Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Симметрии и законы сохранения разностных уравнений, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 2, 195–211

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6674>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 09:43:27

© 2011 г.

В. В. Жаринов*

СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В рамках формализма разностных джетов проводится алгебро-геометрический анализ систем разностных уравнений на многомерных целочисленных решетках, изучаются их симметрии и законы сохранения.

Ключевые слова: решетка, разностные уравнения, симметрии, законы сохранения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Алгебро-геометрические методы образуют естественный фундамент для изучения симметрий, законов сохранения, отображений Ли–Беклунда, преобразований Беклунда, интегрируемости и других подобных свойств систем уравнений в частных производных. Эти методы и их приложения подробно изложены в многочисленных монографиях (см., например, [1]–[7]). В последнее время в связи с ростом возможностей компьютерной техники все большую популярность приобретают решеточные модели как для численных расчетов, так и для теоретических исследований в математике и физике. В этом случае также немалый интерес представляют симметрии, законы сохранения и другие геометрические свойства возникающих при этом систем нелинейных разностных уравнений, однако адекватный математический аппарат пока не разработан, хотя имеется немало работ в этом направлении (см., например, [8]–[14]).

В настоящей работе предлагается подход к построению такого аппарата, основанный на понятии *разностного джета* [15], [16] и позволяющий с единой точки зрения описывать геометрические свойства разностных систем. Отметим, что полученные результаты (теоремы 5–8) существенно отличаются от аналогичных результатов для дифференциальных уравнений. Это связано с принципиальным различием между *сдвигами* и *дифференцированиями*: первые задают морфизмы соответствующей алгебры функций, а вторые подчиняются правилу Лейбница на ней.

Будем использовать стандартные обозначения

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zharinov@mi.ras.ru

и обозначать через $\text{Map}(X; Y)$ множество всех отображений из множества X в множество Y . Хотя это явно и не оговаривается, все вводимые ниже пространства обладают естественными топологиями, а все операции предполагаются непрерывными или являются таковыми по построению. В частности, запись $\text{Map}(X; Y)$ фактически означает пространство всех непрерывных отображений из топологического пространства X в топологическое пространство Y , наделенное подходящей топологией.

2. АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКЕ

2.1. Решетка и ее разностный комплекс. Опишем здесь кратко разностный комплекс решетки (подробнее см. [15]–[17]).

Пусть $D \in \mathbb{N}$, $\mathbf{D} = \{1, 2, \dots, D\}$. Решетка (подробнее, целочисленная решетка) есть множество $\mathbb{L} = \mathbb{Z}^D$. На решетке $\mathbb{L}$ определены две согласованные алгебраические структуры – $\mathbb{Z}$ -модуль и абелевой группы по сложению. $\mathbb{Z}$ -модуль $\mathbb{L}$ имеет базис $\{e_1, \dots, e_D\}$, где

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_D = (0, \dots, 0, 1).$$

Для $i = (i^1, \dots, i^D) = \sum_{\mu \in \mathbf{D}} i^\mu e_\mu \in \mathbb{L}$ полагаем $|i| = \sum_{\mu \in \mathbf{D}} |i^\mu| \in \mathbb{Z}_+$.

Группа $\mathbb{L}$ действует на решетке $\mathbb{L}$ сдвигами,

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{L}), \quad i \mapsto T_i: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}, \quad k \mapsto T_i k = k + i.$$

На алгебре $\mathcal{A}(\mathbb{L}) = \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbb{R})$ группа $\mathbb{L}$ действует по правилу

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A}(\mathbb{L})), \quad i \mapsto T_i: \mathcal{A}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{L}), \quad \varphi \mapsto T_i \varphi = \varphi \circ T_i,$$

так что $(T_i \varphi)(k) = \varphi(T_i k) = \varphi(k + i)$ для всех $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{L})$, $i, k \in \mathbb{L}$.

Определен $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модуль

$$\mathcal{D}(\mathbb{L}) = \left\{ \zeta = \sum_{\mu \in \mathbf{D}} \zeta^\mu \cdot \Delta_\mu \mid \zeta^\mu \in \mathcal{A}(\mathbb{L}) \right\} \subset \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}(\mathbb{L}))$$

с базисом $\{\Delta_1, \dots, \Delta_D\}$, где элементарные разностные операторы

$$\Delta_\mu = T_{e_\mu} - T_0 \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}(\mathbb{L})), \quad \mu \in \mathbf{D}.$$

Дуальный $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модуль

$$\mathcal{D}^*(\mathbb{L}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}(\mathbb{L})}(\mathcal{D}(\mathbb{L}); \mathcal{A}(\mathbb{L})) = \left\{ \varrho = \sum_{\mu \in \mathbf{D}} \varrho_\mu \cdot \Delta^\mu \mid \varrho_\mu \in \mathcal{A}(\mathbb{L}) \right\}$$

имеет дуальный базис $\{\Delta^1, \dots, \Delta^D\}$, где $\langle \Delta^\mu, \Delta^\nu \rangle = \delta_\nu^\mu$ для всех $\mu, \nu \in \mathbf{D}$. Группа $\mathbb{L}$ действует на линейных пространствах $\mathcal{D}(\mathbb{L})$ и $\mathcal{D}^*(\mathbb{L})$ покомпонентно,

$$\begin{aligned} T: \mathbb{L} &\rightarrow \text{Aut}(\mathcal{D}(\mathbb{L})), & i &\mapsto T_i: \mathcal{D}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{L}), \\ & & \zeta &= \sum_{\mu} \zeta^\mu \cdot \Delta_\mu \mapsto T_i \zeta = \sum_{\mu} (T_i \zeta^\mu) \cdot \Delta_\mu, \\ T: \mathbb{L} &\rightarrow \text{Aut}(\mathcal{D}^*(\mathbb{L})), & i &\mapsto T_i: \mathcal{D}^*(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{D}^*(\mathbb{L}), \\ & & \varrho &= \sum_{\mu} \varrho_\mu \cdot \Delta^\mu \mapsto T_i \varrho = \sum_{\mu} (T_i \varrho_\mu) \cdot \Delta^\mu, \end{aligned}$$

так что

$$T_i \langle \varrho, \zeta \rangle = T_i \left(\sum_{\mu} \varrho_{\mu} \zeta^{\mu} \right) = \sum_{\mu} (T_i \varrho_{\mu}) (T_i \zeta^{\mu}) = \langle T_i \varrho, T_i \zeta \rangle$$

для всех $i \in \mathbb{L}$, $\varrho \in \mathcal{D}^*(\mathbb{L})$, $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$.

Определена градуированная внешняя алгебра

$$\Omega(\mathbb{L}) = \bigoplus_{0 \leq q \leq D} \Omega^q(\mathbb{L}),$$

где $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модули

$$\begin{aligned} \Omega^q(\mathbb{L}) &= \text{Hom}_{\mathcal{A}(\mathbb{L})} \left(\bigwedge_{\mathcal{A}(\mathbb{L})}^q \mathcal{D}(\mathbb{L}); \mathcal{A}(\mathbb{L}) \right) = \bigwedge_{\mathcal{A}(\mathbb{L})}^q \mathcal{D}^*(\mathbb{L}) = \\ &= \left\{ \varrho = \frac{1}{q!} \sum_{m \in \mathbf{D}_q} \varrho_m \cdot \Delta^m \mid \varrho_m \in \mathcal{A}(\mathbb{L}) \right\}, \end{aligned}$$

$m = (\mu_1, \dots, \mu_q)$, $\Delta^m = \Delta^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \Delta^{\mu_q}$. В частности, $\Omega^0(\mathbb{L}) = \mathcal{A}(\mathbb{L})$, $\Omega^1(\mathbb{L}) = \mathcal{D}^*(\mathbb{L})$.

Действие группы $\mathbb{L}$ на градуированной внешней алгебре $\Omega(\mathbb{L})$ определяется ее действием на линейных пространствах $\mathcal{A}(\mathbb{L})$, $\mathcal{D}^*(\mathbb{L})$ и условием $T_i(\varrho \wedge \chi) = (T_i \varrho) \wedge (T_i \chi)$ для всех $i \in \mathbb{L}$, $\varrho, \chi \in \Omega(\mathbb{L})$, т. е. по-прежнему покомпонентное.

Определен разностный дифференциал

$$d \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\Omega(\mathbb{L})), \quad \varrho \mapsto d\varrho = \sum_{\mu \in \mathbf{D}} \Delta^{\mu} \wedge \Delta_{\mu} \varrho,$$

где элементарные разностные операторы

$$\Delta_{\mu} = T_{e_{\mu}} - T_0 \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\Omega(\mathbb{L})), \quad \mu \in \mathbf{D},$$

причем по построению

а) $d \circ d = 0$;

б) $d^q = d|_{\Omega^q(\mathbb{L})}: \Omega^q(\mathbb{L}) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathbb{L})$ для всех $0 \leq q \leq D$.

Таким образом, определен комплекс линейных пространств $\{\Omega^q(\mathbb{L}); d^q\}$ – разностный комплекс решетки $\mathbb{L}$.

ТЕОРЕМА 1. *Полный разностный комплекс решетки $\mathbb{L}$*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^0(\mathbb{L}) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbb{L}) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^D(\mathbb{L}) \longrightarrow 0$$

точный, т. е. все его пространства когомологий тривиальные.

2.2. Расслоение разностных джетов. Изложим кратко основы аппарата разностных джетов (подробнее см. [15], [16]).

Пусть V – линейное пространство, на котором группа $\mathbb{L}$ действует тривиально,

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(V), \quad i \mapsto T_i: V \rightarrow V, \quad u \mapsto T_i u = u.$$

Будем рассматривать прямое произведение $J = \mathbb{L} \times V$ как векторное расслоение над решеткой $\mathbb{L}$ с типичным слоем V и проекцией на первый сомножитель

$$\pi: J = \mathbb{L} \times V \rightarrow \mathbb{L}, \quad (k, u) \mapsto \pi(k, u) = k.$$

Поскольку, группа $\mathbb{L}$ действует на слоях тривиально, ее действие на расслоении π имеет вид

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\pi), \quad i \mapsto T_i: J \rightarrow J, \quad (k, u) \mapsto T_i(k, u) = (T_i k, u),$$

подробнее $T_i = (T_i, T_i) \in \text{Aut}(\mathbf{J}) \times \text{Aut}(\mathbb{L})$, где $T_i \circ \pi = \pi \circ T_i$, причем $T_i(k, u) = (k + i, u)$, $T_i k = k + i$ для всех $i, k \in \mathbb{L}$, $u \in V$. Индуцированное действие на $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модуле

$$\mathcal{M}(\pi) = \{\varphi \in \text{Map}(\mathbb{L}; J) \mid \pi \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{L}}\} = \text{Map}(\mathbb{L}; V)$$

всех сечений расслоения $\pi: J \rightarrow \mathbb{L}$ имеет вид

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}(\pi)), \quad i \mapsto T_i: \mathcal{M}(\pi) \rightarrow \mathcal{M}(\pi), \quad \varphi \mapsto T_i \varphi = \varphi \circ T_i,$$

так что $(T_i \varphi)(k) = \varphi(k + i)$ для всех $i, k \in \mathbb{L}$, $\varphi \in \mathcal{M}(\pi)$.

Расслоение π индуцирует *расслоение разностных джетов*

$$\pi: \mathbf{J} = \mathbb{L} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{L}, \quad (k, \mathbf{u}) \mapsto \pi(k, \mathbf{u}) = k,$$

над решеткой $\mathbb{L}$, где типичный слой

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u} = (u_l) \mid l \in \mathbb{L}, u_l \in V\} = V_{\mathbb{L}} \simeq \mathcal{M}(\pi).$$

Действие группы $\mathbb{L}$ на типичном слое $\mathbf{V}$ определяется согласно ее действию на $\mathcal{M}(\pi)$,

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{V}), \quad i \mapsto T_i: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}, \quad \mathbf{u} \mapsto T_i \mathbf{u}, \quad (T_i \mathbf{u})_l = u_{l+i}, \quad l \in \mathbb{L}.$$

Соответственно, действие группы $\mathbb{L}$ на расслоении π имеет вид

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\pi), \quad i \mapsto T_i: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}, \quad (k, \mathbf{u}) \mapsto T_i(k, \mathbf{u}) = (T_i k, T_i \mathbf{u}),$$

подробнее $T_i = (T_i, T_i) \in \text{Aut}(\mathbf{J}) \times \text{Aut}(\mathbb{L})$, где $T_i \circ \pi = \pi \circ T_i$, причем $T_i(k, \mathbf{u}) = (k + i, T_i \mathbf{u})$, $T_i k = k + i$ для всех $i, k \in \mathbb{L}$, $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$. Индуцированное действие на $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модуле

$$\mathcal{M}(\pi) = \{\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbf{J}) \mid \pi \circ \phi = \text{id}_{\mathbb{L}}\} = \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbf{V})$$

всех сечений расслоения $\pi: \mathbf{J} \rightarrow \mathbb{L}$ имеет вид

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}(\pi)), \quad i \mapsto T_i: \mathcal{M}(\pi) \rightarrow \mathcal{M}(\pi), \quad \phi \mapsto T_i \phi,$$

где $T_i \phi = T_{-i} \circ \phi \circ T_i$, так что $(T_i \phi)_l(k) = \phi_{l-i}(k + i)$ для всех $\phi = (\varphi_l) \in \mathcal{M}(\pi)$, $i, l, k \in \mathbb{L}$.

Определено линейное подпространство

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_T(\pi) &= \{\phi \in \mathcal{M}(\pi) \mid T_i \phi = \phi \text{ для всех } i \in \mathbb{L}\} = \\ &= \{\phi \in \mathcal{M}(\pi) \mid T_i \circ \phi = \phi \circ T_i \text{ для всех } i \in \mathbb{L}\} \end{aligned}$$

всех *инвариантных сечений* (подробнее *сечений, инвариантных относительно сдвигов*) расслоения $\pi: \mathbf{J} \rightarrow \mathbb{L}$.

Определено отображение

$$\mathbf{j}: \mathcal{M}(\pi) \rightarrow \mathcal{M}(\pi), \quad \varphi \mapsto \mathbf{j}\varphi, \quad (\mathbf{j}\varphi)_l = T_l \varphi, \quad l \in \mathbb{L},$$

подробнее $(\mathbf{j}\varphi)_l(k) = \varphi(k + l)$ для всех $\varphi \in \mathcal{M}(\pi)$, $l, k \in \mathbb{L}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Отображение $\mathbf{j}: \mathcal{M}(\pi) \rightarrow \mathcal{M}(\pi)$ инъективное. Более того, если джеты $\mathbf{j}\varphi, \mathbf{j}\psi \in \mathcal{M}(\pi)$ совпадают хотя бы в одной точке $k \in \mathbb{L}$, то сечения $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\pi)$ совпадают на всей решетке $\mathbb{L}$.*

2. *Имеет место изоморфизм*

$$\mathbf{j}: \mathcal{M}(\pi) \simeq \mathcal{M}_T(\pi).$$

2.3. Инвариантные подмножества и сечения. Пусть $\pi: \mathbf{J} = \mathbb{L} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{L}$ – расслоение разностных джетов над решеткой $\mathbb{L}$. По построению:

а) для каждого $k \in \mathbb{L}$ имеет место изоморфизм

$$\pi^{-1}(k) \simeq \mathbf{V}, \quad (k, \mathbf{u}) \mapsto \mathbf{u},$$

б) $T_i \pi^{-1}(k) = \pi^{-1}(T_i k) = \pi^{-1}(k + i)$ для всех $i, k \in \mathbb{L}$.

Для подмножества $\mathbf{F} \subset \mathbf{J}$ и точки $k \in \mathbb{L}$ положим

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F} \cap \pi^{-1}(k) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_k = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V} \mid (k, \mathbf{u}) \in \mathbf{F}_k\},$$

так что $\mathbf{F}_k \simeq \mathcal{F}_k$, $(k, \mathbf{u}) \mapsto \mathbf{u}$.

Подмножество $\mathbf{F} \subset \mathbf{J}$ будем называть *инвариантным* (подробнее, *инвариантным относительно сдвигов*), если $T_i \mathbf{F} = \mathbf{F}$ для всех $i \in \mathbb{L}$.

Тривиальный пример инвариантного подмножества есть $\mathbf{F} = \mathbf{J}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть подмножество $\mathbf{F} \subset \mathbf{J}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) *подмножество $\mathbf{F}$ инвариантное;*
- 2) *действие $T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{J})$ имеет сужение*

$$T = T|_{\mathbf{F}}: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{F}), \quad i \mapsto T_i = T_i|_{\mathbf{F}}: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}, \quad (k, \mathbf{u}) \mapsto (T_i k, T_i \mathbf{u});$$

- 3) *для всех $i, k \in \mathbb{L}$ имеют место изоморфизмы $T_i: \mathcal{F}_k \simeq \mathcal{F}_{k+i}$;*
- 4) *имеет место изоморфизм*

$$\varkappa: \mathbf{F} \simeq \tilde{\mathbf{F}} = \mathbb{L} \times \mathcal{F}, \quad (k, \mathbf{u}) \mapsto \varkappa(k, \mathbf{u}) = (k, \tilde{\mathbf{u}}), \quad \tilde{\mathbf{u}} = T_{-k} \mathbf{u},$$

здесь и всюду ниже $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \subset \mathbf{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямой проверкой. ■

В частности, для каждого инвариантного подмножества $\mathbf{F}$ пространства $\mathbf{J}$ определено подрасслоение $\pi_{\mathbf{F}} = \pi|_{\mathbf{F}}: \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{L}$ расслоения $\pi: \mathbf{J} \rightarrow \mathbb{L}$ с типичным слоем $\mathcal{F}$, на котором определено действие

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\pi_{\mathbf{F}}), \quad i \mapsto T_i: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}, \quad (k, \mathbf{u}) \mapsto T_i(k, \mathbf{u}) = (T_i k, T_i \mathbf{u}).$$

Для каждого инвариантного подмножества $\mathbf{F} \subset \mathbf{J}$ определены следующие множества:

- а) $\mathcal{M}(\pi_{\mathbf{F}}) = \{\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbf{F}) \mid \pi_{\mathbf{F}} \circ \phi = \text{id}_{\mathbb{L}}\} = \{\phi \in \mathcal{M}(\pi) \mid \text{graph } \phi \subset \mathbf{F}\}$ – множество всех сечений подрасслоения $\pi_{\mathbf{F}}: \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{L}$, где $\text{graph } \phi$ – график сечения ϕ ;
- б) $\mathcal{M}_T(\pi_{\mathbf{F}}) = \mathcal{M}_T(\pi) \cap \mathcal{M}(\pi_{\mathbf{F}})$ – множество всех инвариантных сечений подрасслоения $\pi_{\mathbf{F}}: \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{L}$;
- в) $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\pi) = \{\varphi \in \mathcal{M}(\pi) \mid \mathbf{j}\varphi \in \mathcal{M}(\pi_{\mathbf{F}})\}$ – множество всех сечений расслоения $\pi: \mathbf{J} \rightarrow \mathbb{L}$, допустимых для подрасслоения $\pi_{\mathbf{F}}: \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{L}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathbf{F}$ – инвариантное подмножество пространства $\mathbf{J}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для каждой точки $(k, \mathbf{u}) \in \mathbf{F}$ существует одно и только одно допустимое сечение $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\pi)$ такое, что $(\mathbf{j}(\varphi))(k) = \mathbf{u}$.

2. $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\pi) \simeq \mathcal{M}_T(\pi_{\mathbf{F}}) \simeq \mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, $\varphi \mapsto \mathbf{j}\varphi$, $\phi \mapsto \phi(0)$, в первом случае $\varphi = (\varphi(k)) \mapsto \phi = (\varphi_l(k))$, $\varphi_l(k) = \varphi(k+l)$, а во втором случае $\phi = (\varphi_l(k)) \mapsto \mathbf{u} = (u_l)$, $u_l = \varphi_l(0)$. В частности, $\varphi = (\varphi(k)) \mapsto \mathbf{u} = (u_l)$, $u_l = \varphi(l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для данной точки $(k, \mathbf{u}) \in \mathbf{F}$ сечение $\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{L}, V)$ зададим правилом $\varphi(i) = u_{i-k}$ для всех $i \in \mathbb{L}$. Тогда по построению $(\mathbf{j}\varphi)_l(i) = u_{i+l-k}$ для всех $l, i \in \mathbb{L}$. В частности, $(\mathbf{j}\varphi)_l(k) = u_l$ для всех $l \in \mathbb{L}$, т. е. $(\mathbf{j}\varphi)(k) = \mathbf{u} \in \mathcal{F}_k$. Кроме того, $(\mathbf{j}\varphi)_l(i) = u_{i+l-k} = (T_{i-k}\mathbf{u})_l$ для всех $l, i \in \mathbb{L}$, так что $(\mathbf{j}\varphi)(i) = T_{i-k}\mathbf{u} \in T_{i-k}\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_i$ в силу инвариантности подмножества $\mathbf{F}$ (см. предложение 2). Таким образом, построенное сечение φ допустимо для $\mathbf{F}$. Единственность такого сечения следует из предложения 1, так что первое утверждение доказано. Второе утверждение следует из первого и предложения 1. ■

2.4. Симметрии. Пусть $\mathbf{F}$ – инвариантное подмножество пространства $\mathbf{J}$. Группа

$$\text{Aut}(\pi_{\mathbf{F}}) = \{R = (R_{\mathbf{F}}, R_{\mathbb{L}}) \in \text{Aut}(\mathbf{F}) \times \text{Aut}(\mathbb{L}) \mid \pi_{\mathbf{F}} \circ R_{\mathbf{F}} = R_{\mathbb{L}} \circ \pi_{\mathbf{F}}\}$$

всех автоморфизмов расслоения $\pi_{\mathbf{F}}: \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{L}$ имеет подгруппу

$$\text{Aut}_T(\pi_{\mathbf{F}}) = \{R \in \text{Aut}(\pi_{\mathbf{F}}) \mid T_i \circ R = R \circ T_i \text{ для всех } i \in \mathbb{L}\}$$

всех инвариантных автоморфизмов расслоения $\pi_{\mathbf{F}}: \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{L}$ (поясним, что здесь $T_i = (T_{i\mathbf{F}}, T_{i\mathbb{L}}) \in \text{Aut}(\pi_{\mathbf{F}})$). В свою очередь, группа $\mathbb{L}$ порождает подгруппу $\mathcal{T} = \{T_i \in \text{Aut}(\pi_{\mathbf{F}}) \mid i \in \mathbb{L}\}$ группы $\text{Aut}_T(\pi_{\mathbf{F}})$. Эта подгруппа нормальна, поскольку по построению $T_i \circ R = R \circ T_i$ для всех $i \in \mathbb{L}$ и $R \in \text{Aut}_T(\pi_{\mathbf{F}})$, так что определена факторгруппа

$$\text{SYM}(\pi_{\mathbf{F}}) = \text{Aut}_T(\pi_{\mathbf{F}})/\mathcal{T} = \{\mathbf{R} = R \circ \mathcal{T} \mid R \in \text{Aut}_T(\pi_{\mathbf{F}})\}$$

симметрий расслоения $\pi_{\mathbf{F}}: \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{L}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\mathbf{F}$ – инвариантное подмножество пространства $\mathbf{J}$. Группа автоморфизмов $\text{Aut}(\pi_{\mathbf{F}})$ действует на множестве сечений $\mathcal{M}(\pi_{\mathbf{F}})$ по праву

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\pi_{\mathbf{F}}) &\rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}(\pi_{\mathbf{F}})), & R &\mapsto R: \mathcal{M}(\pi_{\mathbf{F}}) \rightarrow \mathcal{M}(\pi_{\mathbf{F}}), \\ & & \phi &\mapsto R\phi = R^{-1} \circ \phi \circ R \end{aligned}$$

(подробнее, $R\phi = R_{\mathbf{F}}^{-1} \circ \phi \circ R_{\mathbb{L}}$). Это действие имеет сужение

$$\text{Aut}_T(\pi_{\mathbf{F}}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}_T(\pi_{\mathbf{F}})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $R \in \text{Aut}(\pi_{\mathbf{F}})$, $\pi_{\mathbf{F}} \circ R = R \circ \pi_{\mathbf{F}}$, и $\phi \in \mathcal{M}(\pi_{\mathbf{F}})$, $\pi_{\mathbf{F}} \circ \phi = \text{id}_{\mathbb{L}}$. Тогда

$$\pi_{\mathbf{F}} \circ R\phi = \pi_{\mathbf{F}} \circ R^{-1} \circ \phi \circ R = R^{-1} \circ \pi_{\mathbf{F}} \circ \phi \circ R = R^{-1} \circ \text{id}_{\mathbb{L}} \circ R = R^{-1} \circ R = \text{id}_{\mathbb{L}}.$$

Если, кроме того, $T_i \circ R = R \circ T_i$ и $T_i \circ \phi = \phi \circ T_i$, $i \in \mathbb{L}$, то

$$T_i \circ R\phi = T_i \circ R^{-1} \circ \phi \circ R = R^{-1} \circ T_i \circ \phi \circ T_i \circ R = R^{-1} \circ \phi \circ R \circ T_i = R\phi \circ T_i. \quad \blacksquare$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathbf{F}$ – инвариантное подмножество пространства $\mathbf{J}$. Действие $\text{Aut}_T(\pi_{\mathbf{F}}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}_T(\pi_{\mathbf{F}}))$ индуцирует соответствующее действие на множестве допустимых сечений $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\pi)$,

$$\text{Aut}_T(\pi_{\mathbf{F}}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\pi)), \quad R \mapsto R_* = \mathbf{j}^{-1} \circ R \circ \mathbf{j}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться предложениями 3 и 4.

По определению $T_i\phi = \phi$ для всех $i \in \mathbb{L}$ и $\phi \in \mathcal{M}_T(\pi_{\mathbf{F}})$, т. е. нормальная подгруппа $\mathcal{T}$ действует на множестве $\mathcal{M}_T(\pi_{\mathbf{F}})$ тривиальным образом, так что определено фактор-действие

$$\text{SYM}(\pi_{\mathbf{F}}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}_T(\pi_{\mathbf{F}})), \quad \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}: \mathcal{M}_T(\pi_{\mathbf{F}}) \rightarrow \mathcal{M}_T(\pi_{\mathbf{F}}), \\ \phi \mapsto \mathbf{R}\phi = R\phi.$$

Как и выше, это действие индуцирует действие на множестве $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\pi)$,

$$\text{SYM}(\pi_{\mathbf{F}}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\pi)), \quad \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}_* = \mathbf{j}^{-1} \circ \mathbf{R} \circ \mathbf{j},$$

что позволяет считать факторгруппу $\text{SYM}(\pi_{\mathbf{F}})$ также и группой симметрий множества $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\pi)$ допустимых сечений расслоения $\pi_{\mathbf{F}}: \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{L}$.

Изучим группу $\text{SYM}(\pi_{\mathbf{F}})$ подробнее.

Сначала отметим, что группы $\text{Aut}(\mathcal{F}_k)$ автоморфизмов множеств $\mathcal{F}_k$, $k \in \mathbb{L}$, образуют главное расслоение над $\mathbb{L}$ со структурной группой $\text{Aut}(\mathcal{F})$ (напомним, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$)

$$\Pi: \mathbf{AF} = \bigcup_{k \in \mathbb{L}} \text{Aut}(\mathcal{F}_k) \rightarrow \mathbb{L}, \quad \mathbf{r}_k \mapsto \Pi(\mathbf{r}_k) = k,$$

поскольку равенства $T_i\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{k+i}$, $i, k \in \mathbb{L}$ (см. предложение 2), порождают изоморфизмы

$$T_i: \text{Aut}(\mathcal{F}_k) \simeq \text{Aut}(\mathcal{F}_{k+i}), \quad \mathbf{r}_k \mapsto T_i\mathbf{r}_k = T_i \circ \mathbf{r}_k \circ T_{-i},$$

так что определен изоморфизм расслоений над $\mathbb{L}$

$$\mathbf{AF} \simeq \mathbb{L} \times \text{Aut}(\mathcal{F}), \quad \mathbf{r}_k \mapsto (k, \rho), \quad \rho = T_{-k} \circ \mathbf{r}_k \circ T_k,$$

и свободное правое действие группы $\text{Aut}(\mathcal{F})$ на множестве $\mathbf{AF}$

$$\mathbf{AF} \times \text{Aut}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{AF}, \quad (\mathbf{r}_k, \rho) \mapsto \mathbf{r}_k \cdot \rho = \mathbf{r}_k \circ T_k \circ \rho \circ T_{-k}.$$

На группе (с поточечной групповой операцией)

$$\mathcal{M}(\Pi) = \{\mathbf{r} \in \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbf{AF}) \mid \Pi \circ \mathbf{r} = \text{id}_{\mathbb{L}}\} = \\ = \{\mathbf{r}: \mathbb{L} \rightarrow \mathbf{AF}, k \mapsto \mathbf{r}_k \in \text{Aut}(\mathcal{F}_k)\}$$

всех сечений расслоения $\Pi: \mathbf{AF} \rightarrow \mathbb{L}$ группа $\mathbb{L}$ действует по правилу

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}(\Pi)), \quad i \mapsto T_i: \mathcal{M}(\Pi) \rightarrow \mathcal{M}(\Pi), \\ \mathbf{r} \mapsto T_i\mathbf{r} = T_{-i} \circ \mathbf{r} \circ T_i,$$

так что здесь $k \mapsto (T_i \mathbf{r})_k = T_{-i} \mathbf{r}_{k+i} = T_{-i} \circ \mathbf{r}_{k+i} \circ T_i$ для всех $i, k \in \mathbb{L}$. Подгруппа всех инвариантных сечений есть

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_T(\Pi) &= \{ \mathbf{r} \in \mathcal{M}(\Pi) \mid T_i \mathbf{r} = \mathbf{r} \text{ для всех } i \in \mathbb{L} \} = \\ &= \{ \mathbf{r} \in \mathcal{M}(\Pi) \mid \mathbf{r}_{k+i} = T_i \circ \mathbf{r}_k \circ T_{-i} \text{ для всех } i, k \in \mathbb{L} \}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Имеет место изоморфизм групп*

$$\mathcal{M}_T(\Pi) \simeq \text{Aut}(\mathcal{F}), \quad \mathbf{r} \mapsto \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_0,$$

обратное отображение $\boldsymbol{\rho} \mapsto \mathbf{r}$ действует по правилу $\mathbf{r}_k = T_k \circ \boldsymbol{\rho} \circ T_{-k}$ для всех $k \in \mathbb{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться определениями и предыдущими выкладками. ■

Вернемся к группе $\text{SYM}(\pi_{\mathbf{F}})$. Пусть $R = (R_{\mathbf{F}}, R_{\mathbb{L}}) \in \text{Aut}_T(\pi_{\mathbf{F}})$, так что $\mathbb{L} \ni k \mapsto R_{\mathbb{L}}(k) \in \mathbb{L}$, $\mathbf{F} \ni (k, \mathbf{u}) \mapsto R_{\mathbf{F}}(k, \mathbf{u}) = (l, \mathbf{v}) \in \mathbf{F}$. Из условия $R_{\mathbb{L}} \circ \pi_{\mathbf{F}} = \pi_{\mathbf{F}} \circ R_{\mathbb{L}}$ следует, что $l = R_{\mathbb{L}}(k)$, а из условия $T_i \circ R_{\mathbb{L}} = R_{\mathbb{L}} \circ T_i$ для всех $i \in \mathbb{L}$ следует, что $R_{\mathbb{L}}(k) = T_m k$ для некоторого $m \in \mathbb{L}$, не зависящего от $k \in \mathbb{L}$. Итак, $R_{\mathbf{F}}(k, \mathbf{u}) = (T_m k, \mathbf{v}) = T_m(k, \mathbf{r}_k(\mathbf{u}))$, где $\mathbf{r}_k(\mathbf{u}) = T_{-m} \mathbf{v}(k, \mathbf{u}) \in \mathcal{F}_k$. Другими словами, $R = T_m \circ R^0$, где $T_m \in \mathcal{T}$, а $R^0 = (R_{\mathbf{F}}^0, R_{\mathbb{L}}^0) \in \text{Aut}_T^0(\pi_{\mathbf{F}})$, $R_{\mathbf{F}}^0(k, \mathbf{u}) = (k, \mathbf{r}_k(\mathbf{u}))$, где подгруппа

$$\text{Aut}_T^0(\pi_{\mathbf{F}}) = \{ R^0 = (R_{\mathbf{F}}^0, R_{\mathbb{L}}^0) \in \text{Aut}_T(\pi_{\mathbf{F}}) \mid R_{\mathbb{L}}^0 = \text{id}_{\mathbb{L}} \}.$$

В частности, справедливо представление $\text{Aut}_T(\pi_{\mathbf{F}}) = \mathcal{T} \times \text{Aut}_T^0(\pi_{\mathbf{F}})$, и, значит, $\text{SYM}(\pi_{\mathbf{F}}) = \text{Aut}_T(\pi_{\mathbf{F}})/\mathcal{T} = \text{Aut}_T^0(\pi_{\mathbf{F}})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Имеет место изоморфизм групп*

$$\text{Aut}_T^0(\pi_{\mathbf{F}}) \simeq \mathcal{M}_T(\Pi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $R^0 = (R_{\mathbf{F}}^0, \text{id}_{\mathbb{L}}) \in \text{Aut}_T^0(\pi_{\mathbf{F}})$, где $R_{\mathbf{F}}^0(k, \mathbf{u}) = (k, \mathbf{r}_k(\mathbf{u}))$, $\mathbf{r}_k(\mathbf{u}) \in \mathcal{F}_k$, для всех $k \in \mathbb{L}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{F}_k$. Легко проверяется, что для каждого $k \in \mathbb{L}$ правило $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{r}_k(\mathbf{u})$ определяет автоморфизм $\mathbf{r}_k \in \text{Aut}(\mathcal{F}_k)$, а затем правило $k \mapsto \mathbf{r}_k$ определяет сечение $\mathbf{r} \in \mathcal{M}(\Pi)$. Более того, в силу условия инвариантности $T_i \circ R_{\mathbf{F}}^0 = R_{\mathbf{F}}^0 \circ T_i$ для всех $i \in \mathbb{L}$ это сечение инвариантно, т. е. $\mathbf{r} \in \mathcal{M}_T(\Pi)$. Таким образом, определено отображение $\text{Aut}_T^0(\pi_{\mathbf{F}}) \rightarrow \mathcal{M}_T(\Pi)$, $R^0 \mapsto \mathbf{r}$. Пусть теперь $\mathbf{r} \in \mathcal{M}_T(\Pi)$. Для каждого $(k, \mathbf{u}) \in \mathbf{F}$ положим $R_{\mathbf{F}}^0(k, \mathbf{u}) = (k, \mathbf{r}_k(\mathbf{u}))$. Легко проверяется, что пара $R^0 = (R_{\mathbf{F}}^0, \text{id}_{\mathbb{L}})$ задает автоморфизм расслоения $\pi_{\mathbf{F}}: \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{L}$ и что этот автоморфизм инвариантный, т. е. $R^0 \in \text{Aut}_T^0(\pi_{\mathbf{F}})$. Таким образом, определено отображение $\mathcal{M}_T(\Pi) \rightarrow \text{Aut}_T^0(\pi_{\mathbf{F}})$, $\mathbf{r} \mapsto R^0$. По построению эти два отображения взаимно обратные, т. е. требуемый изоморфизм предъявлен. ■

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место изоморфизм групп*

$$\text{SYM}(\pi_{\mathbf{F}}) \simeq \text{Aut}(\mathcal{F}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться установленным выше равенством $\text{SYM}(\pi_{\mathbf{F}}) = \text{Aut}_T^0(\pi_{\mathbf{F}})$ и предложениями 6 и 5. ■

2.5. Анализ на инвариантных подмножествах. Пусть $\mathbf{F}$ – инвариантное подмножество пространства $\mathbf{J}$.

На алгебре $\text{Map}(\mathbf{F}; \mathbb{R})$ определено действие T группы $\mathbb{L}$ стандартным правилом

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\text{Map}(\mathbf{F}; \mathbb{R})), \quad i \mapsto T_i: \text{Map}(\mathbf{F}; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Map}(\mathbf{F}; \mathbb{R}), \\ f \mapsto T_i f = f \circ T_i,$$

так что $(T_i f)(k, \mathbf{u}) = f(T_i k, T_i \mathbf{u})$ для всех $(k, \mathbf{u}) \in \mathbf{F}$.

Для каждого сечения $\phi \in \mathcal{M}(\pi_{\mathbf{F}})$ определено отображение (*подстановка*)

$$|_{\phi}: \text{Map}(\mathbf{F}; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{L}), \quad f \mapsto f|_{\phi}, \quad f|_{\phi}(k) = f(k, \phi(k)), \quad k \in \mathbb{L}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Для любых $i \in \mathbb{L}$, $f \in \text{Map}(\mathbf{F}; \mathbb{R})$ и $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\pi)$ выполняется правило полного сдвига

$$T_i(f|_{\mathbf{j}\varphi}) = (T_i f)|_{\mathbf{j}\varphi}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в этом случае для каждого $k \in \mathbb{L}$ имеем

$$(T_i(f|_{\mathbf{j}\varphi}))(k) = (f|_{\mathbf{j}\varphi})(T_i k) = f(T_i k, (\mathbf{j}\varphi)(T_i k)) = f(T_i k, T_i((\mathbf{j}\varphi)(k))) = ((T_i f)|_{\mathbf{j}\varphi})(k),$$

поскольку в силу предложения 3 сечение $\mathbf{j}\varphi$ инвариантное, и, значит, $T_i \circ (\mathbf{j}\varphi) = (\mathbf{j}\varphi) \circ T_i$. ■

Пусть задана подалгебра $\mathcal{A}(\mathbf{F})$ алгебры $\text{Map}(\mathbf{F}; \mathbb{R})$ со следующими свойствами:

- а) $\mathcal{A}(\mathbb{L}) \subset \mathcal{A}(\mathbf{F})$, в частности $\mathcal{A}(\mathbf{F})$ имеет структуру $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модуля;
- б) алгебра $\mathcal{A}(\mathbf{F})$ инвариантна относительно сдвигов, $T_i \mathcal{A}(\mathbf{F}) = \mathcal{A}(\mathbf{F})$ для всех $i \in \mathbb{L}$, т. е. действие $T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\text{Map}(\mathbf{F}; \mathbb{R}))$ имеет сужение $T|_{\mathcal{A}(\mathbf{F})}: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$.

В алгебре $\mathcal{A}(\mathbf{F})$ выделим подалгебру

$$\mathcal{A}_T(\mathbf{F}) = \{f \in \mathcal{A}(\mathbf{F}) \mid T_i f = f \text{ для всех } i \in \mathbb{L}\}$$

всех инвариантных функций (класса $\mathcal{A}(\mathbf{F})$).

Определена алгебра Ли

$$\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F})) = \{X \in \mathfrak{gl}(\mathcal{A}(\mathbf{F})) \mid X(f \cdot g) = (Xf) \cdot g + f \cdot (Xg), f, g \in \mathcal{A}(\mathbf{F})\}$$

всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}(\mathbf{F})$. На множестве $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$ определена структура $\mathcal{A}(\mathbf{F})$ -модуля,

$$\mathcal{A}(\mathbf{F}) \times \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F})) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F})), \quad (f, X) \mapsto f \cdot X,$$

согласованная со структурой алгебры Ли, где $(f \cdot X)g = f \cdot (Xg)$ для всех $f, g \in \mathcal{A}(\mathbf{F})$, $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Сужение $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F}))|_{\mathcal{A}(\mathbb{L})} = 0$, т. е. $X\varphi = 0$ для всех $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$ и $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{L})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $l \in \mathbb{L}$ определена функция $\delta_l \in \mathcal{A}(\mathbb{L})$ правилом $\delta_l(k) = \delta_l^k$ (здесь δ_l^k – символ Кронекера), $k \in \mathbb{L}$. Пусть $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$. В силу правила Лейбница, $X\delta_l = X(\delta_l \cdot \delta_l) = 2\delta_l \cdot X\delta_l$, так что $X\delta_l = c_l \cdot \delta_l$, где функция $c_l \in \text{Map}(\mathcal{F}_l; \mathbb{R})$, причем $c_l \cdot \delta_l = 2c_l \cdot \delta_l \cdot \delta_l = 2c_l \cdot \delta_l$, т. е. $c_l = 0$, и, следовательно, $X\delta_l = 0$

для всех $l \in \mathbb{L}$. Пусть $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{L})$, тогда справедливо представление $\varphi = \sum_{l \in \mathbb{L}} \varphi(l) \cdot \delta_l$, так что

$$X\varphi = X\left(\sum_{l \in \mathbb{L}} \varphi(l) \cdot \delta_l\right) = \sum_{l \in \mathbb{L}} \varphi(l) \cdot X\delta_l = 0$$

(последний переход использует непрерывность дифференцирования X , предполагаемую по умолчанию, см. вводные замечания). ■

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеется естественное вложение алгебр Ли*

$$\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F})) \subset \mathfrak{gl}_{\mathcal{A}(\mathbb{L})}(\mathcal{A}(\mathbf{F})).$$

На алгебре Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$ определено действие группы $\mathbb{L}$ правилом

$$\begin{aligned} T: \mathbb{L} &\rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F}))), & i &\mapsto T_i: \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F})) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F})), \\ & & X &\mapsto T_i X = T_i \circ X \circ T_{-i}. \end{aligned}$$

В алгебре Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$ выделим подалгебру

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_T(\mathcal{A}(\mathbf{F})) &= \{X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F})) \mid T_i X = X \text{ для всех } i \in \mathbb{L}\} = \\ &= \{X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F})) \mid T_i \circ X = X \circ T_i \text{ для всех } i \in \mathbb{L}\} \end{aligned}$$

всех *инвариантных* дифференцирований алгебры $\mathcal{A}(\mathbf{F})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Определено сужение*

$$\big|_{\mathcal{A}_T(\mathbf{F})}: \mathfrak{D}_T(\mathcal{A}(\mathbf{F})) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{A}_T(\mathbf{F})), \quad X \mapsto X\big|_{\mathcal{A}_T(\mathbf{F})},$$

где $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_T(\mathbf{F}))$ – алгебра Ли всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}_T(\mathbf{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, здесь $T_i(Xf) = X(T_i f) = Xf$ для всех $i \in \mathbb{L}$, $X \in \mathfrak{D}_T(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$ и $f \in \mathcal{A}_T(\mathbf{F})$, т. е. $X\big|_{\mathcal{A}_T(\mathbf{F})}: \mathcal{A}_T(\mathbf{F}) \rightarrow \mathcal{A}_T(\mathbf{F})$, что и требовалось. ■

Разностный комплекс решетки $\mathbb{L}$ расширяется до аналогичного комплекса инвариантного подмножества $\mathbf{F}$ следующим образом.

Определен $\mathcal{A}(\mathbf{F})$ -модуль

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F})) = \mathcal{A}(\mathbf{F}) \otimes_{\mathcal{A}(\mathbb{L})} \mathcal{D}(\mathbb{L}) \subset \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$$

с базисом $\{\Delta_1, \dots, \Delta_D\} \subset \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$. Дуальный модуль

$$\mathcal{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{F})) = \text{Hom}_{\mathcal{A}(\mathbf{F})}(\mathcal{D}(\mathbf{F}); \mathcal{A}(\mathbf{F})) = \mathcal{A}(\mathbf{F}) \otimes_{\mathcal{A}(\mathbb{L})} \mathcal{D}^*(\mathbb{L})$$

обладает дуальным базисом $\{\Delta^1, \dots, \Delta^D\}$. Группа $\mathbb{L}$ действует на линейных пространствах по-прежнему покомпонентно, причем для всех $i \in \mathbb{L}$, $\varrho \in \mathcal{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$, $\zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$ справедливо равенство $T_i \langle \varrho, \zeta \rangle = \langle T_i \varrho, T_i \zeta \rangle$.

Определена градуированная внешняя алгебра

$$\Omega(\mathcal{A}(\mathbf{F})) = \bigoplus_{0 \leq q \leq D} \Omega^q(\mathcal{A}(\mathbf{F})),$$

где $\mathcal{A}(\mathbf{F})$ -модули

$$\Omega^q(\mathcal{A}(\mathbf{F})) = \text{Hom}_{\mathcal{A}(\mathbf{F})} \left(\bigwedge_{\mathcal{A}(\mathbf{F})}^q \mathcal{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F})); \mathcal{A}(\mathbf{F}) \right) = \mathcal{A}(\mathbf{F}) \otimes_{\mathcal{A}(\mathbb{L})} \Omega^q(\mathbb{L}).$$

Действие группы $\mathbb{L}$ на градуированной внешней алгебре $\Omega(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$ по-прежнему покомпонентное. В частности, по-прежнему определены элементарные разностные операторы $\Delta_\mu \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\Omega(\mathcal{A}(\mathbf{F})))$, $\mu \in \mathbf{D}$.

По-прежнему разностный дифференциал $d \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\Omega(\mathcal{A}(\mathbf{F})))$ действует по правилу $\varrho \mapsto d\varrho = \sum_{\mu \in \mathbf{D}} \Delta^\mu \wedge \Delta_\mu \varrho$ для всех $\varrho \in \Omega(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$, причем $d \circ d = 0$ и $d^q = d|_{\Omega^q(\mathcal{A}(\mathbf{F}))} : \Omega^q(\mathcal{A}(\mathbf{F})) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$ для всех $0 \leq q \leq D$.

Итак, определен комплекс линейных пространств $\{\Omega^q(\mathcal{A}(\mathbf{F})); d^q\}$ – *разностный комплекс инвариантного подмножества $\mathbf{F}$* (в классе $\mathcal{A}(\mathbf{F})$).

Для каждого $\phi \in \mathcal{M}(\pi_{\mathbf{F}})$ подстановка $|_\phi : \mathcal{A}(\mathbf{F}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{L})$ индуцирует покомпонентную подстановку $|_\phi : \Omega(\mathcal{A}(\mathbf{F})) \rightarrow \Omega(\mathbb{L})$, в силу правила полного сдвига коммутирующую с разностным дифференциалом, т. е. определена следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \Omega(\mathcal{A}(\mathbf{F})) & \xrightarrow{d} & \Omega(\mathcal{A}(\mathbf{F})) \\ \downarrow |_\phi & & \downarrow |_\phi \\ \Omega(\mathbb{L}) & \xrightarrow{d} & \Omega(\mathbb{L}) \end{array}$$

2.6. Факторизующие координаты. Пусть, как и в п. 2.5, $\mathbf{F}$ – инвариантное подмножество, $\mathcal{A}(\mathbf{F})$ – алгебра функций на $\mathbf{F}$ с указанными выше свойствами. Согласно предложению 2 имеет место изоморфизм расслоений

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{F} & \xrightarrow{\varkappa} & \tilde{\mathbf{F}} \longrightarrow 0, \\ & & \searrow \pi_{\mathbf{F}} & & \swarrow \tilde{\pi}_{\tilde{\mathbf{F}}} \\ & & & & \mathbb{L} \end{array} \quad (k, \mathbf{u}) \mapsto \varkappa(k, \mathbf{u}) = (k, \tilde{\mathbf{u}}),$$

где $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbb{L} \times \mathcal{F}$, $\tilde{\mathbf{u}} = T_{-k}\mathbf{u}$, $\pi_{\mathbf{F}}(k, \mathbf{u}) = k = \tilde{\pi}_{\tilde{\mathbf{F}}}(k, \tilde{\mathbf{u}})$.

Будем рассматривать этот изоморфизм как глобальную карту, переменные $(k, \mathbf{u})$ – как точки пространства $\mathbf{F}$, а переменные $(k, \tilde{\mathbf{u}})$ – как их координаты на $\tilde{\mathbf{F}}$. При такой интерпретации все конструкции п. 2.5 стандартным образом приобретают координатное представление.

Прежде всего отметим, что действие $T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{F})$ переходит в действие $\tilde{T} = \varkappa \circ T \circ \varkappa^{-1}: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\tilde{\mathbf{F}})$, где, как легко проверить,

$$\tilde{T}_i(k, \tilde{\mathbf{u}}) = (T_i k, \tilde{\mathbf{u}}) = (k + i, \tilde{\mathbf{u}}) \text{ для всех } i, k \in \mathbb{L}, \quad \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{F}.$$

Таким образом, в координатном представлении сдвиги действуют только на целочисленные координаты. В этом и состоит его главное преимущество.

Изоморфизм $\varkappa: \mathbf{F} \simeq \tilde{\mathbf{F}}$ индуцирует изоморфизм

$$\varkappa^*: \text{Map}(\tilde{\mathbf{F}}; \mathbb{R}) \simeq \text{Map}(\mathbf{F}; \mathbb{R}), \quad \tilde{f} \mapsto f = \varkappa^* \tilde{f} = \tilde{f} \circ \varkappa,$$

так что $f(k, \mathbf{u}) = \tilde{f}(k, \tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{f}(k, T_{-k}\mathbf{u})$ для всех $(k, \mathbf{u}) \in \mathbf{F}$.

На алгебре $\text{Map}(\tilde{\mathbf{F}}; \mathbb{R})$ группа $\mathbb{L}$ действует по индуцированному правилу

$$\begin{aligned} \tilde{T}: \mathbb{L} &\rightarrow \text{Aut}(\text{Map}(\tilde{\mathbf{F}}; \mathbb{R})), & i &\mapsto \tilde{T}_i: \text{Map}(\tilde{\mathbf{F}}; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Map}(\tilde{\mathbf{F}}; \mathbb{R}), \\ & & \tilde{f} &\mapsto \tilde{T}_i \tilde{f} = \tilde{f} \circ \tilde{T}_i, \end{aligned}$$

так что $(\tilde{T}_i \tilde{f})(k, \tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{f}(T_i k, \tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{f}(k + i, \tilde{\mathbf{u}})$ для всех $(k, \tilde{\mathbf{u}}) \in \tilde{\mathbf{F}}$.

Положим $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}) = (\varkappa^*)^{-1} \mathcal{A}(\mathbf{F})$. Очевидно, $\mathcal{A}(\mathbb{L}) = (\varkappa^*)^{-1} \mathcal{A}(\mathbb{L}) \subset \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})$, и на алгебре $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})$ определено действие $\tilde{T}$ группы $\mathbb{L}$. По построению $\varkappa^*: \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}) \simeq \mathcal{A}(\mathbf{F})$.

Алгебра инвариантных функций $\mathcal{A}_T(\mathbf{F})$ имеет образ

$$\mathcal{A}_{\tilde{T}}(\tilde{\mathbf{F}}) = (\varkappa^*)^{-1} \mathcal{A}_T(\mathbf{F}) = \{\tilde{f} \in \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}) \mid \tilde{T}_i \tilde{f} = \tilde{f}, i \in \mathbb{L}\} = \mathcal{A}(\mathcal{F}),$$

т. е. состоит из всех функций $\tilde{f} \in \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})$, не зависящих от целочисленных переменных $k \in \mathbb{L}$, и отождествляется с индуцированной алгеброй $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ функций на типичном слое $\mathcal{F}$.

Изоморфизм $\varkappa^*: \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}) \simeq \mathcal{A}(\mathbf{F})$ индуцирует изоморфизм алгебр Ли

$$\varkappa_*: \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F})) \simeq \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})), \quad X \mapsto \tilde{X} = \varkappa_* X = (\varkappa^*)^{-1} \circ X \circ \varkappa^*.$$

На алгебре Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}))$ определено действие группы $\mathbb{L}$ правилом

$$\begin{aligned} \tilde{T}: \mathbb{L} &\rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}))), & i &\mapsto \tilde{T}_i: \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})), \\ & & \tilde{X} &\mapsto \tilde{T}_i \tilde{X} = \tilde{T}_i \circ \tilde{X} \circ \tilde{T}_{-i}. \end{aligned}$$

Образ алгебры Ли $\mathfrak{D}_T(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$ есть

$$\mathfrak{D}_{\tilde{T}}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})) = \varkappa_* \mathfrak{D}_T(\mathcal{A}(\mathbf{F})) = \{\tilde{X} \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})) \mid \tilde{T}_i \tilde{X} = \tilde{X} \text{ для всех } i \in \mathbb{L}\}$$

– алгебра Ли всех инвариантных дифференцирований алгебры $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})$.

В частности, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Имеет место изоморфизм*

$$\varkappa_*: \mathfrak{D}_T(\mathcal{A}(\mathbf{F})) \simeq \mathfrak{D}_{\tilde{T}}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})), \quad X \mapsto \tilde{X} = \varkappa_* X = (\varkappa^*)^{-1} \circ X \circ \varkappa^*.$$

Аналогичным образом, изоморфизм $\varkappa^*: \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}) \simeq \mathcal{A}(\mathbf{F})$ индуцирует изоморфизмы $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модулей

$$\begin{aligned} \varkappa^*: \mathcal{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})) &\simeq \mathcal{D}(\mathcal{A}(\mathbf{F})), & \tilde{\zeta} &\mapsto \zeta = \varkappa^* \tilde{\zeta} = (\varkappa^*) \circ \tilde{\zeta} \circ (\varkappa^*)^{-1}, \\ \varkappa^*: \mathcal{D}^*(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})) &\simeq \mathcal{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{F})), & \tilde{\varrho} &\mapsto \varrho = \varkappa^* \tilde{\varrho} = \varkappa^* \circ \tilde{\varrho} \circ (\varkappa^*)^{-1}, \end{aligned}$$

причем $\varkappa^* \langle \tilde{\varrho}, \tilde{\zeta} \rangle = \langle \varkappa^* \tilde{\varrho}, \varkappa^* \tilde{\zeta} \rangle$ для всех $\tilde{\varrho} \in \mathcal{D}^*(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}))$, $\tilde{\zeta} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}))$. Группа $\mathbb{L}$ действует на линейных пространствах $\mathcal{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}))$ и $\mathcal{D}^*(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}))$ покомпонентно, и $\tilde{T}_i \langle \tilde{\varrho}, \tilde{\zeta} \rangle = \langle \tilde{T}_i \tilde{\varrho}, \tilde{T}_i \tilde{\zeta} \rangle$ для всех $i \in \mathbb{L}$, $\tilde{\varrho} \in \mathcal{D}^*(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}))$ и $\tilde{\zeta} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}))$.

В свою очередь, определен изоморфизм комплексов линейных пространств

$$\varkappa^*: \{\Omega^q(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})); \tilde{d}^q\} \simeq \{\Omega^q(\mathcal{A}(\mathbf{F})); d^q\},$$

дифференциал $\tilde{d} \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\Omega(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})))$ действует по тому же правилу, что и в правой части: $\tilde{\varrho} \mapsto \tilde{d}\tilde{\varrho} = \sum_{\mu \in \mathbf{D}} \tilde{\Delta}^\mu \wedge \tilde{\Delta}_\mu \tilde{\varrho}$ для всех $\tilde{\varrho} \in \Omega(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}))$, где $\tilde{\Delta}_\mu = \tilde{T}_{e_\mu} - \tilde{T}_0$, так что $\langle \tilde{\Delta}^\mu, \tilde{\Delta}_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu$.

2.7. Выбор класса функций и вычисления. Выше мы считали, что на инвариантном подмножестве $\mathbf{F} \subset \mathbf{J} = \mathbb{L} \times \mathbf{V}$ задана алгебра $\mathcal{A}(\mathbf{F})$, содержащая подалгебру $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ и инвариантная относительно сдвигов. Алгебра $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})$ в этом случае возникает как прообраз алгебры $\mathcal{A}(\mathbf{F})$ при изоморфизме $\varkappa^*: \text{Map}(\tilde{\mathbf{F}}; \mathbb{R}) \simeq \text{Map}(\mathbf{F}; \mathbb{R})$. Однако, как это принято в дифференциальной геометрии, более естественно задавать алгебру функций в координатном представлении, т. е. на карте $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbb{L} \times \mathcal{F}$. Именно так мы теперь и поступим. Выберем подходящую унитарную алгебру функций $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ на типичном слое $\mathcal{F}$ и положим $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}) = \mathcal{A}(\mathbb{L}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Эта алгебра инвариантна относительно сдвигов и содержит алгебру $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ в качестве подалгебры. Ее образ $\mathcal{A}(\mathbf{F}) = \varkappa^* \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})$ также обладает всеми требуемыми свойствами. Такой выбор замечателен тем, что он позволяет в явном виде описать алгебру Ли $\mathfrak{D}_{\tilde{T}}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}))$ инвариантных дифференцирований алгебры $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})$ и вычислить когомологии комплекса $\{\Omega^q(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})); \tilde{d}^q\}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть алгебра $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}) = \mathcal{A}(\mathbb{L}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(\mathcal{F})$, где $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ – унитарная алгебра функций на типичном слое $\mathcal{F}$. Имеет место изоморфизм

$$|_{\mathcal{A}(\mathcal{F})}: \mathfrak{D}_{\tilde{T}}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})) \simeq \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathcal{F})), \quad \tilde{X} \mapsto \zeta = \tilde{X}|_{\mathcal{A}(\mathcal{F})}, \quad \zeta \mapsto \tilde{X} = \text{id}_{\mathcal{A}(\mathbb{L})} \otimes \zeta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сужение $\tilde{X} \mapsto \zeta = \tilde{X}|_{\mathcal{A}(\mathcal{F})}$ определено в силу предложения 9, причем это сужение инъективное в силу выбора $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}) = \mathcal{A}(\mathbb{L}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Его сюръективность следует из равенства $(\text{id}_{\mathcal{A}(\mathbb{L})} \otimes \zeta)|_{\mathcal{A}(\mathcal{F})} = \zeta$ для всех $\zeta \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))$. ■

СЛЕДСТВИЕ 3. В условиях теоремы 3 имеет место изоморфизм

$$I = |_{\mathcal{A}(\mathcal{F})} \circ \varkappa_*: \mathfrak{D}_T(\mathcal{A}(\mathbf{F})) \simeq \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathcal{F})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться предложением 10. ■

ТЕОРЕМА 4. Пусть алгебра $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}) = \mathcal{A}(\mathbb{L}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(\mathcal{F})$, где $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ – унитарная алгебра функций на типичном слое $\mathcal{F}$. Пополненный комплекс

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^0(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})) \xrightarrow{\tilde{d}^0} \Omega^1(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})) \xrightarrow{\tilde{d}^1} \dots \xrightarrow{\tilde{d}^{D-1}} \Omega^D(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})) \longrightarrow 0$$

точный, т. е. все его пространства когомологий тривиальные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\Omega^q(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})) = \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}) \otimes_{\mathcal{A}(\mathbb{L})} \Omega^q(\mathbb{L})$. В нашем случае алгебра $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}) = \mathcal{A}(\mathbb{L}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(\mathcal{F})$, что приводит к представлению $\Omega^q(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})) = \mathcal{A}(\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^q(\mathbb{L})$. В свою очередь, дифференциал здесь имеет вид $\tilde{d}^q = \text{id}_{\mathcal{A}(\mathcal{F})} \otimes_{\mathbb{R}} d^q$, где $d^q: \Omega^q(\mathbb{L}) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathbb{L})$, поскольку в координатном представлении $\tilde{T}_i|_{\mathcal{A}(\mathcal{F})} = \text{id}_{\mathcal{A}(\mathcal{F})}$ для всех $i \in \mathbb{L}$. Таким образом, изучаемый комплекс в данной ситуации факторизуется, т. е. имеет место представление

$$\{\Omega^q(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})); \tilde{d}^q\} = \mathcal{A}(\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{R}} \{\Omega^q(\mathbb{L}); d^q\}.$$

Для завершения доказательства следует воспользоваться теоремой 1. ■

СЛЕДСТВИЕ 4. В условиях теоремы линейные пространства когомологий

$$H^q(\mathcal{A}(\mathbf{F})) = \frac{\text{Ker } d^q}{\text{Im } d^{q-1}} = \begin{cases} \mathcal{A}(\mathcal{F}), & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

3. АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

3.1. Системы разностных уравнений. Будем рассматривать переменные $k \in \mathbb{L}$ как *независимые*, переменные $u \in V$ – как *зависимые*, а переменные $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ – как *разностные*.

Пусть $\mathcal{A}(\mathbf{J})$ – алгебра функций на пространстве $\mathbf{J}$, содержащая подалгебру $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ и инвариантная относительно сдвигов. Система разностных уравнений на решетке $\mathbb{L}$ (класса $\mathcal{A}(\mathbf{J})$) есть система вида

$$F^\sigma(k, \mathbf{u}) = 0, \quad \sigma \in S, \quad (k, \mathbf{u}) \in \mathbf{J}$$

(коротко $F = 0$), где семейство функций $F = (F^\sigma) \in \mathcal{A}(\mathbf{J})^S$, S – некоторое множество индексов. По определению сечение $\varphi \in \mathcal{M}(\pi)$ есть решение системы $F = 0$, если подстановка $F|_{\mathbf{j}\varphi} = 0$, подробнее

$$F^\sigma(k, \mathbf{j}\varphi(k)) = 0 \quad \text{для всех } \sigma \in S, \quad k \in \mathbb{L}.$$

Множество всех решений системы $F = 0$ есть

$$\text{Sol}\{F = 0\} = \{\varphi \in \mathcal{M}(\pi) \mid F|_{\mathbf{j}\varphi} = 0\}.$$

По построению система $F = 0$ задает подмножество

$$\{(k, \mathbf{u}) \in \mathbf{J} \mid F^\sigma(k, \mathbf{u}) = 0 \text{ для всех } \sigma \in S\} \subset \mathbf{J},$$

которое не является инвариантным и не пригодно для дальнейшего анализа, однако оно порождает инвариантное подмножество

$$\mathbf{F} = \{(k, \mathbf{u}) \in \mathbf{J} \mid (T_i F^\sigma)(k, \mathbf{u}) = 0 \text{ для всех } i \in \mathbb{L}, \sigma \in S\} \subset \mathbf{J}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Сечение $\varphi \in \mathcal{M}(\pi)$ есть решение разностной системы $F = 0$ тогда и только тогда, когда оно допустимое для подрасслоения $\pi_{\mathbf{F}}: \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{L}$, т. е.

$$\text{Sol}\{F = 0\} = \{\varphi \in \mathcal{M}(\pi) \mid \text{graph } \mathbf{j}\varphi \subset \mathbf{F}\} = \mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\pi).$$

В частности, системы $\{F^\sigma = 0 \mid \sigma \in S\}$ и $\{T_i F^\sigma = 0 \mid i \in \mathbb{L}, \sigma \in S\}$ равносильны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться правилом полного сдвига, согласно которому $(T_i F^\sigma)|_{\mathbf{j}\varphi} = T_i(F^\sigma|_{\mathbf{j}\varphi})$ для всех $i \in \mathbb{L}, \sigma \in S$. ■

Инвариантное подмножество $\mathbf{F}$ является адекватным геометрическим образом разностной системы $F = 0$, пригодным для алгебро-геометрического анализа свойств этой системы.

ТЕОРЕМА 5. Имеет место канонический изоморфизм

$$\text{Sol}\{F = 0\} \cong \mathcal{F}, \quad \varphi \mapsto \mathbf{u}, \quad u_l = \varphi(l) \quad \text{для всех } l \in \mathbb{L},$$

позволяющий отождествлять множество $\text{Sol}\{F = 0\}$ и типичный слой

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V} \mid F^\sigma(i, T_i \mathbf{u}) = 0 \text{ для всех } \sigma \in S, i \in \mathbb{L}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться предложениями 11 и 3. ■

3.2. Симметрии и законы сохранения. Автоморфизмы множества $\text{Sol}\{F = 0\}$ всех решений данной системы $F = 0$ называются *глобальными симметриями* этой системы. Множество всех таких симметрий образует группу $\text{SYM}\{F = 0\} = \text{Aut}(\text{Sol}\{F = 0\})$.

ТЕОРЕМА 6. *Имеет место представление*

$$\text{SYM}\{F = 0\} = \text{Aut}(\mathcal{F}) \simeq \text{SYM}(\pi_{\mathbf{F}}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться теоремами 5 и 2. ■

Дальнейший анализ требует спецификации класса функций на множестве $\mathbf{F}$. Для этого, как было предложено в п. 2.7, выберем унитарную алгебру функций $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, согласованную с исходной алгеброй $\mathcal{A}(\mathbf{J})$, и положим $\mathcal{A}(\mathbf{F}) = \varkappa^* \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}})$, где $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{F}}) = \mathcal{A}(\mathbb{L}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

Теорема 6 и аналогия с алгебро-геометрическим анализом уравнений в частных производных позволяют считать дифференцирования алгебры $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ *инфинитезимальными симметриями* системы $F = 0$. Множество всех таких симметрий образует алгебру Ли $\text{sym } F = 0$.

ТЕОРЕМА 7. *Имеет место представление*

$$\text{sym}\{F = 0\} = \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathcal{F})) \simeq \mathfrak{D}_T(\mathcal{A}(\mathbf{F})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться следствием 3. ■

Снова по аналогии с уравнениями в частных производных считаем когомологии разностного комплекса $\{\Omega^q(\mathcal{A}(\mathbf{F})); d^q\}$ *законами сохранения* разностной системы $F = 0$. Обозначим через $\text{CL}^q\{F = 0\} = H^q(\mathcal{A}(\mathbf{F}))$ линейное пространство всех законов сохранения q -го порядка. Согласно следствию 4 справедлива

ТЕОРЕМА 8. *Имеет место представление*

$$\text{CL}^q\{F = 0\} = \begin{cases} \mathcal{A}(\mathcal{F}), & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, в данной постановке нетривиальные законы сохранения имеются лишь при $q = 0$. В этом случае они называются *интегралами* системы $F = 0$ и имеют описание

$$\begin{aligned} \text{CL}^0\{F = 0\} &= \{f(k, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}(\mathbf{F}) \mid f|_{\mathbf{j}\varphi}(k) = \text{const} \quad \text{для всех } \varphi \in \text{Sol}\{F = 0\}\} = \\ &= \{f(k, \mathbf{u}) = g(T_{-k}\mathbf{u}) \in \mathcal{A}_T(\mathbf{F}) \mid g(\mathbf{u}) \in \mathcal{A}(\mathcal{F})\}. \end{aligned}$$

Элементарные интегралы системы $F = 0$ суть функции $f_l \in \mathcal{A}_T(\mathbf{F})$, $l \in \mathbb{L}$, где $f_l(k, \mathbf{u}) = g_l(T_{-k}\mathbf{u})$, $(k, \mathbf{u}) \in \mathbf{F}$, $g_l(\tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{u}_l$, $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_l) \in \mathcal{F}$ (коротко $f_l(k, \mathbf{u}) = u_{l-k}$), так что

$$f_l|_{\mathbf{j}\varphi}(k) = f_l(k, \mathbf{j}\varphi(k)) = \varphi(l) \quad \text{для всех } \varphi \in \text{Sol}\{F = 0\}, \quad k \in \mathbb{L}.$$

В стандартной ситуации элементарные интегралы порождают алгебру $\text{CL}^0\{F = 0\}$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Очевидно, успех предложенной схемы алгебро-геометрического анализа данной разностной системы $F = 0$ зависит от возможности конструктивного описания типичного слоя $\mathcal{F}$ и удачного выбора алгебры $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. Идеальный вариант – задание на слое $\mathcal{F}$ структуры гладкого многообразия (как правило, бесконечномерного) и выбор в качестве $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ алгебры всех гладких функций на $\mathcal{F}$ *локально-конечного порядка* (т. е. зависящих от конечного числа локальных координат). Можно привести простые модельные примеры, когда это практически осуществимо, но для большинства возникающих в приложениях разностных систем реализация такой идеальной ситуации достаточно сложна или невозможна. Здесь следует также отметить, что согласно теореме 5 конструктивное описание типичного слоя $\mathcal{F}$ технически совпадает с описанием множества всех решений системы $F = 0$. В общем случае предлагается следующая конструкция.

Для каждого $p \in \mathbb{Z}_+$ положим $\mathbf{V}_p = \{\mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in V, |i| \leq p\}$ и обозначим через $\mathcal{A}(\mathbf{V}_p) = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{V}_p)$ алгебру всех гладких функций на евклидовом пространстве $\mathbf{V}_p$. Индуктивный предел $\mathcal{A}(\mathbf{V}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{A}(\mathbf{V}_p)$ есть алгебра всех гладких функций *конечного порядка* на пространстве $\mathbf{V}$, где порядок $p = p(f)$ функции $f = f(\mathbf{u}) \in \mathcal{A}(\mathbf{J})$ определяется условием $f \in \mathcal{A}(\mathbf{V}_p) \setminus \mathcal{A}(\mathbf{V}_{p-1})$. Группа $\mathbb{L}$ действует на алгебре $\mathcal{A}(\mathbf{V})$ стандартным образом:

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A}(\mathbf{V})), \quad i \mapsto T_i: \mathcal{A}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{V}), \quad f \mapsto T_i f = f \circ T_i.$$

Тензорное произведение $\mathcal{A}(\mathbf{J}) = \mathcal{A}(\mathbb{L}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(\mathbf{V})$ есть алгебра всех гладких функций *локально-конечного порядка* на пространстве $\mathbf{J} = \mathbb{L} \times \mathbf{V}$, где порядок функции $f = f(k, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}(\mathbf{J})$ в точке $k \in \mathbb{L}$ определяется как порядок функции $g = g(\mathbf{u}) = f(k, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}(\mathbf{V})$. Эта алгебра $\mathcal{A}(\mathbf{J})$ есть наиболее общая и естественная алгебра функций на $\mathbf{J}$, пригодная для алгебро-геометрического анализа систем разностных уравнений на решетке $\mathbb{L}$, и мы считаем, что изучаемая система имеет вид (см. начало раздела 3)

$$F^\sigma(k, \mathbf{u}) = 0, \quad \sigma \in S, \quad (k, \mathbf{u}) \in \mathbf{J}, \quad F^\sigma \in \mathcal{A}(\mathbf{J}).$$

Типичный слой $\mathcal{F} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V} \mid F^\sigma(i, T_i \mathbf{u}) = 0, \sigma \in S, i \in \mathbb{L}\}$ (см. теорему 5) порождает идеал

$$\mathcal{I}\{F = 0\} = \{f \in \mathcal{A}(\mathbf{V}) \mid f|_{\mathcal{F}} = 0\}$$

алгебры $\mathcal{A}(\mathbf{V})$, и мы принимаем в качестве алгебры функций на множестве $\mathcal{F}$ фактор-алгебру $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}(\mathbf{V})/\mathcal{I}\{F = 0\}$. Отметим, что подобные фактор-алгебры довольно часто применяются в практическом алгебро-геометрическом анализе уравнений в частных производных (вычисление симметрий, законов сохранения, преобразований Беклунда и т. д.), только этот факт явно не упоминается. Более того, если на множестве $\mathcal{F}$ имеется структура гладкого многообразия, согласованная с алгеброй $\mathcal{A}(\mathbf{J})$, то предлагаемая фактор-алгебра по существу совпадает с алгеброй всех гладких функций локально конечного порядка на многообразии $\mathcal{F}$. Дальнейшие построения следуют плану, изложенному в п. 3.2, и принципиальных трудностей не вызывают.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00178) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-7675.2010.1).

Список литературы

- [1] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [2] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [3] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.
- [4] А. М. Виноградов, И. С. Красильщик, В. В. Лычагин, *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1986.
- [5] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [6] V. V. Zharinov, *Lecture Notes on Geometrical Aspects of Partial Differential Equations*, Ser. Sov. East Eur. Math., **9**, World Sci., Singapore, 1992.
- [7] А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (ред.), *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, Факториал, М., 1997.
- [8] B. Kupershmidt, *Discrete Lax equations and differential-difference calculus*, Astérisque, **123**, SMF, Paris, 1985.
- [9] Ü. Göktaş, W. Hereman, *Physica D*, **123**:1–4 (1998), 425–436, arXiv: solv-int/9801023.
- [10] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *ТМФ*, **125**:3 (2000), 355–424.
- [11] E. L. Mansfield, P. E. Hydon, “On a variational complex for difference equations”, *The Geometrical Study of Differential equations*, Contemp. Math., **285**, eds. J. A. Leslie, T. P. Robart, AMS, Providence, RI, 2002, 121–129.
- [12] M. S. Hickman, W. A. Hereman, *Proc. Roy. Soc. A*, **459**:2039 (2003), 2705–2729.
- [13] P. E. Hydon, E. L. Mansfield, *Found. Comput. Math.*, **4**:2 (2004), 187–217.
- [14] W. Hereman, M. Colagrosso, R. Sayers, A. Ringler, B. Deconinck, M. Nivala, M. Hickman, “Continuous and discrete homotopy operators and the computation of conservation laws”, *Differential Equations With Symbolic Computation*, Trends Math., eds. D. Wang, Z. Zheng, Basel, Birkhäuser, 2005, 255–290.
- [15] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **157**:3 (2008), 391–405.
- [16] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **165**:2 (2010), 195–216.
- [17] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **144**:3 (2005), 435–452.

Поступила в редакцию 3.02.2011