Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Ковалевский, $SU(3)$ -Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков со спином $s = 1$, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 2, 245–260

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6678>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:46:47

© 2011 г.

М. Ю. Ковалевский*

$SU(3)$ -СИММЕТРИЯ И МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА МАГНЕТИКОВ СО СПИНОМ $s = 1$

В гамильтоновом подходе получены нелинейные уравнения динамики магнитных сред со спином $s = 1$. Введены два типа обменных магнитных гамильтонианов, соответствующих инвариантам Казимира группы $SU(3)$. Найдены спектры спиновых и квадрупольных волн, отвечающие состояниям с различной симметрией относительно преобразования обращения времени. Рассмотрено влияние диссипативных процессов и найдены релаксационные потоки, обусловленные обменной симметрией магнитного гамильтониана.

Ключевые слова: спин, квадрупольная матрица, динамика, скобки Пуассона, гамильтонов подход, импульс магнонов, спектры коллективных возбуждений, релаксация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Ландау–Лифшица [1] устанавливает эволюцию магнитной среды с помощью вектора спина. Оно хорошо обосновано для спина $s = 1/2$ и используется при изучении динамических и статических свойств ряда магнитных диэлектриков [2], [3]. Исследования квадрупольных состояний и синтез высокоспиновых молекул привели к необходимости уточнения идеологии макроскопического описания магнетиков со спином $s > 1/2$ [4]–[7]. Дополнительным стимулом послужило открытие конденсатов Бозе–Эйнштейна нейтральных атомов с ненулевым спином [8]–[11]. В развитии представлений сокращенного описания неравновесных магнитных состояний следует иметь в виду два момента. Первый из них связан с необходимостью расширения магнитных степеней свободы в системах со спином $s > 1/2$. Для чистых (когерентных) квантовых состояний эти степени свободы связывают с числом параметров, характеризующих одночастичные спиновые состояния. Условие нормировки и произвол выбора фазы волновой функции приводят к числу $N_{\text{чист}}(s) = 4s$ таких независимых параметров для спина s [12], [13]. В работах [7], [14]–[16] исследование магнетиков для спина $s = 1$ осуществлялось в соответствии с этим

*Национальный научный центр “Харьковский физико-технический институт”, Харьков, Украина; Белгородский государственный университет, Белгород, Россия.
E-mail: mikov51@mail.ru

предположением. Проведен анализ состояний равновесия и изучена динамика в таких магнетиках. В работах [17], [18] построены неодомерные солитонные состояния вблизи $SU(3)$ -точки и показано, что спектры возмущений в этом случае имеют голдстоуновское поведение, а их затухание удовлетворяет условию принципа Адлера. В случае смешанных (некогерентных) состояний в силу эрмитовости и условия нормировки матрицы плотности число таких параметров равно $N_{\text{смеш}}(s) = 4s(s+1)$. Ими, в частности, могут быть средние значения генераторов группы Ли $SU(2s+1)$. Изучение магнетиков со спином $s = 1$ с таким числом параметров проводилось в работах [19]–[21]. В работе [21] получены новые интегрируемые модели, которые описывают динамику и солитонные состояния магнетиков для значений спина $s = 1$.

Другой важный момент в обобщении макроскопического описания магнетиков связан с представлением о нормальных и вырожденных состояниях равновесия квантовых объектов. Нормальные состояния отвечают состоянию парамагнетика. Остальные состояния магнетиков представляют собой состояния со спонтанно нарушенной симметрией [22], [23]. В зависимости от характера нарушения симметрии, обусловленного видом параметра порядка, для адекватного рассмотрения системы также необходимо расширение набора макроскопических параметров. Такое обобщение в исследовании магнетиков осуществлялось в работах [24]–[26] как в лагранжевом и гамильтоном формализмах, так и в микроскопическом подходе.

В магнетиках со спином 1 может быть реализовано несколько возможностей динамического поведения с различным полным набором параметров сокращенного описания. Набор этих параметров существенно зависит от симметрии гамильтониана и симметрии состояния равновесия, которые в общем случае могут не совпадать. В простейшем случае симметрия $SU(3)$ -состояния равновесия и симметрия гамильтониана совпадают (нормальные состояния). Спин и квадрупольная матрица являются интегралами движения. В другом возможном случае симметрия состояния равновесия ниже симметрии $SO(3)$ -гамильтониана. Квадрупольные степени свободы представляют собой параметры порядка, а интегралами движения являются только компоненты вектора спина (вырожденные состояния). Вопрос классификации магнитных состояний равновесия для этого случая изучен в работе [27]. Наконец, возможен случай полного спонтанного нарушения $SU(3)$ -симметрии состояния равновесия, при этом гамильтониан обладает $SU(3)$ -симметрией (вырожденные состояния). В последнем случае общее число динамических величин равно шестнадцати [20]. В настоящей работе детально рассматривается первый из вышеуказанных случаев. Используя вариационный принцип механики, мы получили скобки Пуассона для набора макроскопических параметров и нашли нелинейные уравнения динамики магнитных сред. Вводятся два типа обменных магнитных гамильтонианов и предлагаются модельные выражения для однородной и неоднородной плотности энергии. Исследуются магнитные состояния равновесия и выясняются условия их устойчивости. Вычисляются спектры спиновых и квадрупольных волн, которые различаются симметрией состояния равновесия относительно инверсии времени. Выписываются диссипативные скобки Пуассона для плотностей аддитивных интегралов движения и выясняется характер релаксационных процессов магнитной среды.

2. СКОБКИ ПУАССОНА МАГНИТНЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ СО СПИНОМ 1

В соответствии с общим подходом механики сплошных сред лагранжиан произвольной физической системы представим в виде $L = L_k - H$, где $L_k(\phi, \dot{\phi}) = \int d^3x F_a(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}')) \dot{\phi}_a(\mathbf{x})$ – кинематическая часть лагранжиана, $H(\phi) = \int d^3x \varepsilon(\mathbf{x}, \phi)$ – гамильтониан системы. Плотность энергии среды $\varepsilon(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}'))$ и величины $F_a(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}'))$ являются определенными функционалами динамических переменных $\phi_a(\mathbf{x})$. Из принципа стационарного действия следуют уравнения динамики для этих величин:

$$\dot{\phi}_a(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}' J_{ab}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \phi) \frac{\delta H(\phi)}{\delta \phi_b(\mathbf{x}')} = \{\phi_a(\mathbf{x}), H(\phi)\}, \quad (2.1)$$

где матрица $J_{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \phi)$ определяется соотношением

$$J_{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \phi) = \frac{\delta F_b(\mathbf{x}', \phi)}{\delta \phi_a(\mathbf{x})} - \frac{\delta F_a(\mathbf{x}, \phi)}{\delta \phi_b(\mathbf{x}')} \quad (2.2)$$

Преобразования $\phi_a(\mathbf{x}) \rightarrow \phi'_a(\mathbf{x}) = \phi_a(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}'))$, оставляющие инвариантной кинематическую часть действия $L_k(\phi, \dot{\phi}) = L_k(\phi', \dot{\phi}')$, будут каноническими, если выполняется соотношение $F_b(\mathbf{x}'; \phi) = \int d^3x F_a(\mathbf{x}; \phi') \delta \phi'_a(\mathbf{x}) / \delta \phi_b(\mathbf{x}')$. В случае бесконечно малых преобразований $\phi_a(\mathbf{x}) \rightarrow \phi'_a(\mathbf{x}) = \phi_a(\mathbf{x}) + \delta \phi_a(\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x}'))$ из последней формулы следует равенство

$$\delta \phi_a(\mathbf{x}) = \{\phi_a(\mathbf{x}), G\}, \quad (2.3)$$

где $G(\phi) \equiv \int d^3x F_a(\mathbf{x}, \phi) \delta \phi_a(\mathbf{x})$ – генератор бесконечно малых канонических преобразований. Соотношение (2.3) будет использовано нами для установления скобок Пуассона всего набора макроскопических переменных. С этой целью введем в рассмотрение выражение кинематической части лагранжиана изучаемой магнитной среды

$$L_k(\mathbf{x}) = b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \dot{a}_{\beta\alpha}(\mathbf{x}) \equiv \text{Sp } \hat{b}(\mathbf{x}) \dot{\hat{a}}(\mathbf{x}). \quad (2.4)$$

Эрмитовы (3×3) -матрицы $b_{\alpha\beta}$ и $a_{\alpha\beta}$ ($\hat{a} = \hat{a}^+$, $\hat{b} = \hat{b}^+$) содержат по девять независимых величин. Для удобства и сокращения записи будем опускать спинорные индексы у матричных элементов там, где это возможно.

Найдем бесконечно малые канонические преобразования $\delta \phi(\mathbf{x}; \phi)$, оставляющие инвариантной кинематическую часть лагранжиана. Зная, с одной стороны, их явный вид, а с другой стороны, учитывая соотношение (2.3), нетрудно найти скобки Пуассона динамических переменных. В частности, легко видеть, что вариации $\delta b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = 0$, $\delta a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \neq 0$ (функции $\delta a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ не зависят от $\hat{a}(\mathbf{x})$, $\hat{b}(\mathbf{x})$) оставляют инвариантной кинематическую часть лагранжиана и согласно соотношению (2.3) представимы в виде

$$\delta a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), G\}, \quad \delta b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \{b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), G\}, \quad (2.5)$$

где генератор преобразований имеет вид $G = \int d^3x b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \delta a_{\beta\alpha}(\mathbf{x})$. Отсюда следуют скобки Пуассона этих матриц:

$$\{b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), b_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\} = 0, \quad \{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), b_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\} = \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.6)$$

Используя далее кинематическую часть лагранжиана вида $L_k(\mathbf{x}) \equiv -\text{Sp } \dot{\hat{b}}(\mathbf{x})\hat{a}(\mathbf{x})$, которая отличается от функции (2.4) на полную производную по времени, и выбирая вариации $\delta b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \neq 0$, $\delta a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = 0$, аналогично найдем

$$\{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), a_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\} = 0, \quad \{b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), a_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\} = -\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.7)$$

Полученные выражения скобок Пуассона согласованы с условием эрмитовости матриц и удовлетворяют тождеству Якоби. Уравнения динамики для канонически сопряженных величин имеют вид

$$\dot{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \frac{\delta H(\hat{a}, \hat{b})}{\delta b_{\beta\alpha}(\mathbf{x})}, \quad \dot{b}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = -\frac{\delta H(\hat{a}, \hat{b})}{\delta a_{\beta\alpha}(\mathbf{x})}. \quad (2.8)$$

Свяжем далее эти матрицы с физическими величинами. Введем в рассмотрение матрицу

$$\hat{g}(\mathbf{x}) \equiv i[\hat{b}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x})] \quad (2.9)$$

(квадратные скобки здесь и далее обозначают коммутатор двух матриц). Эрмитова матрица $\hat{g}(\mathbf{x})$ содержит восемь независимых величин в силу равенства $\text{Sp } \hat{g}(\mathbf{x}) = 0$. В терминах симметричной и антисимметричной частей этой матрицы определяются физические величины – плотности квадрупольной матрицы $q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ и спина $s_{\alpha}(\mathbf{x})$:

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - \frac{i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_{\gamma}(\mathbf{x})}{2}. \quad (2.10)$$

Квадрупольная матрица $q_{\alpha\beta}$ симметрична и бесследна: $q_{\alpha\beta} = q_{\beta\alpha}$, $q_{\alpha\alpha} = 0$. Пять ее независимых компонент могут быть параметризованы соотношением

$$q_{\alpha\beta} = q \left(e_{\alpha}e_{\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} \right) + q' \left(f_{\alpha}f_{\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} \right), \quad (2.11)$$

где q и q' – модули матрицы. Векторы $d_{\alpha}, e_{\alpha}, f_{\alpha} = (\mathbf{d} \times \mathbf{e})_{\alpha}$ образуют ортонормированный репер. Формулу (2.9) можно рассматривать как обобщение классического аналога соотношения Гольштейна–Примакова [28] для магнетиков со спином 1.

Соотношения (2.6), (2.7), (2.9) позволяют найти скобки Пуассона матриц $\hat{a}(\mathbf{x})$ и $\hat{g}(\mathbf{x})$:

$$i\{g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = (-g_{\alpha\rho}(\mathbf{x})\delta_{\gamma\beta} + g_{\gamma\beta}(\mathbf{x})\delta_{\alpha\rho})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.12a)$$

$$i\{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = (-a_{\alpha\rho}(\mathbf{x})\delta_{\gamma\beta} + a_{\gamma\beta}(\mathbf{x})\delta_{\alpha\rho})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.12b)$$

Заметим, что $\{\det \hat{a}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = 0$, поэтому без ограничения общности в силу линейности правой части скобок Пуассона (2.12) можно положить $\det \hat{a} = 1$, так что матрица $\hat{a}(\mathbf{x})$ является функцией восьми независимых величин. Матрицы $\hat{g}(\mathbf{x})$ образуют подалгебру скобок Пуассона (2.12a) и содержат два инварианта Казимира:

$$\begin{aligned} g_2(\mathbf{x}) &\equiv \text{Sp } \hat{g}^2(\mathbf{x}), & g_3(\mathbf{x}) &\equiv \text{Sp } \hat{g}^3(\mathbf{x}), \\ \{g_2(\mathbf{x}), g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}')\} &= 0, & \{g_3(\mathbf{x}), g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}')\} &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Плотность импульса магнитной системы в терминах канонических величин определим равенством

$$\pi_k(\mathbf{x}) \equiv -\text{Sp } \hat{b}(\mathbf{x})\nabla_k \hat{a}(\mathbf{x}). \quad (2.14)$$

Очевидно, что ввиду справедливости формул (2.6), (2.7), (2.14) имеют место соотношения

$$\{P_k, a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\} = \nabla_k a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \quad \{P_k, b_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\} = \nabla_k b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}),$$

где $P_k = \int d^3x \pi_k(\mathbf{x})$ – импульс среды.

С помощью найденных соотношений (2.12) мы получим и проанализируем динамику нормальных магнитных сред со спином 1. В соответствии с формулами (2.12a) для таких состояний алгебра скобок Пуассона произвольных функционалов $A = A(\hat{g}(\mathbf{x}))$ и $B = B(\hat{g}(\mathbf{x}))$ приобретает вид

$$\{A, B\} = i \int d^3x \operatorname{Sp} \hat{g}(\mathbf{x}) \left[\frac{\delta \hat{B}}{\delta g(\mathbf{x})}, \frac{\delta \hat{A}}{\delta g(\mathbf{x})} \right]. \quad (2.15)$$

Плотность обменной энергии в этом случае является функцией матрицы $\hat{g}(\mathbf{x})$ и ее градиента $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon(\hat{g}(\mathbf{x}), \nabla \hat{g}(\mathbf{x}))$. Для вырожденных состояний согласно формулам (2.12) получим выражение скобки Пуассона функционалов $A = A(\hat{g}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x}))$ и $B = B(\hat{g}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x}))$:

$$\begin{aligned} \{A, B\} = & i \int d^3x \operatorname{Sp} \hat{g}(\mathbf{x}) \left[\frac{\delta \hat{B}}{\delta g(\mathbf{x})}, \frac{\delta \hat{A}}{\delta g(\mathbf{x})} \right] + i \int d^3x \operatorname{Sp} \hat{g}(\mathbf{x}) \left[\frac{\delta \hat{B}}{\delta a(\mathbf{x})}, \frac{\delta \hat{A}}{\delta g(\mathbf{x})} \right] + \\ & + i \int d^3x \operatorname{Sp} \hat{g}(\mathbf{x}) \left[\frac{\delta \hat{B}}{\delta g(\mathbf{x})}, \frac{\delta \hat{A}}{\delta a(\mathbf{x})} \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

В этом случае плотность энергии $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon(\hat{g}(\mathbf{x}), \nabla \hat{g}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x}), \nabla \hat{a}(\mathbf{x}))$ – функция обеих матриц. Формулы (2.15) и (2.16) позволяют получить уравнения магнитной динамики в рамках гамильтонова подхода.

3. СИММЕТРИЯ ОБМЕННОГО ГАМИЛЬТониАНА И СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Магнитный гамильтониан $H = H + V \equiv \int d^3x e(\mathbf{x})$ включает в себя сильные обменные взаимодействия $H \equiv \int d^3x \varepsilon(\mathbf{x})$ и слабые менее симметричные релятивистские взаимодействия V . Симметрия обменного гамильтониана и состояния равновесия среды позволяют установить набор термодинамических параметров, описывающих макроскопические магнитные состояния. Для формулировки этих свойств симметрии используем конструкцию равновесного распределения Гиббса, которая отсутствует в гамильтоновой механике. Необходимую математическую формулировку и физические пояснения использования терминов “нормальные” и “вырожденные” состояния равновесия дадим ниже, привлекая язык квантовой механики. В случае $SO(3)$ -симметрии гамильтониан обменных взаимодействий и нормальные состояния равновесия, описываемые статистическим оператором Гиббса $\hat{w}(Y) = e^{\Omega - Y_a \hat{\gamma}_a}$, удовлетворяют равенствам

$$[\hat{H}, \hat{S}_\alpha] = 0, \quad [\hat{w}, \hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{Y})] = 0. \quad (3.1)$$

Здесь обобщенный оператор спинового момента введен соотношениями

$$\hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{Y}) \equiv \hat{S}_\alpha + S_\alpha^{\mathbf{Y}}, \quad S_\alpha^{\mathbf{Y}} \equiv -i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Y_\beta \frac{\partial}{\partial Y_\gamma} \quad (3.2)$$

и действует как в гильбертовом пространстве, так и в пространстве термодинамических сил $Y_a = (Y_0, Y_\alpha)$. Термодинамические силы определяют температуру $Y_0^{-1} \equiv T$ и внутреннее магнитное поле $-Y_\alpha/Y_0 \equiv h_\alpha$. В силу определения (3.2) справедливо соотношение $[Y_\beta \hat{S}_\beta, \hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{Y})] = 0$, откуда следует равенство (3.1). Соотношение (3.1) означает, что гамильтониан и состояние равновесия инвариантны относительно унитарных преобразований однородного спинового поворота $\hat{U} = \exp\{i\theta_\alpha \hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{Y})\}$, генератором которых является оператор (3.2). Вырожденные состояния равновесия обладают симметрией, более низкой по сравнению с гамильтонианом, т.е. $[\hat{w}, \hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{Y})] \neq 0$. Отсюда следует зависимость состояния равновесия от параметров унитарного преобразования: $\hat{w} = \hat{w}(Y, \theta_\alpha)$.

Статистический оператор Гиббса нормальных состояний равновесия магнетиков с $SU(3)$ -симметрий имеет аналогичный вид. При этом набор аддитивных интегралов движения $\hat{\gamma}_a \equiv (\hat{H}, \hat{G}_{\alpha\beta})$ содержит помимо гамильтониана матричный оператор $\hat{G}_{\alpha\beta} = \int d^3x \hat{g}_{\alpha\beta}(x)$. Здесь, следуя работе [29], мы ввели тензорный оператор плотности $\hat{g}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv \hat{\psi}_\alpha^+(\mathbf{x})\hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}) - \delta_{\alpha\beta}\hat{\psi}_\gamma^+(\mathbf{x})\hat{\psi}_\gamma(\mathbf{x})/3$ в терминах полевых бозе-операторов рождения и уничтожения $\hat{\psi}_\alpha^+(\mathbf{x})$, $\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x})$. Свойство $SU(3)$ -симметрии нормальных состояний равновесия формулируется аналогично соотношениям (3.1), (3.2). С этой целью введем оператор

$$\hat{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{Y}) \equiv \hat{G}_{\alpha\beta} + \hat{G}_{\alpha\beta}^{\mathbf{Y}}, \quad G_{\alpha\beta}^{\mathbf{Y}} \equiv Y_{\alpha\lambda} \frac{\partial}{\partial Y_{\beta\lambda}} - Y_{\lambda\beta} \frac{\partial}{\partial Y_{\lambda\alpha}}, \quad (3.3)$$

для которого справедливо соотношение $[\hat{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{Y}), \hat{G}_{\mu\nu}(\mathbf{Y})] = \hat{G}_{\alpha\nu}(\mathbf{Y})\delta_{\beta\mu} - \hat{G}_{\mu\beta}(\mathbf{Y})\delta_{\alpha\nu}$. Поэтому $[\hat{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{Y}), \text{Sp } \hat{\mathbf{Y}}\hat{\mathbf{G}}] = 0$. Условия $SU(3)$ -симметрии гамильтониана и нормальных состояний равновесия приобретают вид

$$[\hat{H}, \hat{G}_{\alpha\beta}] = 0, \quad [\hat{w}, \hat{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{Y})] = 0. \quad (3.4)$$

Последние формулы означают, что гамильтониан и состояние равновесия инвариантны относительно однородных линейных преобразований $\hat{U} = \exp\{i\theta_{\alpha\beta}\hat{G}_{\beta\alpha}(\mathbf{Y})\}$, генератором которых является оператор (3.3). В случае спонтанного нарушения симметрии (вырожденные состояния) $[\hat{w}, \hat{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{Y})] \neq 0$, вследствие чего возникает дополнительная зависимость состояния равновесия от параметров унитарного преобразования $\hat{w} = \hat{w}(Y, \theta_{\alpha\beta})$. В исследовании вырожденных состояний равновесия эффективно использование концепции квазисредних [30], [31].

Возвращаясь к гамильтоновой механике, отметим, что в этом подходе различие в описании неравновесных нормальных и вырожденных состояний проявляется в функциональной зависимости энергии от макроскопических величин. Для нормальных магнитных состояний со спином 1 гамильтониан является функционалом только матрицы $\hat{g}(\mathbf{x})$: $H = H(\hat{g}(\mathbf{x}))$. Отсюда, используя формулы (2.1), (2.15), получим уравнение динамики этой величины:

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = i \left[\hat{g}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}(\hat{g})}{\delta g(\mathbf{x})} \right], \quad (3.5)$$

которое обобщает уравнение Ландау–Лифшица на рассматриваемую магнитную среду со спином $s = 1$. В терминах матриц $q_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma$ последнее уравнение

перепишем в виде

$$\begin{aligned}\dot{\hat{q}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \left[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}(\hat{q}, \hat{\varepsilon})}{\delta q(\mathbf{x})} \right] - 2 \left[\hat{q}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}(\hat{q}, \hat{\varepsilon})}{\delta \varepsilon(\mathbf{x})} \right], \\ \dot{\hat{\varepsilon}}(\mathbf{x}) &= 2 \left[\frac{\delta \hat{H}(\hat{q}, \hat{\varepsilon})}{\delta q(\mathbf{x})}, \hat{q}(\mathbf{x}) \right] + 2 \left[\frac{\delta \hat{H}(\hat{q}, \hat{\varepsilon})}{\delta \varepsilon(\mathbf{x})}, \hat{\varepsilon} \right].\end{aligned}\quad (3.6)$$

Правые части этих уравнений показывают взаимное влияние спина и квадрупольной матрицы на их динамическое поведение. Если в уравнениях (3.6) пренебречь зависимостью гамильтониана от квадрупольной матрицы, то второе из них переходит в уравнение из работы [1]. Структура уравнения (3.5) такова, что инварианты Казимира не изменяются: $g_2 = \text{const}$, $g_3 = \text{const}$. Наличие этих инвариантов уменьшает число независимых магнитных параметров соответственно до шести в двухосном случае и до четырех в одноосном случае квадрупольной матрицы. Далее мы уточним вид уравнений (3.5), (3.6), в которых учтем конкретные выражения обменной энергии и менее симметричные релятивистские взаимодействия.

Для вырожденных неравновесных состояний гамильтониан зависит от обеих матриц $\hat{g}(\mathbf{x})$ и $\hat{a}(\mathbf{x})$: $H = H(\hat{g}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x}))$. Уравнения движения для них в силу формул (2.1), (2.16) приобретают вид

$$\begin{aligned}\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) &= i \left[\hat{g}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}(\hat{g}, \hat{a})}{\delta g(\mathbf{x})} \right] + i \left[\hat{a}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}(\hat{g}, \hat{a})}{\delta a(\mathbf{x})} \right], \\ \dot{\hat{a}}(\mathbf{x}) &= i \left[\hat{a}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}(\hat{g}, \hat{a})}{\delta g(\mathbf{x})} \right].\end{aligned}$$

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И МОДЕЛИ ГАМИЛЬТониАНА

Основные взаимодействия в магнитных системах носят обменный характер. Рассмотрение динамических процессов в таких средах требует уточнения формулировки законов сохранения в дифференциальной форме с учетом симметрии обменного гамильтониана. В случае SU(3)-симметрии гамильтониана (3.1) набор интегралов движения состоит из обменного гамильтониана и матрицы $G_{\alpha\beta}$:

$$\gamma_a \equiv (H, G_{\alpha\beta}) = \int d^3x \zeta_a(\mathbf{x}), \quad \{H, \gamma_a\} = 0. \quad (4.1)$$

Здесь $\zeta_a(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x})$, $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ – плотности аддитивных интегралов движения, $a = 0, \alpha, \beta$. Используя представление плотности потоков аддитивных интегралов движения из работы [32], приходим к уравнениям динамики, отражающим законы сохранения в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(\mathbf{x}) &= -\nabla_k q_k(\mathbf{x}), \quad q_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{ \varepsilon(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{x}'), \varepsilon(\mathbf{x} - (1 - \lambda)\mathbf{x}') \}, \\ \dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) &= -\nabla_k \hat{j}_k(\mathbf{x}), \quad \hat{j}_k(\mathbf{x}) = \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{ \hat{g}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{x}'), \varepsilon(\mathbf{x} - (1 - \lambda)\mathbf{x}') \},\end{aligned}\quad (4.2)$$

где $q_k(\mathbf{x})$ – плотность потока энергии и $\hat{j}_k(\mathbf{x})$ – плотность потока, соответствующая сохраняющейся величине $\hat{G}$. При получении последнего равенства учтена

$SU(3)$ -симметрия плотности обменной энергии, связанная с инвариантностью относительно однородных линейных преобразований:

$$\{\hat{G}, \varepsilon(\mathbf{x})\} = 0. \quad (4.3)$$

Учет релятивистских взаимодействий модифицирует второе из уравнений (4.2):

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = -\nabla_k \hat{J}_k(\mathbf{x}) + \hat{\eta}(\mathbf{x}), \quad (4.4)$$

где источник $\hat{\eta}(\mathbf{x})$ имеет вид

$$\hat{\eta}(\mathbf{x}) \equiv \{\hat{g}(\mathbf{x}), V\}. \quad (4.5)$$

Помимо свойства симметрии (4.1) обменный гамильтониан H трансляционно-инвариантен ($\{P_k, H\} = 0$) и инвариантен относительно поворотов в конфигурационном пространстве ($\{L_k, H\} = 0$). Здесь $L_k = \varepsilon_{kij} \int d^3x x_i \pi_j(\mathbf{x})$ – орбитальный момент системы. Для плотности обменной энергии справедливы соотношения симметрии

$$\{P_k, \varepsilon(\mathbf{x})\} = \nabla_k \varepsilon(\mathbf{x}), \quad \{L_i, \varepsilon(\mathbf{x})\} = \varepsilon_{ikl} x_k \nabla_l \varepsilon(\mathbf{x}). \quad (4.6)$$

Учет соотношений (2.14), (4.3), (4.6) и представление плотности потоков в форме, предложенной в работе [32], позволяют сформулировать закон сохранения для плотности импульса магнонов в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_i(\mathbf{x}) &= -\nabla_k t_{ik}(\mathbf{x}), \\ t_{ik}(\mathbf{x}) &= -e(\mathbf{x}) \delta_{ik} + \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{ \pi_i(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{x}'), \varepsilon(\mathbf{x} - (1 - \lambda)\mathbf{x}') \}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь $t_{ik}(\mathbf{x})$ – плотность потока импульса.

Магнитный гамильтониан Гейзенберга имеет вид

$$H = \int d^3x \varepsilon(\mathbf{x}) = - \int d^3x d^3x' J(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) s_\alpha(\mathbf{x}) s_\alpha(\mathbf{x}'),$$

где $J(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$ – обменный интеграл двухчастичного взаимодействия. С точностью до членов, квадратичных по пространственным градиентам плотности спина, приведем выражение плотности магнитной энергии для этого гамильтониана:

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = -J s_\alpha(\mathbf{x}) s_\alpha(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \bar{J} \nabla_k s_\alpha(\mathbf{x}) \nabla_k s_\alpha(\mathbf{x}). \quad (4.8)$$

Здесь $J \equiv \int d^3x J(|x|)$, $\bar{J} \equiv \int d^3x x^2 J(|x|)/3 > 0$ – эффективные обменные интегралы двухчастичного взаимодействия. Первое и второе слагаемые в выражении (4.8) описывают соответственно однородное и неоднородное обменное взаимодействие, причем функциональный вид однородной части этой энергии определяется инвариантом Казимира.

Аналитический вид $SU(3)$ -симметричного обменного гамильтониана строим по аналогии с гамильтонианом Гейзенберга. Запишем магнитный гамильтониан в таком виде, чтобы однородная часть плотности энергии была выражена в терминах инвариантов g_2 и g_3 :

$$\begin{aligned} H(g_2, g_3) &= H(g_2) + H(g_3), \\ H(g_2) &= -2 \int d^3x d^3x' J(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \text{Sp } \hat{g}(\mathbf{x}) \hat{g}(\mathbf{x}'), \\ H(g_3) &= - \int d^3x d^3x' d^3x'' I(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, |\mathbf{x} - \mathbf{x}''|, |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|) \text{Sp } \hat{g}(\mathbf{x}) \hat{g}(\mathbf{x}') \hat{g}(\mathbf{x}''). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь $J(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$ и $I(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, |\mathbf{x} - \mathbf{x}''|, |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|)$ – обменные интегралы двух- и трех-частичного магнитных взаимодействий. Плотность энергии, соответствующая гамильтониану $H(g_2)$, имеет вид

$$\varepsilon(\mathbf{x}, g_2(\mathbf{x})) = -2Jg_2(\mathbf{x}) + \bar{J} \text{Sp} \nabla_k \hat{g}(\mathbf{x}) \nabla_k \hat{g}(\mathbf{x}). \quad (4.10)$$

Знаки и коэффициент в плотности энергии (4.10) выбраны таким образом, чтобы при отсутствии квадрупольных степеней свободы это выражение перешло в формулу (4.8). Аналогично плотность энергии гамильтониана $H(g_3)$ имеет вид

$$\varepsilon(\mathbf{x}, g_3(\mathbf{x})) = -Ig_3(\mathbf{x}) + 2\bar{I} \text{Sp} \hat{g}(\mathbf{x}) \nabla_k \hat{g}(\mathbf{x}) \nabla_k \hat{g}(\mathbf{x}), \quad (4.11)$$

и для нее также справедливо соотношение $SU(3)$ -симметрии (4.3) относительно преобразований, генераторами которых являются матрицы $\hat{G}$. Здесь

$$I \equiv \int d^3x d^3x' I(|\mathbf{x}|, |\mathbf{x}'|, |\mathbf{x}''|),$$

$$\bar{I} \equiv \int d^3x d^3x' (x^2 + x'^2 - \mathbf{x}\mathbf{x}') \frac{I(|\mathbf{x}|, |\mathbf{x}'|, |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{3}$$

– эффективные обменные интегралы однородного и неоднородного трехчастичного магнитного взаимодействия.

Далее, для нахождения стационарных значений магнитных величин, анализа ли-неаризованных уравнений динамики и спектров коллективных возбуждений мы используем однородную часть магнитной энергии следующего вида:

$$e(s, q) \equiv -2J \left(\frac{2q^2}{3} + \frac{s^2}{2} \right) + B \left(\frac{2q^2}{3} + \frac{s^2}{2} \right)^2 + Aq^2. \quad (4.12)$$

Здесь учтено, что в одноосном случае квадрупольной матрицы $\text{Sp} \hat{g}^2 = 2q^2/3 + s^2/2$, где s – модуль спина и q – модуль этой матрицы. Первые два слагаемых в выражении (4.12) отвечают обменно изотропному взаимодействию, обладающему $SU(3)$ -симметрией, последнее слагаемое анизотропно. Эти слагаемые необходимы для определения основного состояния магнетика. Легко видеть, что для этой модели гамильтониана возможны три состояния равновесия. Решение

$$s_0 = q_0 = 0 \quad (4.13)$$

отвечает устойчивому парамагнитному состоянию, если $J < 0$ и $J < 3A/4$. Решение

$$s_0^2 = \frac{2J}{B}, \quad q_0 = 0 \quad (4.14)$$

представляет собой ферромагнитное состояние равновесия. Для его устойчивости необходимо выполнение неравенств $B > 0$, $8J > 3A > 0$. Наконец, решению

$$s_0 = 0, \quad q_0^2 = \frac{3(4J - 3A)}{8B} \quad (4.15)$$

соответствует квадрупольное состояние (спиновый немагнетик), устойчивость которого обеспечивается неравенствами $B > 0$, $A < 0$, $8J > 3A$.

5. СПЕКТРЫ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Основное термодинамическое соотношение для нормальных состояний магнитной среды записывается в виде

$$d\varepsilon = \text{Sp} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial g} d\hat{g} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} ds + \text{Sp} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \nabla_k g} d\nabla_k \hat{g}, \quad (5.1)$$

где s – плотность энтропии. Для нее скобки Пуассона с остальными величинами равны нулю. Учитывая свойство симметрии обменных взаимодействий для плотности энергии (4.3), получим соотношение

$$\left[\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial g}, \hat{g} \right] + \left[\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \nabla_k g}, \nabla_k \hat{g} \right] = 0.$$

Принимая во внимание это равенство, из формул (4.1)–(4.3) можно получить выражения для плотностей потоков аддитивных интегралов движения:

$$\hat{j}_k = i \left[\hat{g}, \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \nabla_k g} \right], \quad q_k = \text{Sp} \frac{\delta \hat{H}}{\delta g} \hat{j}_k. \quad (5.2)$$

Уравнения (4.2) и плотности потоков в форме (5.2) описывают адиабатическую динамику нормальных неравновесных состояний магнетиков со спином 1.

Сформулируем уравнение динамики для плотности импульса магнонов. Учитывая, что $H(\hat{b}, \hat{a}) = H(\hat{g}(\hat{b}, \hat{a}))$, и пренебрегая анизотропным взаимодействием, уравнения (2.8) перепишем в виде

$$\dot{\hat{a}}(\mathbf{x}) = i \left[\hat{a}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}}{\delta g(\mathbf{x})} \right], \quad \dot{\hat{b}}(\mathbf{x}) = i \left[\hat{b}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}}{\delta g(\mathbf{x})} \right].$$

Принимая во внимание определение (2.14), приходим к уравнению динамики для плотности импульса магнонов (4.7), где плотность потока импульса магнонов имеет вид

$$t_{ik} = \delta_{ik} \left(-\varepsilon + \text{Sp} \frac{\delta \hat{H}}{\delta g} \hat{g} \right) + \text{Sp} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \nabla_k g} \nabla_i \hat{g}.$$

Нетрудно преобразовать нелинейное уравнение (4.2) с учетом (5.2) в уравнения для квадрупольной матрицы и антисимметричной матрицы $\varepsilon_{\alpha\beta}$:

$$\dot{\hat{q}} = -\nabla_k \hat{j}_k^{(q)}, \quad \dot{\hat{\varepsilon}} = -\nabla_k \hat{j}_k^{(\varepsilon)}. \quad (5.3)$$

Здесь соответствующие плотности потоков имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{j}_k^{(q)} &= 2 \left[\hat{q}, \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \nabla_k \varepsilon} \right] + \frac{1}{2} \left[\hat{\varepsilon}, \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \nabla_k q} \right], \\ \hat{j}_k^{(\varepsilon)} &= 2 \left[\hat{q}, \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \nabla_k q} \right] - 2 \left[\hat{\varepsilon}, \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \nabla_k \varepsilon} \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Дальнейший анализ уравнений (5.3), (5.4) проведем, используя модельные выражения плотности энергии (4.10), (4.12). Учитывая выражение (4.12), получим

$$\dot{\hat{q}} = \bar{J}[\Delta \hat{\varepsilon}, \hat{q}] + \bar{J}[\Delta \hat{q}, \hat{\varepsilon}], \quad \dot{\hat{\varepsilon}} = 4\bar{J}[\hat{q}, \Delta \hat{q}] + \bar{J}[\Delta \hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}]. \quad (5.5)$$

Линеаризуя эти уравнения около состояния равновесия $(\hat{\varepsilon}_0)_{\alpha\beta} \equiv 0$, $(\hat{q}_0)_{\alpha\beta} \neq 0$ (T -четные состояния, спиновый нематик) и переходя к фурье-представлению, приходим к дисперсионному уравнению

$$\det \hat{D}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad D_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\beta\alpha}(\omega^2 - 2\bar{J}^2 k^4 \text{Sp}(\hat{q}_0^2)) + 3\bar{J}^2 k^4 (\hat{q}_0^2)_{\beta\alpha}.$$

В состоянии равновесия, если квадрупольная матрица одноосна, получим решения $\omega = 0$ и $\omega = \pm \bar{J} k^2 q_0$, где величина q_0 определяется формулой (4.15). Для двухосной квадрупольной матрицы в состоянии равновесия решение линеаризованных уравнений (5.5) приводит к трем спектрам квадрупольных волн:

$$\omega_{\pm}^{(1)} = \pm 2\bar{J} k^2 q_0, \quad \omega_{\pm}^{(2)} = \pm 2\bar{J} k^2 q'_0, \quad \omega_{\pm}^{(3)} = \pm 2\bar{J} k^2 |q_0 - q'_0|.$$

Здесь q_0 и q'_0 – модули этой квадрупольной матрицы в состоянии равновесия.

Линеаризуя уравнения (5.3), (5.4) около состояния равновесия $(\hat{\varepsilon}_0)_{\alpha\beta} \neq 0$, $(\hat{q}_0)_{\alpha\beta} \equiv 0$ (T -нечетные состояния, ферромагнетик), приходим к спектрам спиновых волн $\omega_{\pm}^{(1)} = 0$, $\omega_{\pm}^{(2)} = \pm \bar{J} k^2 s_0$, $\omega_{\pm}^{(3)} = \pm \bar{J} k^2 s_0/2$, где величина s_0 определяется формулой (4.14). Параболическая зависимость частоты от волнового вектора в этих спектрах согласуется с результатами работы [33].

Аналогично рассмотрим динамические процессы с магнитным гамильтонианом $H(g_3)$. В результате получим дисперсионное уравнение

$$\delta s_{\beta}(\mathbf{k}, \omega) D_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \\ D_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \omega) \equiv \delta_{\beta\alpha}(\omega^2 - 4\bar{I}^2 k^4 (2\text{Sp} \hat{q}_0^4 - (\text{Sp} \hat{q}_0^2)^2)) + 4\bar{I}^2 k^4 [3(\hat{q}_0^4)_{\beta\alpha} - 2(\hat{q}_0^2)_{\beta\alpha} \text{Sp} \hat{q}_0^2]_{\beta\alpha}.$$

Если состояние спинового нематика одноосно, то приходим к двум спектрам квадрупольных волн $\omega = 0$, $\omega = \pm 2\bar{I} q_0^2 k^2/3$. В двухосном случае квадрупольной матрицы получим спектры возбуждений

$$\omega_{\pm}^{(1)} = \pm \frac{2\bar{I} k^2}{3} \sqrt{(q_0^2 - q_0'^2)^2 + 4q_0 q_0' (q_0^2 + q_0'^2)}, \\ \omega_{\pm}^{(2)} = \pm \frac{2\bar{I} k^2}{3} \sqrt{q_0' (q_0'^3 + 4q_0^3 + 4q_0^2 q_0')}, \\ \omega_{\pm}^{(3)} = \pm \frac{2\bar{I} k^2}{3} \sqrt{q_0 (q_0^3 + 4q_0'^3 + 4q_0'^2 q_0)}.$$

Качественно они аналогичны случаю с гамильтонианом $H(g_2)$, но спектральная зависимость от модулей квадрупольной матрицы сложнее.

6. УЧЕТ ДИССИПАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим релаксационные процессы в магнетиках со спином 1. Для этого воспользуемся подходом, предложенным в работе [34], где в рамках гамильтонова подхода были введены диссипативные скобки Пуассона и получены релаксационные уравнения динамики ряда нормальных и вырожденных конденсированных сред. Уравнения движения для плотностей аддитивных интегралов движения записываются в виде

$$\dot{\zeta}_a(\mathbf{x}) \equiv \{\zeta_a(\mathbf{x}), H\} - T_0 \{\zeta_a(\mathbf{x}), \Sigma\}_D, \quad (6.1)$$

где $\Sigma = \int d^3x s(\mathbf{x})$ – энтропия и T_0 – постоянная, имеющая размерность температуры. Реактивная скобка Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ описывает динамику системы в адиабатическом приближении, а диссипативная скобка $\{\cdot, \cdot\}_D$ – процессы релаксации. Реактивные скобки Пуассона антисимметричны, удовлетворяют правилу Лейбница и тождеству Якоби:

$$\begin{aligned} \{A, B\} &= -\{B, A\}, & \{A, BC\} &= -\{A, B\}C + B\{A, C\}, \\ \{A, \{B, C\}\} &+ \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} &= 0. \end{aligned}$$

Диссипативные скобки симметричны и удовлетворяют тождеству Лейбница:

$$\{A, B\}_D = \{B, A\}_D, \quad \{A, BC\}_D = \{A, B\}_D C + B\{A, C\}_D.$$

Так как далее релаксационные уравнения движения будут сформулированы для плотностей аддитивных интегралов движения, то, используя формулы (2.12), (5.2), получим предварительно реактивные скобки Пуассона для этих величин:

$$\begin{aligned} \{\zeta_a(\mathbf{x}), \zeta_b(\mathbf{x}')\} &= -i\delta_{a,\alpha\beta}\delta_{\beta,\gamma\rho}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')(g_{\gamma\beta}(\mathbf{x})\delta_{\alpha\rho} - g_{\alpha\rho}(\mathbf{x})\delta_{\gamma\beta}) + \\ &+ [\delta_{a0}\zeta_{bk}^{(0)}(\mathbf{x}) + \delta_{b0}\zeta_{ak}^{(0)}(\mathbf{x}')] \nabla'_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Правая часть скобок Пуассона (6.2) представлена в терминах плотностей и соответствующих им потоков аддитивных интегралов движения (5.2). Справедливость этого соотношения нетрудно доказать, используя предположение о том, что инварианты Казимира (2.13) g_2 и g_3 не зависят от координат: $g_2 = \text{const}$, $g_3 = \text{const}$.

Учет релаксационных процессов приводит к возникновению в уравнениях динамики для плотностей аддитивных интегралов движения диссипативных слагаемых:

$$\dot{\zeta}_a(\mathbf{x}) = -\nabla_k (\zeta_{ak}^{(0)}(\mathbf{x}) + \zeta_{ak}^{(1)}(\mathbf{x})) \equiv L_a^R(\mathbf{x}) + L_a^D(\mathbf{x}), \quad (6.3)$$

где в силу выражения (6.1) получаем

$$L_a^D(\mathbf{x}) = -T_0 \int d^3x' \frac{\delta\Sigma}{\delta\zeta_b(\mathbf{x}')} \{\zeta_a(\mathbf{x}), \zeta_b(\mathbf{x}')\}_D.$$

Соотношение (5.1) и уравнения (6.3) позволяют получить уравнение динамики для плотности энтропии

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = -\nabla_k j_{sk}^{(1)}(\mathbf{x}) + I(\mathbf{x}), \quad (6.4)$$

где

$$j_{sk}^{(1)} = Y_a \zeta_{ak}^{(1)}, \quad I = \zeta_{ak}^{(1)} \nabla_k Y_a \quad (6.5)$$

суть плотность диссипативного потока и производство энтропии соответственно. Явный вид диссипативных скобок Пуассона может быть выражен в терминах диссипативной функции, которая для рассматриваемой магнитной среды имеет вид

$$R \equiv \frac{1}{2} \int d^3x \nabla_k Y_a(\mathbf{x}) I_{ak,bl}(\mathbf{x}) \nabla_l Y_b(\mathbf{x}) = \int d^3x r(\mathbf{x}). \quad (6.6)$$

Здесь $Y_a(\mathbf{x}) = \delta\Sigma/\delta\zeta_a(\mathbf{x})$ – термодинамические силы, сопряженные аддитивным интегралам движения, $I_{ak,bl}$ – обобщенные кинетические коэффициенты, которые удовлетворяют принципу симметрии кинетических коэффициентов Онзагера

$$I_{ak,bl} = I_{bl,ak}. \quad (6.7)$$

Поскольку матрицы $\hat{g}$ бесследовые, то справедливы дополнительные соотношения $I_{\alpha\alpha k,bl} = 0$, $I_{ak,\gamma\gamma l} = 0$. Принимая во внимание формулы (6.1), (6.3) и (6.6), видим, что диссипативная функция связана с плотностями диссипативных потоков аддитивных интегралов движения равенством

$$L_a^D(\mathbf{x}) = -\nabla_k \zeta_{ak}^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\delta R}{\delta Y_a(\mathbf{x})}. \quad (6.8)$$

Диссипативные скобки Пуассона плотностей аддитивных интегралов движения при учете выражения (6.6) приобретают вид

$$\{\zeta_a(\mathbf{x}), \zeta_b(\mathbf{x}')\}_D \equiv -\frac{\delta^2 R}{\delta Y_a(\mathbf{x}) \delta Y_b(\mathbf{x}')} = -\frac{1}{T_0} \nabla_k \nabla'_l (I_{ak,bl}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')). \quad (6.9)$$

В обменном приближении тензорная структура обобщенных кинетических коэффициентов такова, что пространственные и спиновые индексы не перепутываются и отсутствуют выделенные направления в конфигурационном пространстве. Поэтому $I_{ak,bl} = \delta_{kl} I_{ab}$. В этом случае для диссипативных плотностей потоков аддитивных интегралов движения получим выражения

$$\begin{aligned} j_{\alpha\beta}^{(1)k} &= -D_{\alpha\beta} \nabla_k T - \sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} \nabla_k h_{\rho\gamma}, \\ q_k^{(1)} &= -(\kappa + h_{\beta\alpha} D_{\alpha\beta}) \nabla_k T - T D_{\alpha\beta} \nabla_k h_{\beta\alpha} - \sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} h_{\beta\alpha} \nabla_k h_{\rho\gamma}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Кинетические коэффициенты теплопроводности κ , магнитной термодиффузии $D_{\alpha\beta}$ и магнитной диффузии $\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho}$ связаны с обобщенными кинетическими коэффициентами соотношениями

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta,0} &= T^2 D_{\alpha\beta} + T h_{\gamma\rho} \sigma_{\alpha\beta,\rho\gamma}, & I_{\alpha\beta,\gamma\rho} &= T \sigma_{\alpha\beta,\rho\gamma}, \\ I_{0,0} &= T^2 \kappa + 2T^2 h_{\gamma\rho} D_{\rho\gamma} + T h_{\beta\alpha} h_{\gamma\rho} \sigma_{\alpha\beta,\rho\gamma}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулы (6.5) и (6.10), найдем диссипативный поток и производство энтропии:

$$\begin{aligned} j_{sk}^{(1)} &= -\frac{\kappa}{T} \nabla_k T - D_{\alpha\beta} \nabla_k h_{\beta\alpha}, \\ I &= \left(\frac{\sqrt{\kappa}}{T} \nabla_k T + \frac{D_{\alpha\beta}}{\sqrt{\kappa}} \nabla_k h_{\beta\alpha} \right)^2 + \nabla_k h_{\beta\alpha} \left(\frac{1}{T} \sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} - \frac{1}{\kappa} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\rho} \right) \nabla_k h_{\rho\gamma}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Дальнейшая конкретизация тензорной структуры кинетических коэффициентов зависит от состояния равновесия системы. Если в равновесии отсутствуют выделенные направления в спиновом пространстве – $g_{\alpha\beta} = 0$ и $h_{\alpha\beta} = 0$ (парамагнитные состояния), то выражения для тензорных кинетических коэффициентов упрощаются и приобретают вид

$$\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} = \frac{1}{4} \sigma (\delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\rho}) + \frac{1}{2} \sigma' \left(\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\rho} + \delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\gamma} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\rho} \right), \quad D_{\alpha\beta} = 0. \quad (6.12)$$

Здесь σ , σ' – коэффициенты спиновой диффузии и диффузии квадрупольной матрицы соответственно. В результате приходим к выражениям для плотности потоков для матрицы $\hat{g}$ и плотности энергии:

$$j_{\alpha\beta}^{(1)k} = \frac{1}{2} i \sigma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_k h_\gamma - \sigma' \nabla_k h_{\alpha\beta}^s, \quad q_k^{(1)} = -\kappa \nabla_k T, \quad (6.13)$$

где $h_{\alpha\beta}^a \equiv -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}h_\gamma$, $h_{\alpha\beta}^s \equiv (h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha})/2$. Из формул (6.11)–(6.13) следуют выражения для диссипативного потока и производства энтропии:

$$j_s^{(1)k} = -\frac{\kappa}{T}\nabla_k T, \quad I = \frac{\kappa}{T^2}(\nabla_k T)^2 + \frac{\sigma}{T}(\nabla_k h_\alpha)^2 + \frac{\sigma'}{T}(\nabla_k h_{\alpha\beta}^s)^2 \geq 0.$$

Положительность производства энтропии обеспечивается выполнением неравенств $\kappa \geq 0$, $\sigma \geq 0$, $\sigma' \geq 0$.

Рассмотрим другой случай, когда анизотропия магнитного состояния равновесия характеризуется вектором $s_\alpha \neq 0$, $h_\alpha \neq 0$, $q_{\alpha\beta} = 0$, $h_{\alpha\beta}^s = 0$ (ферромагнитные состояния). Такие состояния не являются инвариантными при обращении времени. Тензорная структура кинетических коэффициентов такова:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} &= \frac{\sigma(\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho})}{4} + \frac{1}{2}\sigma' \left(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho} + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\gamma} - \frac{2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\rho}}{3} \right) - \\ &\quad - \sigma_1 \varepsilon_{\alpha\beta\delta} h_\delta \varepsilon_{\gamma\rho\lambda} h_\lambda + \sigma_2 \left(h_\alpha h_\beta - \frac{h^2 \delta_{\alpha\beta}}{3} \right) \left(h_\gamma h_\rho - \frac{h^2 \delta_{\gamma\rho}}{3} \right), \\ D_{\alpha\beta} &= \frac{i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} h_\gamma D}{2} + D' \left(h_\alpha h_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta} h^2}{3} \right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Релаксационные процессы около данного магнитного состояния характеризуются двумя коэффициентами магнитной термодиффузии и четырьмя коэффициентами диффузии. Формулы (6.10), (6.14) решают вопрос о виде диссипативных потоков $j_{\alpha\beta}^{(1)k}$ и $q_k^{(1)}$ в этом случае. В силу формул (6.5), (6.14) получим выражение для производства энтропии:

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{\sqrt{\kappa}}{T} \nabla_k T - \frac{Dh}{\sqrt{\kappa}} \nabla_k h + \frac{2D'h^2}{3\sqrt{\kappa}} \nabla_k \underline{h} \right)^2 + \frac{\sigma h^2}{T} (\nabla_k n_\alpha)^2 + \\ &\quad + \left(\sqrt{A} \nabla_k h + \frac{C}{2\sqrt{A}} \nabla_k \underline{h} \right)^2 + \left(B - \frac{c^2}{4A} \right) (\nabla_k \underline{h})^2 \geq 0, \end{aligned}$$

где $\underline{h} \equiv 3n_\alpha h_{\alpha\beta}^s n_\beta / 2$, $A \equiv (\sigma + 4\sigma_1 h^2)/T - D^2 h^2 / \kappa$, $B \equiv 2(3\sigma' + 2\sigma_2 h^4)/(9T) - 4D'^2 h^4 / (9\kappa)$, $C \equiv 4h^3 D D' / (3\kappa)$. Требование ее положительности приводит к неравенствам $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $A > 0$, $4AB - C^2 > 0$.

Наконец, рассмотрим T -инвариантное состояние равновесия, для которого $s_\alpha = 0$, $h_\alpha = 0$ и $q_{\alpha\beta} = q(n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3) \neq 0$, $h_{\alpha\beta}^s \neq 0$ (состояния одноосных спиновых нематиков). В этом случае тензоры магнитной термодиффузии $D_{\alpha\beta}$ и магнитной диффузии $\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho}$ приобретают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} &= \frac{1}{4}\sigma(\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho}) + \frac{1}{2}\sigma' \left(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho} + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\gamma} - \frac{2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\rho}}{3} \right) + \\ &\quad + \sigma_3 h_{\alpha\beta}^s h_{\gamma\rho}^s + \frac{1}{2}\sigma_4 (h_{\alpha\rho}^s h_{\beta\gamma}^s - h_{\alpha\gamma}^s h_{\beta\rho}^s) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma_5 \left(h_{\alpha\gamma}^s h_{\beta\rho}^s + h_{\alpha\rho}^s h_{\beta\gamma}^s - \frac{2}{9}\delta_{\alpha\beta} h_{\gamma\rho}^s - \frac{2}{9}\delta_{\gamma\rho} h_{\alpha\beta}^s \right), \end{aligned}$$

$$D_{\alpha\beta} = \underline{D} h_{\alpha\beta}^s.$$

Релаксационные процессы вблизи данного магнитного состояния характеризуются коэффициентом магнитной термодиффузии и пятью коэффициентами диффузии. Требование положительной определенности производства энтропии приводит к неравенствам $\kappa > 0$, $\sigma + 2\sigma_4 \underline{h}^2/9 > 0$, $\sigma' - 2\sigma_5 \underline{h}^2/9 > 0$, $(3\sigma' + 2\sigma_3 \underline{h}^2 + \sigma_5 \underline{h}^2)\kappa > 2T \underline{h}^2 D^2$.

Таким образом, для магнетиков со спином 1 релаксационные процессы описываются в парамагнитном случае с помощью трех кинетических коэффициентов, в случае ферромагнитных и квадрупольных состояний – семью кинетическими коэффициентами. Найденная структура релаксационных слагаемых в уравнениях динамики позволяет в принципе получить декременты затухания спектров коллективных возбуждений в изучаемых магнитных средах.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-01-00086а).

Список литературы

- [1] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Phys. Z. Sowjetunion*, **8** (1935), 153–169.
- [2] А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, М., 1967.
- [3] Е. А. Туров, А. В. Колчанов, В. В. Меньшенин, И. Ф. Мирсаев, В. В. Николаев, *Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков*, Физматлит, М., 2001.
- [4] Э. Л. Нагаев, *Магнетики со сложными обменными взаимодействиями*, Наука, М., 1988.
- [5] M. Nauciel-Bloch, G. Sarma, A. Castets, *Phys. Rev. B*, **5**:11 (1972), 4603–4609.
- [6] А. Ф. Андреев, И. А. Грищук, *ЖЭТФ*, **87**:2 (1984), 467–475.
- [7] В. С. Островский, *ЖЭТФ*, **91**:5 (1986), 1690–1701.
- [8] F. Zhou, M. Snoek, *Spin singlet Mott states and evidence for spin singlet quantum condensates of spin-one bosons in lattices*, arXiv: cond-mat/0306697.
- [9] Ming-Shien Chang, Qishu Qin, Wenxian Zhang, Li You, M. S. Chapman, *Nature Physics*, **1**:1 (2005), 111–116, arXiv: cond-mat/0509341.
- [10] R. Barnett, A. Turner, E. Demler, *Classifying novel phases of spinor atoms*, arXiv: cond-mat/0607253.
- [11] T. Kuwamoto, M. Araki, T. Eno, T. Hirano, *Phys. Rev. A*, **69** (2004), 063604, 6 pp.
- [12] Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Л., 1975.
- [13] Л. Биденхарн, Дж. Лаук, *Угловой момент в квантовой физике*, т. 1, 2, Мир, М., 1984.
- [14] Ф. П. Онуфриева, *ЖЭТФ*, **80**:6 (1981), 2372–2379.
- [15] G. Fáth, J. Sólyom, *Phys. Rev. B*, **51**:6 (1995), 3620–3625, arXiv: cond-mat/9501108.
- [16] В. А. Иванов, А. К. Kolezhuk, *Phys. Rev. B*, **68**:5 (2003), 052401, 4 pp., arXiv: cond-mat/0205207.
- [17] В. А. Иванов, R. S. Khymyn, A. K. Kolezhuk, *Phys. Rev. Lett.*, **100**:4 (2008), 047203, 4 pp., arXiv: arXiv:0710.4557.
- [18] В. И. Бутрим, Б. А. Иванов, А. С. Кузнецов, *Письма в ЖЭТФ*, **92**:3 (2010), 172–176.
- [19] N. Papanicolaou, *Nucl. Phys. B*, **305**:3 (1988), 367–395.
- [20] А. А. Исаев, М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, *Физика металлов и металловедение*, **77**:4 (1994), 20–28.
- [21] J. Bernatska, P. Holod, *J. Phys. A*, **42**:7 (2009), 075401, 14 pp.
- [22] B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, *Phys. Rev.*, **188**:2 (1969), 898–918.
- [23] Ю. П. Блюх, Д. В. Волков, А. А. Желтухин, *ФТТ*, **13**:6 (1971), 1668–1678.
- [24] А. Ф. Андреев, *ЖЭТФ*, **74**:2 (1978), 786–797.

- [25] I. E. Dzyaloshinskii, G. E. Volovick, *Ann. Phys.*, **125**:1 (1980), 67–97.
- [26] М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, *ТМФ*, **100**:1 (1994), 59–74.
- [27] Д. А. Демьяненко, М. Ю. Ковалевский, *Физика низких температур*, **33**:11 (2007), 1271–1281.
- [28] T. Holstein, H. Primakoff, *Phys. Rev.*, **58**:12 (1940), 1098–1113.
- [29] L. I. Plimak, C. Weib, R. Walser, W. P. Schleich, *Opt. Commun.*, **264**:2 (2006), 311–320, arXiv: cond-mat/0603204.
- [30] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, М., 1984.
- [31] М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, *Статистическая механика квантовых жидкостей и кристаллов*, Физматлит, М., 2006.
- [32] А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, М., 1977.
- [33] Б. А. Иванов, Р. С. Химин, *Физика низких температур*, **34**:3 (2008), 236–247.
- [34] М. Ю. Ковалевский, В. Т. Мацкевич, А. Я. Разумный, *ТМФ*, **158**:2 (2009), 277–291.

Поступила в редакцию 21.11.2010