Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Марихин, О некоторых решениях двумерных уравнений типа Шредингера в магнитном поле, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 2, 219–226

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6676>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 12:35:10

© 2011 г.

В. Г. Марихин*

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ШРЕДИНГЕРА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Для построения новых решений двумерных уравнений типа Шредингера в магнитном поле используется метод одевания линейным дифференциальным оператором общего вида. В случае неединичной метрики проинтегрирован класс решений с разделяющимися переменными до одевания. Показано, в частности, что отношение коэффициентов перед операторами дифференцирования в случае единичной метрики удовлетворяет уравнению Хопфа. Установлена связь между решениями двумерного уравнения эйконала с единичной правой частью и решениями уравнения Хопфа.

Ключевые слова: метод одевания, квантовые операторы, уравнение Хопфа, уравнение эйконала.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема построения новых решений двумерного уравнения Шредингера важна с точки зрения приложений и непосредственно связана с теорией интегрируемых систем. Такая задача, использующая преобразование Лапласа (один из вариантов метода одевания), рассматривалась в работе [1] (см. также [2]).

Метод одевания, использующий преобразования Дарбу [3], эффективен для построения решений интегрируемых, в том числе нелинейных, уравнений. В двумерном случае эти преобразования рассматривались, например, в работе [4] в применении к гиперболической системе. О другом варианте метода одевания – преобразовании Мутара – см. статью [5].

В дальнейшем мы следуем методике, предложенной в работе [6]. Обычно процедура одевания выглядит следующим образом. Пусть H – некоторый оператор, а ψ – его собственная функция: $H\psi = \lambda\psi$. Применяя одевающий оператор S к функции ψ , получаем собственную функцию $\hat{\psi} = S\psi$ одетого оператора $\hat{H}$, $\hat{H}\hat{\psi} = \lambda\hat{\psi}$, который удовлетворяет следующему уравнению:

$$\hat{H}S = SH. \quad (1)$$

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: mvg@itp.ac.ru

В качестве начального мы берем гамильтониан H , в котором переменные разделены:

$$H = t(x, y)(\partial_x^2 + \partial_y^2 + u_1(x) + u_2(y)). \quad (2)$$

Мы не выписываем линейные по производным члены, поскольку они должны также зависеть от одной соответствующей переменной, и их можно устранить с помощью калибровочного преобразования. Оператор S мы выбираем в виде

$$S = \frac{1}{T(x, y)}(\partial_x + \phi(x, y)\partial_y + f(x, y)). \quad (3)$$

Здесь $T(x, y)$, $\phi(x, y)$, $f(x, y)$ – произвольные функции, причем $T(x, y)$ является чисто калибровочной функцией и выбирается из соображения удобства. Оператор S представляет собой наиболее общий двумерный линейный оператор, и в этом состоит основное отличие настоящей работы от цитируемых выше работ [1], [4], где оператор одевания соответствует случаю $\phi = \pm i$. Чтобы сохранить вещественность преобразований, мы вынуждены выбрать одеваемый и одетый гамильтониан в виде, в котором оператор импульса заменяется на обычную производную, $-i\nabla \rightarrow \nabla$, поэтому мы говорим не об уравнении Шредингера, а об одевании оператора типа Шредингера. Чтобы исследовать непосредственно уравнение Шредингера с помощью нашего подхода, необходимо чисто мнимые нетривиальные решения уравнения Хопфа. На данный момент нам неизвестны такие решения.

Мы действуем уравнением (1) на вспомогательную функцию и требуем чтобы все члены, содержащие производные, обращались в ноль. Обращение в ноль коэффициентов при ψ_{xxx} , ψ_{xxy} , ψ_{xyy} , ψ_{yyy} приводит к следующему виду одетого гамильтониана:

$$\hat{H} = t(x, y)((\partial_x - A_1(x, y))^2 + (\partial_y - A_2(x, y))^2 + U(x, y)). \quad (4)$$

Коэффициенты при ψ_{xx} , ψ_{yy} определяют векторные потенциалы A_1 , A_2 соответственно, а коэффициент при ψ_{xy} приводит к интересному соотношению

$$t_x + \phi t_y - 2 \frac{\phi_y - \phi \phi_x}{\phi^2 + 1} t = 0. \quad (5)$$

Подстановка

$$t = \frac{w(Z)}{Z_x^2 + Z_y^2}, \quad \phi = -\frac{Z_x}{Z_y},$$

где Z – произвольная функция от x и y , а w – произвольная функция от Z , полностью интегрирует соотношение (5). Обращение в ноль коэффициента, например, при ψ_y определяет одетый потенциал U ; дальнейшее вычисление коэффициента при ψ_x приводит к уравнению для функции f , которое можно записать в виде $\tilde{f} = fZ_y$, при этом

$$\begin{aligned} & Z_x \tilde{f}_x + Z_y \tilde{f}_y + \frac{Z_x^2 - Z_y^2}{Z_x^2 + Z_y^2} (Z_{yy} - Z_{xx} - 4Z_x Z_y Z_{xy}) \tilde{f} + \\ & + \frac{1}{2} (-Z_y Z_{xxx} + Z_x Z_{xxy} - Z_y Z_{xyy} + Z_x Z_{yyy}) + \\ & + (Z_{xx} - Z_{yy}) Z_x Z_y + Z_{xy} (Z_y^2 - Z_x^2) = 0. \end{aligned}$$

Мы ищем решение этого уравнения в виде

$$\tilde{f} = \frac{1}{2} \left(\frac{Z_y}{Z_x} Z_{xx} - \frac{Z_x}{Z_y} Z_{yy} \right) + \tilde{f}_0,$$

тогда уравнение для f_0 не имеет локальных по Z (т. е. зависящих только от Z и его производных) решений, поэтому мы полагаем $f_0 = 0$, получая следующее уравнение: $\partial_x \partial_y \ln \phi = 0$. При этом

$$Z = L \left(\int dx F(x) - \int dy G(y) \right).$$

Уравнение, получающееся при обращении в ноль коэффициента при ψ , имеет вид

$$u(x, y) - \frac{1}{2} \frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{3}{4} \frac{(F'(x))^2}{F^2(x)} - \frac{1}{2} \frac{G''(y)}{G(y)} + \frac{3}{4} \frac{(G'(y))^2}{G^2(y)} + \\ + (F^2(x) + G^2(y)) R' \left(\int dx F(x) - \int dy G(y) \right) = 0.$$

При $R' = \mu^2 = \text{const}$ переменные разделены, $u(x, y) = u_1(x) + u_2(y)$,

$$u_1(x) = \frac{1}{2} \frac{F''(x)}{F(x)} - \frac{3}{4} \frac{(F'(x))^2}{F^2(x)} - \mu^2 F(x)^2, \quad u_2(y) = \frac{1}{2} \frac{G''(y)}{G(y)} - \frac{3}{4} \frac{(G'(y))^2}{G^2(y)} - \mu^2 G^2(y).$$

Волновая функция $\psi(x, y) = \psi_1(x)\psi_2(y)$, отвечающая нулевому собственному значению, задается формулами

$$\psi_1(x) = \frac{a_1 \exp\{\mu \int dx F(x)\} + a_2 \exp\{-\mu \int dx F(x)\}}{\sqrt{F(x)}}, \\ \psi_2(y) = \frac{b_1 \exp\{\mu \int dy G(y)\} + b_2 \exp\{-\mu \int dy G(y)\}}{\sqrt{G(y)}}.$$

Одетая волновая функция $\hat{\psi}$ записывается как

$$\hat{\psi} = S\psi = \frac{2\mu}{\sqrt{F(x)}\sqrt{G(y)}} \left(a_1 b_1 \exp\left\{ \mu \left(\int dx F(x) + \int dy G(y) \right) \right\} - \right. \\ \left. - a_2 b_2 \exp\left\{ -\mu \left(\int dx F(x) + \int dy G(y) \right) \right\} \right).$$

Магнитное поле есть

$$B = \frac{F(x)G(y)}{(F^2(x) + G^2(y))^2} ((G'(y))^2 - (F'(x))^2) + \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{F^2(x) + G^2(y)} (G(y)F''(x) - F(x)G''(y)).$$

Потенциал равен

$$U(x, y) = u(x, y) - \frac{G^2(y)}{F(x)} \frac{F''(x)}{F^2(x) + G^2(y)} - \frac{F^2(x)}{G(y)} \frac{G''(y)}{F^2(x) + G^2(y)} + \\ + \frac{G^2(y)}{F^2(x)} \frac{G^2(y) + 3F^2(x)}{(F^2(x) + G^2(y))^2} (F'(x))^2 + \frac{F^2(x)}{G^2(y)} \frac{F^2(x) + 3G^2(y)}{(F^2(x) + G^2(y))^2} (G'(y))^2.$$

Таким образом, функции $F(x)$, $G(y)$ полностью определяют потенциал и магнитное поле после одевания и потенциал до одевания (магнитное поле до одевания равно нулю). Было бы интересно получить после одевания гамильтониан с заданными свойствами, например такой, что $U = 0$, $B \neq 0$. Решение этой задачи в общем случае неизвестно, однако есть один нетривиальный пример, задающий функцию G неявно:

$$F(x) = 1, \quad \int^{G(y)} da \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \frac{1}{\sqrt{(a^2 - 1)a(4\mu^2 a + c_1)}} = y + c_2.$$

2. СЛУЧАЙ $t = 1$. ОДЕВАНИЕ ОПЕРАТОРА ТИПА ШРЕДИНГЕРА

В случае $t = 1$ может быть проведено одевание оператора типа Шредингера (с единичной метрикой) с ненулевым начальным магнитным полем, при этом гамильтонианы до и после одевания имеют вид

$$\begin{aligned} H_0 &= (\partial_x - a_1(x, y))^2 + (\partial_y - a_2(x, y))^2 + u(x, y), \\ H &= (\partial_x - A_1(x, y))^2 + (\partial_y - A_2(x, y))^2 + U(x, y), \end{aligned} \quad (6)$$

причем одевающий оператор S должен иметь калибровочно-инвариантную форму:

$$S = (\partial_x - a_1(x, y)) + \phi(x, y)(\partial_y - a_2(x, y)) + f(x, y). \quad (7)$$

Отметим важное обстоятельство: из уравнения (5) при $t = 1$ получаем, что функция Z удовлетворяет двумерному уравнению эйконала

$$Z_x^2 + Z_y^2 = w(Z), \quad (8)$$

а функция $\phi = -Z_x/Z_y$ удовлетворяет уравнению Хопфа $\phi_y = \phi\phi_x$. Конечно, по заданному решению уравнения Хопфа также можно построить решение двумерного уравнения эйконала (8) следующим образом.

Выбираем общее решение уравнения Хопфа в виде $z(\phi) = x + y\phi$, следовательно,

$$\phi_{xx} = -z''(\phi)\phi_x^3, \quad \phi_{xxx} = -z'''(\phi)\phi_x^4 + 3(z''(\phi))^2\phi_x^5.$$

Для дальнейших вычислений удобно сделать следующую замену переменных: $(x, y) \rightarrow (\phi(x, y), \phi_x(x, y)) = (\phi, \eta)$:

$$\begin{aligned} x &= z(\phi) - \phi \left(z'(\phi) - \frac{1}{\eta} \right), & y &= z'(\phi) - \frac{1}{\eta}, \\ \partial_x &= \eta \partial_\phi - \eta^3 z''(\phi) \partial_\eta, & \partial_y &= \eta \phi \partial_\phi + \eta^2 (1 - \eta \phi z''(\phi)) \partial_\eta. \end{aligned} \quad (9)$$

Введем величину

$$\xi = \frac{\sqrt{1 + \phi^2}}{\eta} - \int d\phi z''(\phi) \sqrt{1 + \phi^2},$$

которая является решением уравнения эйконала с единичной правой частью, т. е. $(\partial_x \xi)^2 + (\partial_y \xi)^2 = 1$. Оказывается, что общее решение уравнения $\partial_x F + \phi \partial_y F = 0$ есть функция $F(\xi)$. Выберем функцию F такую, что $(F'(Z))^2 = w(Z)$, тогда эта функция и функция $z(\phi)$ задают решение уравнения эйконала (8).

Вычислим магнитное поле в одетом гамильтониане H в зависимости от поля в гамильтониане H_0 :

$$B = \partial_x A_2 - \partial_y A_1 = B_0 + \partial_x \partial_y \ln \phi = B_0 + \partial_x^2 \phi, \quad B_0 = \partial_x a_2 - \partial_y a_1.$$

Потенциалы имеют вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{1 + \phi^2} \left(-f^2 + (\partial_x + \phi \partial_y - \eta \phi) f - \frac{1}{4} \eta^2 + G(\xi) \right), \\ U &= \frac{1}{1 + \phi^2} \left(-f^2 - (\partial_x + \phi \partial_y - \eta \phi) f - \frac{1}{4} \eta^2 + G(\xi) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $G(\xi)$ – произвольная функция. Магнитные поля суть

$$\begin{aligned} B_0 &= -\frac{1}{2} \partial_x^2 \phi - \frac{1}{1 + \phi^2} (\partial_y - \phi \partial_x - \phi_x) f, \\ B &= \frac{1}{2} \partial_x^2 \phi - \frac{1}{1 + \phi^2} (\partial_y - \phi \partial_x - \phi_x) f. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналог одевающей цепочки [7] можно построить, используя уравнения (10), (11):

$$u(\hat{f}, \hat{z}, \widehat{\partial_x}, \widehat{\partial_y}, \widehat{G(\xi)}) = U(f, z, \partial_x, \partial_y, G(\xi)), \quad B_0(\hat{f}, \hat{z}, \widehat{\partial_x}, \widehat{\partial_y}) = B(f, z, \partial_x, \partial_y). \quad (12)$$

Необходимо подчеркнуть следующее: в этом разделе мы считаем, что все функции зависят от ϕ , η (эти переменные не преобразуются при одевании), поэтому операторы ∂_x , ∂_y определяются формулой (9), при одевании эти операторы преобразуются следующим образом:

$$z(\phi) \rightarrow \hat{z}(\phi) \Rightarrow \partial_x \rightarrow \widehat{\partial_x}, \quad \partial_y \rightarrow \widehat{\partial_y}.$$

Приведем пример с постоянным одетым потенциалом:

$$z(\phi) = \mu \sqrt{1 + \phi^2}, \quad s(\phi, \eta) = 2\mu \frac{\eta^2}{\sqrt{1 + \phi^2}} - \frac{1}{16\mu} \sqrt{1 + \phi^2}, \quad (13)$$

при этом

$$\begin{aligned} B_0 &= -\frac{\eta}{16\mu} \frac{1}{\sqrt{1 + \phi^2}} - \frac{3\mu}{2} \frac{\eta^3}{\sqrt{(1 + \phi^2)^3}}, & B &= -\frac{\eta}{16\mu} \frac{1}{\sqrt{1 + \phi^2}} - \frac{\mu}{2} \frac{\eta^3}{\sqrt{(1 + \phi^2)^3}}, \\ u &= -\frac{1}{256\mu^2} + 8\mu^2 \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 + \phi^2)^3}}, & U &= -\frac{1}{256\mu^2}. \end{aligned}$$

В случае $\phi = \text{const} \neq \pm i$ получаем

$$u(x, y) = \frac{1}{\phi^2 + 1} (D_+ f - f^2), \quad U(x, y) = -\frac{1}{\phi^2 + 1} (D_+ f + f^2), \quad D_+ = \partial_x + \phi \partial_y,$$

т. е. одевающую цепочку (ср. с [7]), причем

$$\begin{aligned} A_1(x, y) &= a_1(x, y), & A_2(x, y) &= a_2(x, y), \\ b(x, y) &= \partial_x a_2 - \partial_y a_1 = \frac{D_- f}{\phi^2 + 1}, & D_- &= \partial_x - \phi \partial_y. \end{aligned}$$

3. ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрено одевание операторов типа Шредингера в магнитном поле. В данном варианте метода одевания магнитное поле изменяется в процессе одевания. Рассмотрены операторы типа Шредингера как с неединичной метрикой ($t \neq 1$), так и с единичной метрикой ($t = 1$). В первом случае при некоторых естественных ограничениях и при нулевом начальном магнитном поле класс решений по существу сводится к системам с разделенными переменными. Все ответы в этом случае выписываются в простой и явной форме, хотя одетый гамильтониан содержит потенциал и магнитное поле с неразделяющимися переменными. Важно установить, можно ли снять наложенные ограничения или полученный ответ является достаточно общим. Во втором случае все вычисления выполнены с ненулевыми начальными и конечными магнитными полями и потенциалами.

Было бы интересно провести классификацию возможных решений в этих двух случаях, например представляет определенный интерес случай, когда потенциал одетого гамильтониана равен нулю, а магнитное поле отлично от нуля.

Соотношение (5) интересно тем, что при $t = 1$ позволяет получить решение двумерного уравнения эйконала вида (8) по заданному решению уравнения Хопфа, и наоборот – решение уравнения эйконала вида (8) задает явное решение уравнения Хопфа. Представляет определенный интерес классификация получаемых таким образом решений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Случай анизотропных масс

Рассмотрим гамильтонианы с анизотропными массами:

$$H = t(x, y)(a(x)\partial_x^2 + b(y)\partial_y^2 + u(x, y)),$$

$$\hat{H} = t(x, y)(a(x)(\partial_x - A_1(x, y))^2 + b(y)(\partial_y - A_2(x, y))^2 + U(x, y)).$$

Дальнейшие вычисления полностью аналогичны изотропному случаю $a = 1$, $b = 1$, рассмотренному ранее, поэтому приведем только окончательные формулы. Получаем

$$S = \frac{1}{F(x)} \partial_x + \frac{1}{G(y)} \partial_y + \frac{1}{2} \frac{F'(x)}{F^2(x)} + \frac{1}{2} \frac{G'(y)}{G^2(y)},$$

$$t = \frac{1}{(L')^2 \left(\int dx F(x) - \int dy G(y) \right) (a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))}.$$

Векторный потенциал задается формулами

$$A_1 = \frac{1}{a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)} \times$$

$$\times \left[F(x)G'(y)b(y) + \frac{1}{2}F(x)G(y)b'(y) - \left(\frac{F'(x)}{F(x)} + \frac{1}{2} \frac{a'(x)}{a(x)} \right) G^2(y)b(y) \right],$$

$$A_2 = \frac{1}{a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)} \times$$

$$\times \left[G(y)F'(x)a(x) + \frac{1}{2}F(x)G(y)a'(x) - \left(\frac{G'(y)}{G(y)} + \frac{1}{2} \frac{b'(y)}{b(y)} \right) F^2(x)a(x) \right].$$

Магнитное поле равно

$$\begin{aligned}
 B = & \frac{a(x)G(y)F''(x) - b(y)F(x)G''(y)}{a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)} - 2F(x)G(y) \frac{a^2(x)(F'(x))^2 - b^2(y)(G'(y))^2}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{a'(x)G(y)F'(x)(a(x)F^2(x) - 3b(y)G^2(y))^2}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{b'(y)G'(y)F(x)(3a(x)F^2(x) - b(y)G^2(y))^2}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{F(x)G(y)(a''(x) - b''(y))}{a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)} - \frac{1}{2} \frac{F(x)G(y)((a'(x))^2 F^2(x) - (b'(y))^2 G^2(y))}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2}.
 \end{aligned}$$

Потенциал до одевания записывается как

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = & a(x) \frac{1}{2} \frac{F''(x)}{F(x)} + b(y) \frac{1}{2} \frac{G''(y)}{G(y)} - a(x) \frac{3}{4} \frac{(F'(x))^2}{F^2(x)} - b(y) \frac{3}{4} \frac{(G'(y))^2}{G^2(y)} + \\
 & + (a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)) R \left(\int dx F(x) - \int dy G(y) \right).
 \end{aligned}$$

Потенциал после одевания есть

$$\begin{aligned}
 U(x, y) = & u(x, y) - \frac{a(x)b(y)}{F(x)} \frac{G^2(y)F''(x)}{a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)} - \\
 & - \frac{a(x)b(y)}{G(y)} \frac{F^2(x)G''(y)}{a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)} + \\
 & + a(x)b(y)(F'(x))^2 \frac{G^2(y)}{F^2(x)} \frac{3a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} + \\
 & + a(x)b(y)(G'(y))^2 \frac{F^2(x)}{G^2(y)} \frac{a(x)F^2(x) + 3b(y)G^2(y)}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} + \\
 & + \frac{1}{2} a'(x)b(y)F'(x) \frac{G^2(y)}{F(x)} \frac{3a(x)F^2(x) - b(y)G^2(y)}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} - \\
 & - \frac{1}{2} a(x)b'(y)G'(y) \frac{F^2(x)}{G(y)} \frac{a(x)F^2(x) - 3b(y)G^2(y)}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} + \\
 & + \frac{1}{4} (a'(x))^2 \frac{b(y)G^2(y)}{a(x)} \frac{3a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} + \\
 & + \frac{1}{4} (b'(y))^2 \frac{a(x)F^2(x)}{b(y)} \frac{a(x)F^2(x) + 3b(y)G^2(y)}{(a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y))^2} - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{a(x)b''(y)F^2(x) + a''(x)b(y)G^2(y)}{a(x)F^2(x) + b(y)G^2(y)}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что пример, приведенный в работе [6] (см. также [8]), относится к данному классу одевания с разделяющимися переменными, при этом

$$\begin{aligned} a(x) &= x^2 - 1, & b(y) &= 1 - y^2, & F(x) &= 1, & G(y) &= -1, \\ R(x) &= \frac{1}{x}, & u(x, y) &= y - x, & L(x) &= 2\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Благодарности. Автор благодарен А. Б. Шабату, В. Э. Адлеру и В. В. Соколову за внимание к работе и полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00088).

Список литературы

- [1] S. P. Novikov, A. P. Veselov, “Exactly solvable 2-dimensional Schrödinger operators and Laplace transformations”, *Solitons, Geometry and Topology: On the Crossroads*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **179**, eds. V. M. Buchstaber, S. P. Novikov, AMS, Providence, RI, 1997, 109–132, arXiv:math-ph/0003008.
- [2] E. V. Ferapontov, A. P. Veselov, *J. Math. Phys.*, **42**:2 (2001), 590–607, arXiv:math-ph/0007034.
- [3] G. Darboux, *Lecons sur la Théorie Générale des Surfaces et les Applications Géométriques du Calcul Infinitésimal. Première Partie. Généralités. Coordonnées Curvilignes. Surfaces minima*, Réimpression de la deuxième édition de 1914, Chelsea, New York, 1972.
- [4] А. Б. Шабат, *ТМФ*, **103**:1 (1995), 170–175.
- [5] И. А. Тайманов, С. П. Царев, *ТМФ*, **157**:2 (2008), 188–207, arXiv:0801.3225.
- [6] В. Г. Марихин, *ТМФ*, **161**:3 (2009), 327–331.
- [7] А. П. Веселов, А. Б. Шабат, *Функци. анализ и его прил.*, **27**:2 (1993), 1–21.
- [8] М. А. Скворцов, П. М. Островский, *Письма в ЖЭТФ*, **85**:1 (2007), 79–83, arXiv:cond-mat/0604631.

Поступила в редакцию 13.03.2011