Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Зеленов, p -Адический квантовый дифференциал,
ТМФ, 2011, том 168, номер 2, 212–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6675>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:39:43

© 2011 г.

Е. И. Зеленов*

p -АДИЧЕСКИЙ КВАНТОВЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Предлагается конструкция модуля Фредгольма на пространстве $L_2(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p))$.
Изучены свойства соответствующего квантового дифференциала Конна.

Ключевые слова: p -адический анализ, квантование Конна, квантовый дифференциал.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была предложена конструкция модуля Фредгольма, естественным образом связанного с действием локально-компактной группы на дереве Брюа–Титса. Авторы предложили конструкцию в рамках операторной K -теории, основным результатом работы явилось доказательство K -аменабельности широкого класса групп, действующих на деревьях, в частности группы $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.

В настоящей работе предлагается другая конструкция модуля Фредгольма, также естественным образом связанного с деревом Брюа–Титса и действием группы $PSL_2(\mathbb{Q}_p)$ на этом дереве. Мы работаем в рамках квантового исчисления, предложенного Конном [2]. Основная цель – построение квантового дифференциала и изучение его свойств.

2. ОПЕРАТОР СИММЕТРИИ

Через Δ обозначим бесконечное дерево, из каждой вершины которого исходит $p+1$ ребро (дерево Брюа–Титса), Δ_0 – множество вершин дерева Δ . Множество Δ_0 снабдим дискретной топологией и дискретной мерой (мера каждой точки равна 1). Пусть D – естественная метрика на множестве вершин дерева Δ . Введем на Δ_0 отношение эквивалентности: будем говорить, что две вершины эквивалентны, если расстояние между ними четно. Таким образом, все множество вершин представляется в виде несвязного объединения двух бесконечных подмножеств (классов эквивалентности), которые обозначим Δ^+ и Δ^- : $\Delta_0 = \Delta^+ \cup \Delta^-$.

Группа $G = PSL_2(\mathbb{Q}_p)$ действует на множестве вершин Δ_0 , $g \in G$, $u \in \Delta_0$, $u \rightarrow gu$, множества Δ^+ и Δ^- являются орбитами этого действия [3].

*E-mail: evgeny zelenov@gmail.com

Через H_Δ обозначим гильбертово пространство $L^2(\Delta_0)$, $H_\Delta = L^2(\Delta_0)$. Характеристические функции e_a , $a \in \Delta_0$, точек множества Δ_0 образуют ортонормированный базис пространства H_Δ . Естественным образом задается регулярное действие группы G на пространстве H_Δ , $\psi(u) \rightarrow \psi_g(u) = \psi(g^{-1}u)$, $\psi \in H$, $g \in G$. Пространство H_Δ представляется в виде прямой суммы подпространств H^+ и H^- , которые состоят из функций с носителями в Δ^+ и Δ^- соответственно. Пусть P^+ и P^- – ортогональные проекторы на подпространства H^+ и H^- соответственно. Определим оператор F по формуле $F = P^+ - P^-$.

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА. Оператор F обладает следующими свойствами:

- 1) F – самосопряженный оператор;
- 2) $F^2 = 1$;
- 3) F коммутирует с регулярным действием группы $PSL_2(\mathbb{Q}_p)$ на пространстве H_Δ .

Первые два свойства очевидны, третье следует из инвариантности подпространств H^+ и H^- относительно действия группы G . Отметим, что перечисленными выше свойствами оператор F на H_Δ определяется однозначно с точностью до знака (если не учитывать тривиальный случай тождественного оператора).

Построенный оператор F является аналогом оператора Гильберта в вещественном анализе.

3. ПРОСТРАНСТВО $L^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p))$

В данном разделе мы построим базис в пространстве $L^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p))$, элементы которого параметризуются вершинами дерева Δ . Для начала установим взаимно однозначное соответствие между множеством Δ_0 вершин дерева Δ и множеством шаров в $\mathbb{Q}_p$.

Обозначим через I_0 множество всех шаров в $\mathbb{Q}_p$, это множество счетно; радиус шара $B \in I_0$ будем обозначать через $r(B)$. На множестве I_0 определим метрику ρ следующим образом. Пусть B_1 и B_2 – шары в $\mathbb{Q}_p$, $B_1 \in I_0$, $B_2 \in I_0$. В множестве шаров, содержащих одновременно шары B_1 и B_2 , существует единственный шар B минимального радиуса. Положим

$$\rho(B_1, B_2) = \left| \log_p \frac{r^2(B)}{r(B_1)r(B_2)} \right|. \quad (1)$$

Отметим, что метрика ρ принимает только целые неотрицательные значения. Видно, что каждый шар $B \in I_0$ имеет ровно $p + 1$ шаров, находящихся от него на расстоянии 1, из них p шаров содержатся в B и один содержит B . На множестве I_0 построим граф, вершинами которого являются элементы из I_0 , а ребрами – пары элементов из I_0 , расстояние между которыми равно 1. Легко увидеть, что построенный граф изоморфен дереву Δ . Построенное дерево шаров будем обозначать через I , а изоморфизм графов I и Δ через γ , $\gamma: I \rightarrow \Delta$. Изоморфизм γ , очевидно, определен не единственным образом.

Далее выберем изоморфизм γ определенным образом. Для этого выберем произвольное ребро на дереве Δ , т.е. пару вершин $s_0 \in \Delta_0$, $s_1 \in \Delta_0$, $D(s_0, s_1) = 1$.

Разрежем граф Δ по ребру $[s_0, s_1]$ на два изоморфных подграфа Γ_0 и Γ_1 , Γ_0 начинается с вершины s_0 , Γ_1 — с s_1 . Для определенности будем считать, что $s_0 \in \Delta^+$. Выберем γ таким образом, что $\gamma(\mathbb{Z}_p) = s_0$, где $\mathbb{Z}_p$ — множество целых p -адических чисел, т. е. единичный шар в $\mathbb{Q}_p$. При этом Γ_0 переходит в подграф I , вершинами которого служат подшары в $\mathbb{Z}_p$.

Таким образом, граф Γ_0 изоморфен графу подшаров в $\mathbb{Z}_p$, а граница графа Γ_0 есть множество $\mathbb{Z}_p$. Аналогичные рассуждения можно провести и для графа Γ_1 . Следовательно, граф Δ изоморфен объединению двух графов подшаров в $\mathbb{Z}_p$, а граница графа Δ гомеоморфна несвязному объединению двух экземпляров $\mathbb{Z}_p$. Граница графа Δ естественным образом [3], [4] отождествляется с проективной прямой $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, следовательно, $\mathbb{P}^1$ гомеоморфно несвязному объединению двух экземпляров $\mathbb{Z}_p$. С помощью этого отображения, которое, как легко видеть, является гомеоморфизмом, определим меру μ на $\mathbb{P}^1$ (на $\mathbb{Z}_p$ задана мера Хаара). Меру μ нормируем таким образом, что $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$, $\mu(\mathbb{P}^1) = 2$.

С помощью меры μ определим пространство $H = L^2(\mathbb{P}^1)$, при этом $H = L^2(\mathbb{Z}_p) \oplus L^2(\mathbb{Z}_p)$. Разложение пространства H в прямую сумму двух экземпляров $L^2(\mathbb{Z}_p)$ сводит задачу построения искомого базиса в H к задаче построения базиса в $L^2(\mathbb{Z}_p)$. Таким образом, требуется построить базис в пространстве $L^2(\mathbb{Z}_p)$, элементы которого параметризуются вершинами дерева подшаров в $\mathbb{Z}_p$. В качестве искомого базиса в $L^2(\mathbb{Z}_p)$ выберем множество аддитивных характеров группы $\mathbb{Z}_p$. В явном виде этот базис выглядит следующим образом. Введем обозначение $\chi(x) = e^{2\pi i \{x\}_p}$, где $\{x\}_p$ обозначает дробную часть $x \in \mathbb{Q}_p$. Аддитивные характеры группы $\mathbb{Z}_p$ имеют вид $\chi(ax)$, $a \in \mathbb{Q}_p$, $x \in \mathbb{Z}_p$. Множество аддитивных характеров $\{\chi_a(x) = \chi(ax), a \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, x \in \mathbb{Z}_p\}$ образует ортонормированный базис в пространстве $L^2(\mathbb{Z}_p)$. В данном случае a обозначает произвольного представителя в соответствующем смежном классе, выражение не зависит от выбора представителя. В дальнейшем удобно выбирать представителей каноническим образом, а именно a будет иметь вид

$$a = p^{-n}(a_0 + a_1p + \dots + a_{n-1}p^{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_j = 0, 1, \dots, p-1, \quad a_0 \neq 0. \quad (2)$$

Множество p -адических чисел вида (2) будем обозначать через J_p . Число n в формуле (2) будем называть порядком характера χ_a .

Определим отображение α множества характеров $\{\chi_a, a \in J_p\}$ в множество шаров в $\mathbb{Z}_p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\{\chi_a, a \in J_p\}$ — множество характеров. *Каноническим отображением множества характеров в множество подшаров в $\mathbb{Z}_p$ назовем отображение α , при котором характер χ_a переходит в шар радиуса p^{-n} с центром в точке $a_0 + a_1p + \dots + a_{n-1}p^{n-1}$, где a определяется формулой (2).*

Легко увидеть, что построенное отображение α является вложением. Образом отображения α является множество подшаров единичной окружности $\{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1\}$. Будем считать, что единичный характер переходит при отображении α в единичный шар, т. е. в $\mathbb{Z}_p$.

Проведя аналогичные рассуждения для графа Γ^1 , получим вложение пространства $L^2(\mathbb{P}^1)$ в пространство $L^2(\Delta_0)$, которое будем обозначать через α , как и каноническое отображение.

4. МОДУЛЬ ФРЕДГОЛЬМА

Следуя монографии [2], дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{A}$ – инволютивная алгебра над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. *Модулем Фредгольма* над $\mathcal{A}$ назовем тройку $(\mathcal{H}, F, \pi)$, где $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, F – самосопряженный оператор на $\mathcal{H}$, удовлетворяющий условию $F^2 = 1$, а π – инволютивное представление алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{H}$. При этом для всех $a \in \mathcal{A}$ коммутатор

$$[F, \pi(a)] \quad (3)$$

является компактным оператором в $\mathcal{H}$.

В качестве алгебры $\mathcal{A}$ выберем некоторую подалгебру $\mathcal{B}$ алгебры $L^\infty(\mathbb{P}^1)$ ограниченных измеримых функций на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Пусть $f \in \mathcal{B}$. Через M_f обозначим оператор умножения на функцию f , т.е. $(M_f g)(x) = f(x)g(x)$ для $g \in \mathcal{H}$, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p))$. Таким образом, определено искомое представление $\pi: f \rightarrow M_f$ алгебры $\mathcal{B}$.

В разделе 2 настоящей работы был построен оператор симметрии F на пространстве $L^2(\Delta_0)$. С помощью вложения пространства $L^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p))$ в пространство $L^2(\Delta_0)$, построенного в явном виде в разделе 3, определим оператор F на пространстве $\mathcal{H}$. Действительно, пусть $\{\chi_a, a \in J_p^2\}$ – ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}$, построенный в предыдущем разделе, $\mathcal{H}^+$ и $\mathcal{H}^-$ – подпространства в $\mathcal{H}$, натянутые на базисные векторы $\{\chi_a, \alpha(a) \in \Delta^+\}$ и $\{\chi_a, \alpha(a) \in \Delta^-\}$ соответственно. Через P^+ и P^- обозначим проекторы на подпространства $\mathcal{H}^+$ и $\mathcal{H}^-$. Искомый оператор F определяется формулой

$$F = P^+ - P^-. \quad (4)$$

Таким образом, все компоненты модуля Фредгольма – гильбертово пространство $\mathcal{H}$, представление $\pi: f \rightarrow M_f$, оператор симметрии F – построены. Осталось проверить условие (3) компактности коммутатора.

5. КВАНТОВЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

На алгебре $\mathcal{B}$ определим оператор ∂ , принимающий значение в алгебре $B(\mathcal{H})$ ограниченных операторов на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ по формуле

$$\partial f = [F, M_f]. \quad (5)$$

Как легко заметить из формулы (5) и свойств оператора симметрии F , оператор ∂ является дифференцированием на алгебре $\mathcal{B}$ (со значениями в $B(\mathcal{H})$). Другими словами, оператор ∂ линеен и для него справедлива формула Ньютона–Лейбница $\partial(fg) = (\partial f)g + f(\partial g)$, $f \in \mathcal{B}$, $g \in \mathcal{B}$ [2]. Условие компактности оператора ∂ – своего рода условие “малости” оператора. Это делает естественным следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{B} \subset L^\infty(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p))$ – подалгебра алгебры измеримых ограниченных функций на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p))$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, F – оператор на $\mathcal{H}$, задаваемый формулой (4). Оператор $\partial: \mathcal{B} \rightarrow B(\mathcal{H})$ называется *квантовым p -адическим дифференциалом* на алгебре $\mathcal{B}$, если ∂f – компактный оператор для всех $f \in \mathcal{B}$.

Это определение является точным аналогом соответствующего определения для алгебры измеримых ограниченных функций на единичной окружности в поле комплексных чисел [2].

Отметим, что условие компактности оператора ∂f , $f \in \mathcal{B}$, есть в действительности условие для алгебры $\mathcal{B}$.

6. ОПЕРАТОРЫ КОНЕЧНОГО РАНГА

В качестве первого результата в этом направлении сформулируем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{LC}$ – алгебра локально-постоянных функций на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Оператор ∂f является оператором конечного ранга тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{LC}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathcal{C}$ – алгебра непрерывных функций на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Если $f \in \mathcal{C}$, то оператор ∂f компактен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что утверждение носит локальный характер, поэтому достаточно провести доказательство для алгебры $\mathcal{LC}(\mathbb{Z}_p)$ локально-постоянных функций на $\mathbb{Z}_p$. Напомним (см. раздел 3), что множество характеров $\{\chi_a(x) = \chi(ax), a \in J_p\}$ образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{Z}_p)$. Кроме того, было построено отображение α вышеуказанного множества характеров в множество вершин графа Γ^0 .

Справедливы следующие простые утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть χ_a – базисный вектор, α – каноническое отображение множества характеров в множество шаров. Отображение $\alpha(a) \in \Delta^+$ тогда и только тогда, когда порядок характера χ_a четный.

Действительно, пусть $a = p^{-n}(a_0 + a_1p + \dots + a_{n-1}p^{n-1})$. По формуле (1) вычислим расстояние от единичного шара $\mathbb{Z}_p$ до шара $\alpha(a)$:

$$\rho(\mathbb{Z}_p, \alpha(a)) = \left| \log_p \frac{1}{p^{-n}} \right| = n.$$

Таким образом, порядок характера равен расстоянию от $\mathbb{Z}_p$ до образа характера при отображении α , откуда и следует справедливость предложения 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Функция $f \in \mathcal{LC}(\mathbb{Z}_p)$ тогда и только тогда, когда f представляется в виде конечной линейной комбинации базисных векторов χ_a .

Действительно, если функция f есть конечная линейная комбинация характеров, то она локально-постоянна, поскольку характеры локально-постоянны. Пусть теперь f – функция, постоянная на всех шарах радиуса p^{-n} , и пусть $\xi \in \mathbb{Z}_p$: $|\xi|_p \leq p^{-n}$. Вычислим скалярное произведение функции f и характера χ_a :

$$\begin{aligned} (f, \chi_a) &= \int_{\mathbb{Z}_p} f(u) \chi(au) du = \int_{\mathbb{Z}_p} f(u + \xi) \chi(au + a\xi) d(u + \xi) = \\ &= \chi(a\xi) \int_{\mathbb{Z}_p} f(u) \chi_a(u) du = \chi_a(\xi) (f, \chi_a). \end{aligned}$$

Если порядок характера χ_a больше n , найдется такое $\xi: |\xi|_p \leq p^{-n}$, что будет справедливо равенство $\chi_a(\xi) \neq 1$. Следовательно, для таких характеров скалярное произведение (f, χ_a) равно нулю. Таким образом, в разложении функции f по базису, состоящему из характеров, будут присутствовать только характеры, порядки которых меньше или равны n .

Для локально-постоянной функции f определим максимальный порядок функции $\text{Ord}(f)$ как максимум из порядков характеров, входящих в разложение функции f , и минимальный порядок функции $\text{ord}(f)$ как минимум из порядков характеров, входящих в это разложение. Как следует из предложения 2, порядки определены корректно. Определение порядка функции можно дать для любой функции $g \in L^2(\mathbb{Z}_p)$. Будем говорить, что $\text{Ord}(g) = \infty$, если для всех $k \in \mathbb{N}$ в разложении g найдется характер порядка больше k , $\text{ord}(g)$ всегда корректно определен и конечен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть функции $f \in \mathcal{LC}(\mathbb{Z}_p)$, $g \in L^2(\mathbb{Z}_p)$ такие, что $\text{ord}(g) > \text{Ord}(f)$. Тогда g принадлежит ядру оператора ∂f :

$$(\partial f)(g) = 0. \quad (6)$$

Действительно, в силу неархимедовости *p*-адической нормы $\text{ord}(\chi_a \chi_b) = \text{ord}(\chi_a)$, если $\text{ord}(\chi_a) > \text{ord}(\chi_b)$. Следовательно, если f и g такие, как в предложении 3, порядки характеров, входящих в разложение g , не меняются при умножении на характеры из разложения f , что и обеспечивает справедливость формулы (6).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $f \in \mathcal{LC}(\mathbb{Z}_p)$. Тогда ранг оператора ∂f дается формулой

$$\text{Rank}(\partial f) = p^{\text{Ord}(f)}.$$

Таким образом, мы доказали несколько более сильное утверждение, чем теорема, а именно: если f – локально-постоянная функция, то ∂f есть оператор ранга $p^{\text{Ord}(f)}$.

Докажем вторую часть теоремы – необходимость. Пусть f – ограниченная измеримая функция на $\mathbb{Z}_p$ такая, что оператор ∂f имеет конечный ранг. Требуется доказать, что f – локально-постоянная функция. Допустим, что это не так. Тогда в разложении f найдется характер сколь угодно большого ранга. Пусть для определенности ранг этого характера нечетный. Поскольку по предположению образ ∂f конечномерен, в ядре ∂f существуют базисные векторы как четного, так и нечетного рангов. Выберем базисный вектор $\text{ord}(\chi_a)$ четного ранга. Тогда $F\chi_a = P^+\chi_a - P^-\chi_a = \chi_a$ и

$$[F, M_f](\chi_a) = FM_f\chi_a - M_f\chi_a = 0,$$

т.е. вектор $M_f\chi_a$ является собственным вектором оператора симметрии F с собственным значением 1. Следовательно, порядки всех характеров в разложении $M_f\chi_a$ – четные числа, что противоречит существованию в разложении f характера сколь угодно большого нечетного порядка.

Теорема доказана.

Докажем следствие из теоремы. Пусть $f \in \mathcal{C}$ – непрерывная функция на $\mathbb{Z}_p$. Тогда существует последовательность $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ локально-постоянных функций, сходящаяся по норме к f . Легко видеть, что последовательность операторов $\{\partial f_n, n \in$

$\mathbb{N}$ сходится по операторной норме к ∂f . Следовательно, ∂f – предел по операторной норме операторов конечного ранга и, таким образом, компактен.

Условие непрерывности функции f является достаточным условием компактности оператора ∂f , однако это условие не является необходимым.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Как видно из настоящей работы, для комплекснозначных функций p -адического аргумента существует нетривиальная теория квантового дифференциала Конна.

Доказанная нами теорема есть p -адический аналог теоремы Кронекера для операторов Ганкеля [2]. Интересной является задача нахождения необходимых и достаточных условий для функции f , при которых квантовый дифференциал ∂f является компактным оператором.

Благодарности. Автор выражает признательность сотрудникам отдела математической физики Математического института им. В. А. Стеклова РАН за плодотворные обсуждения результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты НШ-7675.2010.1, 09-01-12161-ОФИ-М).

Список литературы

- [1] P. Julg, A. Valette, *J. Funct. Anal.*, **58**:2 (1984), 194–215.
- [2] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, CA, 1994.
- [3] J.-P. Serre, *Trees*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
- [4] Ю. И. Манин, “ p -Адические автоморфные функции”, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., **3**, ВИНТИ, М., 1974, 5–92.

Поступила в редакцию 20.01.2011