Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Вернов,
М. Н. Мнацаканова, Регулярные представления R -деформированной алгебры
Гейзенберга, *ТМФ*, 2000, том 125, номер 2, 272–281

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf668>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:00:45

РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ R -ДЕФОРМИРОВАННОЙ АЛГЕБРЫ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Дано описание всех регулярных неприводимых представлений R -деформированной алгебры Гейзенберга в произвольном невырожденном и слабо замкнутом пространстве с индефинитной метрикой.

1. ВВЕДЕНИЕ

R -деформированная алгебра Гейзенберга (R -алгебра) в простейшем случае одной степени свободы определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} [a, a^+] &= 1 + \nu R, \quad \nu \in \mathbb{R}, \\ \{a, R\} &= \{a^+, R\} = 0, \\ R^2 &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Операторы a и a^+ являются сопряженными операторами относительно некоторого, в общем случае индефинитного, скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В этой статье мы ограничимся рассмотрением случая одной степени свободы, но, как и в случае обычной алгебры Гейзенберга, полученные результаты легко обобщаются на случай произвольного конечного числа степеней свободы.

Исследование свойств R -деформированной алгебры Гейзенберга представляет существенный интерес, поскольку эта алгебра связана с описанием параполей и парастатистики, с изучением анионов и некоторыми другими проблемами квантовой теории. Она интенсивно исследовалась в ряде работ (см. [1] и цитированную в ней литературу).

В большинстве работ изучались представления R -алгебры в гильбертовом пространстве, однако в работе [2] было обнаружено весьма интересное конечное представление R -алгебры в пространстве с индефинитной метрикой. Хорошо известно, что введение такого пространства неизбежно при ковариантном описании калибровочных полей [3–5]. В связи с этим представляет интерес систематическое изучение представлений R -алгебры в таком пространстве.

*Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия. E-mail: vernov@theory.npi.msu.ru

†Научно-исследовательский институт ядерной физики Московского государственного университета, Москва, Россия. E-mail: mnatsak@theory.npi.msu.ru

В данной статье будет дано описание неприводимых представлений R -алгебры, принадлежащих наиболее интересному с точки зрения квантовой теории классу представлений, которые мы назовем регулярными.

Точное определение будет дано ниже (см. определение 2). Здесь мы отметим, что в случае алгебры Гейзенберга, т.е. алгебры канонических коммутационных соотношений (ККС)

$$[a, a^+] = 1, \quad (2)$$

слово “регулярное” означает, что ККС могут быть записаны в форме Вейля и соответствующие группы являются непрерывными (рассматриваются представления в пространстве Гильберта). Согласно теореме единственности фон Неймана, такие неприводимые представления унитарно-эквивалентны представлению Шредингера (подробно об этом см. [6, гл. IV]). Условие регулярности, эквивалентное вышеприведенному, может быть сформулировано и непосредственно в терминах алгебры Гейзенберга. Это условие Реллиха–Диксмье (см. [6, с. 72]).

Напомним, что шредингеровское представление ККС – это представление, реализованное операторами

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q + \frac{d}{dq} \right), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q - \frac{d}{dq} \right)$$

в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$. Отметим, что примером нерегулярного представления ККС является представление, реализованное теми же операторами, но в пространстве $L_2(a, b)$. Подчеркнем, что в квантовой механике и в квантовой теории поля рассматриваются в основном регулярные представления ККС. Условие регулярности представления ККС, пригодное не только для гильбертова пространства, но и для пространства с индефинитной метрикой, было сформулировано в статье [7]. Согласно этому условию для регулярности представления необходимо и достаточно существования оператора $U(s) = \exp(isN)$, $s \in \mathbb{R}$, $N = a^+a$, удовлетворяющего некоторым общим условиям (см. ниже определение 2). Существование этого оператора приводит к дискретности спектра оператора N ($\text{Sp } N = \mathbb{N}$ в случае пространства Гильберта). Этот результат может быть обобщен на алгебры более общего вида [8, замечание 1].

В разделе 2 предлагаемой работы рассмотрен класс алгебр, которые мы называем обобщенными алгебрами Гейзенберга. Для любой алгебры этого класса единым образом формулируется понятие регулярности представления. Далее рассматриваются общие свойства регулярных представлений, не зависящие от конкретного вида алгебры. Отметим, что некоторые свойства такой алгебры рассматривались в работе [9].

В разделе 3 доказывается, что R -алгебра является обобщенной алгеброй Гейзенберга, и дается классификация ее регулярных неприводимых представлений.

2. ОБОБЩЕННАЯ АЛГЕБРА ГЕЙЗЕНБЕРГА И ЕЕ РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгебра A (в случае одной степени свободы, когда эта алгебра является операторной алгеброй двух операторов a и a^+) называется обобщенной алгеброй

Гейзенберга, если она определяется следующим образом:

$$a^+a = \varphi(N), \quad aa^+ = \varphi(N+1), \quad (3)$$

где $\varphi(N)$ – некоторая функция, а самосопряженный оператор N удовлетворяет условиям

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^+] = a^+. \quad (4)$$

Операторы a и a^+ являются сопряженными операторами относительно некоторого скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$, в общем случае индефинитного.

Мы рассматриваем представления этой алгебры в произвольном, невырожденном, слабоплотном пространстве J . Напомним, что J невырождено, если условие $x \perp J$ означает, что $x = 0$. Пространство J слабоплотно, если из сходимости $\langle x_n, y \rangle \forall y \in J$ следует, что существует $x \in J$ такое, что $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle \forall y$. Свойства пространств с индефинитной метрикой описаны в книгах [10, 11].

При исследовании обобщенной алгебры Гейзенберга возникают достаточно сложные математические проблемы, поскольку в общем случае операторы a и a^+ являются неограниченными (для случая ККС доказательство см. в [6]).

Неограниченность операторов a и a^+ означает, что соотношения (3) и (4) выполнены не во всем пространстве J , а в некоторой плотной области D , причем $D \subset D(N)$, $D \subset D(a)$, $D \subset D(a^+)$. Мы предполагаем, что существует плотная область $D' \subset D$ такая, что если $\psi \in D'$, то и $a\psi \in D'$, $a^+\psi \in D'$. Ниже мы будем иметь дело только с D' , поэтому индекс штрих опускается.

Условия (4) рассматриваются как эквивалентные условиям

$$Na = a(N-1), \quad Na^+ = a^+(N+1). \quad (4')$$

При этом мы считаем, что если для некоторого ψ существует вектор $aN\psi$, то и вектор $Na\psi$ тоже существует и определяется равенством (4') и наоборот.

Простейшим случаем обобщенной алгебры Гейзенберга является сама алгебра Гейзенберга, когда $\varphi(N) = N$. Другая известная алгебра этого типа – это q -деформированная алгебра Гейзенберга (см. [9, 12] и цитированную в них литературу)¹⁾.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Представление обобщенной алгебры Гейзенберга является регулярным, если существует оператор $U(s)$, обладающий в области D следующими свойствами:

$$U(s)D \subset D, \quad (5)$$

$$U(s)U(t) = U(s+t), \quad (6)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{U(\Delta) - I}{\Delta} \psi = iN\psi. \quad (7)$$

¹⁾ Строго говоря, q -деформированный коммутатор $aa^+ - qa^+a = q^{-N}$ определяет не одну обобщенную алгебру Гейзенберга, а целое семейство, параметризованное некоторым параметром q [9, формулы (26), (26')]. При любом фиксированном значении константы q алгебра является обобщенной алгеброй Гейзенберга.

Достаточно предполагать, что предел (7) существует в слабом смысле [7]. Далее для упрощения доказательства утверждения 1 будем предполагать, что этот предел существует в сильном смысле относительно некоторой банаховой нормы $\|\cdot\|$. Ниже мы увидим, что произвольное регулярное представление эквивалентно регулярному представлению в пространстве Крейна, поэтому предположение о существовании банаховой нормы не приводит к потере общности. Мы называем представления в пространствах J и J' эквивалентными, если они совпадают в области D , плотной как в J , так и в J' (см. также обсуждение этого вопроса в [7]).

Мы также предполагаем, что если предел

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{U(\Delta) - I}{\Delta} \psi$$

существует, то $\psi \in D(N)$ и выполняется равенство (7).

Из условий (6) и (7) непосредственно следует, что

$$\frac{d}{ds} U(s) \psi = iNU(s) \psi \quad \forall s \in \mathbb{R} \text{ и } \psi \in D. \quad (8)$$

В соответствии с (6) и (4) в области D имеет место равенство

$$\frac{d}{ds} (U(s)aU(-s)) = iU(s)[N, a]U(-s) = -iU(s)aU(-s). \quad (9)$$

Из равенства (9) легко вывести, что в D

$$U(s)aU(-s) = e^{-is}a, \quad U(s)a^+U(-s) = e^{is}a^+. \quad (10)$$

Из (10) следует, что

$$[U(2\pi n), a] = [U(2\pi n), a^+] = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (11)$$

Поскольку мы рассматриваем неприводимые представления, то условия (11) означают, что $U(2\pi n) = CI$ (различные условия неприводимости представления в случае алгебр неограниченных операторов обсуждаются в [7]). Из самосопряженности N следует унитарность оператора $U(s)$. Поэтому

$$U(2\pi n) = e^{2\pi i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (12)$$

Удобно ввести оператор $V(s) = e^{-i\theta s}U(s)$. Очевидно, что

$$V(2\pi n) = I. \quad (12')$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если существует оператор $U(s)$, удовлетворяющий условиям (5)–(7), то оператор N имеет собственный вектор

$$N\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda. \quad (13)$$

Для доказательства этого утверждения сначала докажем, что $V(s)$ имеет собственный вектор. Пусть ψ – произвольный вектор, принадлежащий D . Докажем, что

$$\Phi_k = \int_0^{2\pi} V(s) e^{-iks} \psi ds$$

является собственным вектором оператора $V(s)$ при любом s , если только $\Phi_k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Существование вектора Φ_k вытекает из того факта, что вследствие непрерывности оператора $V(s)$ вектор Φ_k существует как

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \left[\Delta \sum_{j=0}^n V(j\Delta s) e^{ikj\Delta} \psi \right], \quad n\Delta s = s.$$

Непрерывность оператора $V(s) \forall s$ непосредственно следует из непрерывности $V(s)$ в нуле (см. условие (7)).

Поскольку J – банахово пространство, то $\Phi_k \in J$ (подробное доказательство дано в [8]).

Согласно условию (5) имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} V(s)\Phi_k &= \int_0^{2\pi} V(s) e^{-iks'} V(s') \psi ds' = \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-iks'} V(s+s') \psi ds' = e^{iks} \int_s^{2\pi+s} e^{-iks'} V(s') \psi ds' = e^{iks} \Phi_k. \end{aligned} \quad (14)$$

На заключительном этапе в (14) мы использовали равенство (12').

Условие (14) означает, что $(V(s) - e^{iks})\Phi_k = 0 \forall s$. Переходя к пределу $s = 0$ и учитывая, что существование этого предела означает, что $\Phi_k \in D(N)$, окончательно получим

$$N\Phi_k = (k + \theta)\Phi_k. \quad (15)$$

Чтобы завершить доказательство, нужно показать, что $\Phi_k \neq 0$ хотя бы при одном значении k . Последнее утверждение следует из невырожденности J . Действительно, если $\Phi_k = 0 \forall k$, то для произвольного вектора Φ

$$\langle \Phi, \Phi_k \rangle = \int_0^{2\pi} \langle \Phi, V(s)\psi \rangle e^{-iks} ds = 0 \quad \forall k. \quad (16)$$

Поскольку $V(2\pi) = 1$, то функция $T(s) \equiv \langle \Phi, V(s)\psi \rangle$ является периодической. Условие (16) означает, что все члены ряда Фурье этой функции равны нулю, т.е. $T(s) \equiv 0$. Но тогда $T(0) = \langle \Phi, \psi \rangle = 0 \forall \Phi$, т.е. $\psi = 0$ вследствие невырожденности пространства J .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение 1 останется справедливым, если условие (12') заменить условием

$$U(2\pi n)\psi = e^{2i\pi\theta}\psi, \quad (12'')$$

где ψ – некоторый вектор.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Спектр оператора N состоит из чисел $\lambda + k$, $k \in \mathbb{Z}$ (равенство (13) предполагается выполненным), все собственные векторы оператора N имеют вид $a^n\psi_\lambda$ и $(a^+)^n\psi_\lambda$, $n \in \mathbb{N}^+$.

Действительно, из условий (4') непосредственно следует, что

$$N\psi_{\lambda-1} = (\lambda-1)\psi_{\lambda-1}, \quad \psi_{\lambda-1} = a\psi_\lambda, \quad (17)$$

$$N\psi_{\lambda+1} = (\lambda+1)\psi_{\lambda+1}, \quad \psi_{\lambda+1} = a^+\psi_\lambda. \quad (18)$$

Продолжая этот процесс, получим

$$N\psi_{\lambda-n} = (\lambda-n)\psi_{\lambda-n}, \quad \psi_{\lambda-n} = a^n\psi_\lambda, \quad (19)$$

$$N\psi_{\lambda+n} = (\lambda+n)\psi_{\lambda+n}, \quad \psi_{\lambda+n} = (a^+)^n\psi_\lambda. \quad (20)$$

Кроме того, в соответствии с (3) имеем

$$\begin{aligned} a\psi_{\lambda+n} &= aa^+\psi_{\lambda+n-1} = \varphi(\lambda+n)\psi_{\lambda+n-1}, \\ a^+\psi_{\lambda-n} &= a^+a\psi_{\lambda-n+1} = \varphi(\lambda-n+1)\psi_{\lambda-n+1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P_n(a, a^+)\psi_\lambda = \sum C_k\psi_{\lambda+k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (21)$$

где $P_n(a, a^+)$ – произвольный полином от a и a^+ . Введем J_0 – пространство всех векторов $P_n(a, a^+)\psi_\lambda$. Очевидно, что J_0 натянуто на векторы $\psi_{\lambda+k}$ и других собственных векторов в J_0 у оператора N нет. Поскольку J_0 плотно в J , наше утверждение доказано.

В качестве циклического вектора вместо ψ_λ можно взять произвольный вектор $\psi \in J_0$. Таким образом, построенное представление неприводимо.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из условий (4) непосредственно следует, что $[aa^+, N] = [a^+a, N] = 0$. А значит, вследствие неприводимости представления $a^+a\psi_{\lambda+k} = b_k\psi_{\lambda+k}$. Коэффициенты b_k определяют функцию $\varphi(N)$ в (3). Из условий (4') следует, что если $a^+a = \varphi(N)$, то $aa^+ = \varphi(N+1)$. Отметим, что в общем случае связь между a^+a и N не обязана быть однозначной (см. сноску 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для данного J_0 , вообще говоря, существуют различные замыкания $\bar{J}_0$, соответствующие различным банаховым нормам на J_0 . Однако всегда можно построить пространство Крейна K такое, что $\bar{J}_0 = K$. Для этого введем ортонормированные собственные векторы оператора N

$$e_k = \frac{\psi_{\lambda+k}}{|\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle|^{\frac{1}{2}}}, \quad \langle e_k, e_k \rangle = \delta_{\lambda k} \delta_k,$$

где $\delta_k = \pm 1$. Подчеркнем, что невырожденность пространства J исключает случай нейтральных собственных векторов N . Действительно, если $\langle \psi_{\lambda+k_0}, \psi_{\lambda+k_0} \rangle = 0$, то вследствие (21) $\psi_{\lambda+k_0} \perp J_0$, а следовательно, $\psi_{\lambda+k_0} \perp J$, т.е. $\psi_{\lambda+k_0} = 0$. Разбив множество векторов e_k на множества положительных e_k^+ и отрицательных e_k^- векторов, $\langle e_k^\pm, e_k^\pm \rangle = \pm 1$, получим разложение пространства J_0 на предгильбертово J_0^+ и анти-предгильбертово J_0^- пространства:

$$J_0 = J_0^+ \oplus J_0^-, \quad J_0^+ \perp J_0^-.$$

Пополняя $J_0^\pm$ относительно исходного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$, приходим к пространству Крейна

$$K = J_0^+ \oplus J_0^-. \quad (22)$$

Таким образом, регулярное представление обобщенной гейзенберговской алгебры в J эквивалентно регулярному представлению в пространстве Крейна.

3. КЛАССЫ РЕГУЛЯРНЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ R -АЛГЕБРЫ

Прежде всего покажем, что R -алгебра является обобщенной алгеброй Гейзенберга. Для этого, очевидно, надо установить существование оператора N , удовлетворяющего условиям (4) и коммутирующего с R . Непосредственная проверка показывает, что оператор

$$N_0 = \frac{1}{2} \{a, a^+\} \quad (23)$$

удовлетворяет нужным требованиям. Поскольку мы рассматриваем неприводимые представления, то общий вид оператора N есть

$$N = N_0 + CI. \quad (24)$$

Константу C естественно выбрать так, чтобы при $\nu = 0$ (случай ККС) оператор N имел обычный вид $N = a^+a$. Этому условию удовлетворяет $C = -(\nu + 1)/2$.

Поскольку $[R, N] = 0$, то

$$R\psi_{\lambda+k} = R_{\lambda+k}\psi_{\lambda+k}. \quad (25)$$

Из условий $\{a, R\} = \{a^+, R\} = 0$, $R^2 = I$ легко получить, что

$$R_{\lambda+k} = \pm(-1)^k, \quad \text{т.е.} \quad R = \pm(-1)^{N-\lambda}. \quad (26)$$

Далее непосредственные вычисления дают

$$aa^+ = (N + 1) + \frac{\nu}{2}(1 + R), \quad (27)$$

$$a^+a = N + \frac{\nu}{2}(1 - R). \quad (28)$$

Равенства (27) и (28) позволяют связать величины $\langle \psi_{\lambda+k\pm 1}, \psi_{\lambda+k\pm 1} \rangle$ и $\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle$, а именно:

$$\langle \psi_{\lambda+k+1}, \psi_{\lambda+k+1} \rangle = \left(\lambda + k + 1 + \frac{\nu}{2}(1 + R_{\lambda+k}) \right) \langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad (29)$$

$$\langle \psi_{\lambda+k-1}, \psi_{\lambda+k-1} \rangle = \left(\lambda + k + \frac{\nu}{2}(1 - R_{\lambda+k}) \right) \langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}^-. \quad (30)$$

Из соотношений (29), (30) можно найти все возможные варианты спектра оператора N .

1. Спектр N ограничен снизу. В этом случае существует такое λ , что

$$a\psi_\lambda = 0, \quad (31)$$

и естественно выбрать ψ_λ в качестве циклического вектора. При этом $\text{Sp } N = \lambda + n$, $n \in \mathbb{N}$. Подчеркнем, что вследствие невырожденности пространства J условие (31), т.е. условие $\psi_{\lambda-1} = 0$, эквивалентно условию $\langle \psi_{\lambda-1}, \psi_{\lambda-1} \rangle = 0$, поскольку, как уже отмечалось, оператор N не имеет собственных нейтральных векторов. Согласно соотношению (29) в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle &= \left(\lambda + k + \frac{\nu}{2}(1 + R_{\lambda+k-1}) \right) \left(\lambda + k - 1 + \frac{\nu}{2}(1 + R_{\lambda+k-2}) \right) \times \cdots \\ &\cdots \times \left(\lambda + 1 + \frac{\nu}{2}(1 + R_\lambda) \right) \langle \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned} \quad (32)$$

Из соотношения (30) и условия (31) следует, что

$$\lambda + \frac{\nu}{2}(1 - R_\lambda) = 0. \quad (33)$$

Таким образом, существуют две возможности:

$$\lambda = 0 \quad \text{и} \quad R\psi_\lambda = \psi_\lambda, \quad (34)$$

$$\lambda = -\nu \quad \text{и} \quad R\psi_\lambda = -\psi_\lambda. \quad (35)$$

2. Спектр N ограничен сверху. В этом случае существует такое $\tilde{\lambda}$, что

$$a^+\psi_{\tilde{\lambda}} = 0. \quad (36)$$

Вектор $\psi_{\tilde{\lambda}}$ рассматривается в качестве циклического вектора, условие (36) эквивалентно условию $\langle \psi_{\tilde{\lambda}+1}, \psi_{\tilde{\lambda}+1} \rangle = 0$, $\text{Sp } N = \tilde{\lambda} - n$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\tilde{\lambda}+k}, \psi_{\tilde{\lambda}+k} \rangle &= \left(\tilde{\lambda} + k + 1 + \frac{\nu}{2}(1 - R_{\tilde{\lambda}+k+1}) \right) \left(\tilde{\lambda} + k + 2 + \frac{\nu}{2}(1 - R_{\tilde{\lambda}+k+2}) \right) \times \cdots \\ &\cdots \times \left(\tilde{\lambda} + \frac{\nu}{2}(1 - R_{\tilde{\lambda}}) \right) \langle \psi_{\tilde{\lambda}}, \psi_{\tilde{\lambda}} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}^-. \end{aligned} \quad (37)$$

Вследствие (29) условие (36) означает, что

$$\tilde{\lambda} + 1 + \frac{\nu}{2}(1 + R_{\tilde{\lambda}}) = 0. \quad (38)$$

Снова имеем две возможности:

$$\tilde{\lambda} = -1 \quad \text{и} \quad R\psi_{\tilde{\lambda}} = -\psi_{\tilde{\lambda}}, \quad (39)$$

$$\tilde{\lambda} = -(1 + \nu) \quad \text{и} \quad R\psi_{\tilde{\lambda}} = \psi_{\tilde{\lambda}}. \quad (40)$$

3. Оператор N имеет конечный спектр. В этом случае существуют λ и $\tilde{\lambda}$ такие, что

$$a\psi_{\lambda} = 0, \quad a^+\psi_{\tilde{\lambda}} = 0. \quad (41)$$

В соответствии с равенствами (33) и (37) это возможно в двух случаях:

$$\lambda = 0, \quad \tilde{\lambda} = 2n, \quad \nu = -(2n + 1) \quad (42)$$

(это представление было найдено Плющам) и

$$\lambda = -(1 + \nu), \quad \tilde{\lambda} = -1, \quad \nu = 2n + 1 \quad (43)$$

(это новое представление).

4. Неограниченный спектр. В этом случае

$$a\psi_{\lambda+k} \neq 0, \quad a^+\psi_{\lambda+k} \neq 0 \quad \forall k, \quad \text{Sp } N = \lambda + k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (44)$$

В заключение рассмотрим связь между метрикой пространства J и видом спектра N . Если $\text{Sp } N$ не ограничен снизу, метрика индефинитна. Это утверждение вытекает непосредственно из соотношения (30). Если же $\text{Sp } N$ конечен, метрика также индефинитна, за исключением тривиального случая, когда представление имеет одну размерность (см. уравнения (32) и (34)).

Если $\text{Sp } N$ ограничен снизу, то при $\lambda = 0$ метрика положительна, когда $\nu \geq -1$, и индефинитна, когда $\nu < -1$. В случае $\lambda = -\nu$ метрика положительна, когда $\nu \leq 1$, и индефинитна, когда $\nu > 1$. Эти утверждения следуют непосредственно из соотношений (29) и (32).

Отметим, что $\text{Sp } N$ полностью характеризует представление R -алгебры, т.е. определяет его с точностью до унитарной эквивалентности. Это утверждение следует из теоремы, доказанной в [9, раздел 3].

Таким образом, при весьма общих условиях регулярности дано описание всех неприводимых представлений R -деформированной алгебры Гейзенберга в произвольном слабоплотном, невырожденном пространстве с индефинитным скалярным произведением.

Благодарности. Авторы признательны М. С. Плющам, чьи исследования инициировали настоящую работу.

Список литературы

- [1] *M. S. Plyushchay*. Nucl. Phys. B. 1997. V. 491. P. 619.
- [2] *M. S. Plyushchay*. Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 2953.
- [3] *F. Strocchi, A. S. Wightman*. J. Math. Phys. 1974. V. 15. P. 2198.
- [4] *G. Morchio, F. Strocchi*. Ann. Inst. Henri Poincaré. 1980. V. 33. P. 251.
- [5] *F. Strocchi*. Selected Topics on the General Properties of Quantum Field Theory. Singapore: World Scientific, 1993.
- [6] *C. R. Putnam*. Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.
- [7] *M. Mnatsakanova, G. Morchio, F. Strocchi, Yu. Vernov*. J. Math. Phys. 1998. V. 29. P. 2969.
- [8] *M. N. Mnatsakanova, G. Morchio, Yu. S. Vernov*. Canonical commutation relations in a positive and an indefinite metric spaces. In: Proc. of the International Seminar “Quarks-96”. V. 2. Eds. V. A. Matveev, A. A. Penin, V. A. Rubakov, A. N. Tavkhelidze. M.: INR RAS, 1997. P. 51.
- [9] *Ю. С. Вернов, М. Н. Мнацаканова*. ТМФ. 1997. Т. 113. С. 355.
- [10] *J. Bognar*. Indefinite Inner Product Spaces. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1974.
- [11] *Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов*. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
- [12] *M. Chaichian, M. N. Mnatsakanova, Yu. S. Vernov*. J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 2053.

Поступила в редакцию 29.V.2000 г.