуществовать в бифуркационных диаграммах с тем же расположением, что представлено на рис. 4, но они отнесены по параметру k чуть больше,

чем на $1/2$. Их не видно, так как они погружены в сосуществующие хаотические аттракторы.

4. ГАУССОВЫ ИМПУЛЬСЫ

Классическую динамику отдельного иона в ловушке, который испытывает нелинейные ударные воздействия, производимые последовательностью гауссовых лазерных импульсов, можно моделировать с помощью функции

$$\varphi(z) = ze^{-z^2}. \quad (24)$$

Чтобы найти фиксированные точки, произведем подстановку

$$z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = 1 - 2z^2 \quad (25)$$

в уравнении (17), что дает условие

$$-\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} < 1 - 2z^{*2} < 1, \quad (26)$$

которому удовлетворяет функция

$$z^{*2} < \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (27)$$

Из уравнения (12) получим, что соответствующие величины параметра k при $z^* \neq 0$ имеют вид

$$k^* = (1+b)e^{z^{*2}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (28)$$

Если k удовлетворяет условию (9), то начало координат оказывается стабильной фиксированной точкой, испытывающей удвоение периода при $k = -(1+b) \operatorname{ctg}(\alpha/2)$ и бифуркацию типа вилки при $k = (1+b) \operatorname{tg}(\alpha/2)$. Эти последние фиксированные точки остаются стабильными вплоть до значения параметра $k = (1+b) \operatorname{tg}(\alpha/2)e^{\operatorname{cosec}^2(\alpha/2)/2}$, при котором каскад удвоений периодов приводит к хаосу. На рис. 6 изображен график бифуркационной диаграммы динамической переменной z относительно параметра внешней силы k . На диаграмме показана последовательность перекрывающихся периодических орбит, так что реализуется четкое разделение между периодическим и хаотическим поведением. Поскольку вынуждающая сила не совпадает с собственной частотой, динамика в основном определяется частотой гармонического осциллятора. На рис. 7 показаны два странных аттрактора, характерных для системы. При уменьшении b аттракторы коллапсируют на прямую, как и в случае одномерных отображений. Странный аттрактор при $b = 0$ окрашен в серый цвет на рис. 7б).

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В работе было предложено новое отображение, происходящее из одномерного гармонического осциллятора с затуханием, испытывающего воздействие внешнего возмущения, зависящего от местоположения. В пределе нулевой диссипации это

Рис. 6. Бифуркационная диаграмма величины z в зависимости от k в случае, когда возмущение моделируется уравнением (24). Параметры принимают те же значения, что и на рис. 1. На диаграмме показаны точки пересечения P_1 (черные тонкие линии), P_2 (серые линии) и P_3 (черные жирные линии). При $k > 10$ выживают только два состояния P_3 за исключением очень высоких значений параметра k ($k \approx 10^{25}$).

Рис. 7. Хаотические аттракторы при $k = 8, q = 3$: $b = 0.9$ (а); $b = 0.5$ — черная линия и $b = 0$ — серая линия (б).

отображение совпадает с отображением Пуанкаре ударно-возмущаемого осциллятора, испытывающего воздействие последовательности периодических толчков (так называемое веб-отображение).

Без потери общности были проанализированы, в частности, свойства дискретно возмущаемого гармонического осциллятора при резонансном значении $q = 3$, под-

вергаемого синусоидальному и гауссову возмущениям, что моделирует различные физические системы. Эти возмущения приводят к дополняющим друг друга свойствам: в первой системе главенствующую роль играет вынужденная симметрия, а во второй – резонансная симметрия. Примерно одни и те же динамические характеристики наблюдаются в системах с различными значениями параметра q (кроме q -симметрии). При $b = 0$ отображение не теряет своей значимости, как в случае стандартного подхода к ударно-возбужденному осциллятору, но сжимается до прямой, становясь при этом одномерным.

Отображение представляет собой богатую и разнообразную динамическую систему, демонстрирующую очень сложное поведение в различных областях параметрической плоскости. Анализ динамики в параметрическом пространстве показывает сосуществование множества периодических и хаотических аттракторов, каскадов удвоений периодов с переходом в хаос, изломов (кризисов), кратковременных переходов в хаос, странных аттракторов и т. д. также и при малых значениях параметра b . Нами было найдено множество сосуществующих аттракторов (тысячи периодических состояний), чьи бассейны притяжения переплетены очень сложным образом. Большинство периодических аттракторов возникает в результате бифуркаций типа “седло–узел”.

Исследование отображения в присутствии возмущений различных видов может пролить свет на роль диссипации в квантовых системах, где аналогичные задачи подходящим образом моделируются с помощью квантовых аналогов диссипативных ударно-возмущенных гармонических осцилляторов.

Список литературы

- [1] G. M. Zaslavsky, *Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*, London, Imperial College Press, 1998.
- [2] S. A. Gardiner, J. I. Cirac, P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.*, **79**:24 (1997), 4790–4793, arXiv: quant-ph/9707058; Erratum: **80**:13 (1998), 2968–2968.
- [3] A. J. Scott, C. A. Holmes, G. J. Milburn, *Phys. Rev. A*, **61**:1 (2000), 013401, 7 pp., arXiv: chaos-dyn/9903012.
- [4] S. Tanabe, S. Watanabe, N. Sato, M. Matsuzawa, S. Yoshida, C. Reinhold, J. Burgdörfer, *Phys. Rev. A*, **63**:5 (2001), 052721, 11 pp.
- [5] T. M. Fromhold, A. A. Krokhin, C. R. Tench, S. Bujkiewicz, P. B. Wilkinson, F. W. Sheard, L. Eaves, *Phys. Rev. Lett.*, **87**:4 (2001), 046803, 4 pp.
- [6] A. Iomin, G. M. Zaslavsky, *Phys. Rev. E*, **67**:2 (2003), 027203, 4 pp.
- [7] A. R. R. Carvalho, R. L. de Matos Filho, L. Davidovich, *Phys. Rev. E*, **70**:2 (2004), 026211, 15 pp., arXiv: quant-ph/0405009.
- [8] L. Renna, *Phys. Rev. E*, **64**:4 (2001), 046213, 7 pp.
- [9] R. F. Mudde, S. G. Jansz, *Physica D*, **179**:1–2 (2003), 1–17.
- [10] A. A. Vasil'ev, G. M. Zaslavsky, M. Ya. Natenzon, A. I. Neishtadt, B. A. Petrovichev, R. Z. Sagdeev, A. A. Chernikov, *ЖЭТФ*, **94**:10 (1988), 170–187.
- [11] G. M. Zaslavsky, *Phys. Lett. A*, **69**:3 (1978), 145–147.
- [12] G. Schmidt, B. W. Wang, *Phys. Rev. A*, **32**:5 (1985), 2994–2999.
- [13] J. W. Swift, K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.*, **52**:9 (1984), 705–708.
- [14] U. Feudel, C. Grebogi, B. R. Hunt, J. A. Yorke, *Phys. Rev. E*, **54**:1 (1996), 71–81.