Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Кузнецов, Вл. К. Рерих, М. Г. Гладуш, Применение цепочек ББГКИ для исследования влияния локального поля на скорость радиационной релаксации квантовых систем в диэлектрической среде, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 2, 261–280

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6680>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:33:11

© 2011 г. Д. В. Кузнецов^{*†}, Вл. К. Рерих^{*}, М. Г. Гладуш^{†‡}

ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕПОЧЕК ББГКИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ НА СКОРОСТЬ РАДИАЦИОННОЙ РЕЛАКСАЦИИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Рассмотрена модель атомных излучателей в диэлектрической среде и ее оптические характеристики. В рамках микроскопического подхода и метода Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона получена цепочка зацепляющихся уравнений для редуцированных матриц плотности и корреляционных операторов атомных частиц и мод квантованного поля. Выведена замкнутая система уравнений, описывающая эволюцию излучателей в модельной среде при воздействии внешнего излучения. Произведен расчет эффективной скорости спонтанной релаксации при наличии локального поля, создаваемого средой. Впервые продемонстрирована связь микро- и макроскопического подходов к решению задачи об изменении скорости спонтанного излучения в среде.

Ключевые слова: цепочка ББГКИ, локальное поле, радиационная релаксация, диэлектрическая среда, функция Грина.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о влиянии диэлектрической среды на оптические характеристики излучающей атомной системы привлекает внимание исследователей уже многие годы. Основной характеристикой излучателя является скорость его радиационной релаксации, которая может существенно зависеть от свойств и состояния окружающей среды. Подходы к вычислению скорости релаксации делятся на макроскопические [1]–[3] и микроскопические [4]–[6] и приводят к различным функциональным зависимостям и численным оценкам. В общем виде выражение для скорости радиационной релаксации (спонтанного перехода) атома или молекулы в среде можно записать следующим образом:

$$\Gamma = \Lambda\Gamma_0, \quad (1)$$

^{*}Государственный научный центр РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований, Троицк, Московская обл., Россия. E-mail: dkuznet@yandex.ru

[†]Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, Владимир, Россия

[‡]Институт спектроскопии РАН, Троицк, Московская обл., Россия

где Λ – коэффициент, определяемый характеристиками среды, а Γ_0 – скорость радиационной релаксации в вакууме. На сегодняшний день вопрос об общей структуре Λ остается открытым. В первом приближении коэффициент $\Lambda = \sqrt{\varepsilon}$, где ε – диэлектрическая проницаемость среды. Такую зависимость можно получить непосредственно из золотого правила Ферми, если учесть изменение плотности состояний фотонов в среде. Далее, более обстоятельные теории определяют зависимость $\Lambda = \varepsilon l^\alpha(\varepsilon)$. Здесь $l(\varepsilon)$ – коэффициент пропорциональности между полем, эффективно действующим на отдельный атом (локальным полем), и средним максвелловским полем $\mathbf{E}$ в среде:

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = l(\varepsilon)\mathbf{E}. \quad (2)$$

При этом целочисленный показатель степени α может иметь значения 1 или 2 в зависимости от применяемой модели и общего подхода к проблеме. Данное расхождение отражено, например, в работах [6] и [7]. Функция $l(\varepsilon)$, в свою очередь, также зависит от модели, описывающей наличие среды вокруг излучателя. Здесь следует выделить наиболее распространенные модели “виртуальной” и “реальной” полостей вокруг излучающего центра. Модель виртуальной полости основывается на известном выражении Лоренца для локального поля [8]

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}, \quad (3)$$

где $\mathbf{P}$ – макроскопическая поляризация. В рамках этой модели $l(\varepsilon) = (\varepsilon + 2)/3$. Другой подход – модель реальной полости, когда атом-излучатель находится в пустой сфере, окруженной сплошным диэлектриком. Коэффициент, вычисленный в такой конфигурации, будет равен $l(\varepsilon) = 3\varepsilon/(2\varepsilon + 1)$. Различные подходы к исследованию динамики атома-излучателя в среде приводят к выбору как модели реальной полости, так и к модели виртуальной полости. Проводимые эксперименты не могут дать однозначного ответа о правильности одной из моделей, так как очень сложно экспериментально отделить исследуемые атомы от внешнего окружения и точно измерить зависимость скорости радиационной релаксации излучателя от характеристик среды [9].

Целью настоящей работы является изучение в рамках микроскопического подхода оптических свойств атомов, помещенных в диэлектрическую среду. Результатом исследования будет получение выражения для скорости радиационной релаксации излучателей в среде из начального гамильтониана системы. Ключевым моментом в настоящей работе является применение адаптированного метода Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона (ББГКИ) к оптической системе “излучатель в диэлектрике” [10], [11]. В классическом методе ББГКИ используется функция распределения состояний системы, зависящая от координат, импульсов и времени. Из уравнения Лиувилля, эквивалентного системе уравнений Гамильтона, последовательно выводятся уравнения для одно-, двух- и многочастичных функций распределения. В результате система описывается зацепляющейся цепочкой уравнений [12]. В рамках этих уравнений, как показано в работе [13], можно получить выражение (3) для эффективного поля Лоренца.

Адаптированный метод ББГКИ для задач квантовой оптики использует понятие полной матрицы плотности системы в гильбертовом пространстве и уравнение фон Неймана эволюции системы. Введение редуцированных матриц плотности и применение кластерного разложения приводит (так же, как и в классическом случае)

Рис. 1. Схема двухуровневых атомов.

к зацепляющейся цепочке уравнений [11]. Существенным моментом в адаптации метода является необходимость учета полного числа квантовых частиц в системе при выводе цепочки. Внутренняя самосогласованность метода позволяет автоматически исключить самовоздействие излучателя [14]. Система зацепляющихся уравнений для редуцированных матриц плотности полностью описывает поведение атомной системы и электромагнитного поля. Решение этой системы с учетом обобщенного поляризационного приближения [11] записывается через полевые величины и тензор Грина.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 формулируется модель системы и выводится цепочка уравнений БГКИ для матриц плотности. В разделе 3, используя определение тензора Грина электромагнитного поля, мы исключаем моды квантованного поля и вводим макроскопические величины. В разделе 4 записывается основная система уравнений. Раздел 5 посвящен вычислению скорости радиационной релаксации атома в среде.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Модель. Для исследования оптических характеристик атомов в среде часто используют стекла, допированные ионами щелочных или редкоземельных атомов, при очень низких температурах $\sim 1.5\text{--}10\text{ K}$ [15]. Внешнее лазерное поле в подобных экспериментах настраивают в резонанс с одним из переходов исследуемого атома или иона, при этом переходы атомов среды (стекла) с полем нерезонансны. Благодаря низким температурам возможно избавиться от паразитного уширения линии излучения атомов эффектом Доплера и столкновительными процессами, а нерезонансность атомов среды означает отсутствие собственного излучения, что позволяет исследовать радиационные характеристики заданных излучателей с большей точностью.

Рассматриваемую систему мы будем описывать с помощью двух наборов невырожденных двухуровневых атомов типов a и b во внешнем электромагнитном поле (см. рис. 1). К атомам a -типа относятся двухуровневые атомы-излучатели, помещенные в диэлектрическую среду атомов типа b . Частота перехода атомов a -типа из возбужденного состояния в основное ($|2\rangle \rightarrow |1\rangle$) равна частоте внешнего электромагнитного поля ω_{12} , которая лежит в оптическом диапазоне. Для двухуровневых атомов b -типа (атомы среды) частота перехода из верхнего уровня в нижнее

($|4\rangle \rightarrow |3\rangle$) значительно отличается от частоты внешнего поля и равна ω_{34} . Возможность заменить многоуровневый атом среды моделью двухуровневого атома связана с тем, что все переходы атомов среды нерезонансны внешнему полю. В этом случае, как будет показано ниже, их вклад в диэлектрическую проницаемость будет иметь аддитивный характер, и атомы среды можно заменить моделью эффективно двухуровневого атома [5]. Взаимодействие атомов с полем будем рассматривать в рамках электрического дипольного приближения. Мы считаем, что атомы не взаимодействуют друг с другом непосредственно, их взаимодействие осуществляется лишь посредством электромагнитного поля. Поскольку целью является исследование радиационного затухания излучателя, рассмотрение столкновительных процессов и учет эффекта Доплера мы опустим. При этом стоит отметить, что указанные выше процессы приводят к уширению спектральной линии излучения, но, так как скорость радиационной релаксации является интегральной характеристикой спектра, в оптическом диапазоне частот вклад от этих процессов даст незначительную поправку к искомой скорости [16].

Также при описании взаимодействия до определенного момента мы не будем применять резонансное приближение и откажемся от использования приближения вращающейся волны [8]. Такой подход позволит корректно использовать полные функции Грина электромагнитного поля в вакууме.

Гамильтониан. Гамильтониан рассматриваемой системы в представлении Шредингера имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad \hat{H}_0 = \sum_a \hbar\omega_{12}\hat{\sigma}_a^+\hat{\sigma}_a^- + \sum_b \hbar\omega_{34}\hat{\sigma}_b^+\hat{\sigma}_b^- + \sum_f \hbar\omega_{(f)}\hat{a}_f^\dagger\hat{a}_f, \quad (4)$$

где $\hat{H}_0$ – невозмущенный гамильтониан трехкомпонентной системы. Первое слагаемое в $\hat{H}_0$ представляет собой гамильтониан невозмущенных атомов a -типа с повышающим ($\hat{\sigma}_a^+$) и понижающим ($\hat{\sigma}_a^-$) энергетическое состояние операторами, второе слагаемое – гамильтониан невозмущенных атомов b -типа с соответствующими повышающим ($\hat{\sigma}_b^+$) и понижающим ($\hat{\sigma}_b^-$) операторами. Третье слагаемое описывает гамильтониан свободного квантованного электромагнитного поля с операторами рождения ($\hat{a}_f^\dagger$) и уничтожения ($\hat{a}_f$) фотона частоты $\omega_{(f)}$ с волновым вектором $\mathbf{k}$ и вектором поляризации $\mathbf{e}_{(\mathbf{k},\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$. Волновой вектор и вектор поляризации обозначены совокупным индексом $f \equiv \{\mathbf{k}, \alpha\}$. Оператор V взаимодействия атомов a - и b -типа с модами квантованного электромагнитного поля f будем рассматривать в дипольном приближении:

$$\hat{V} = \sum_a \sum_f \hat{V}_{af} + \sum_b \sum_f \hat{V}_{bf}, \quad \hat{V}_{af} = -\hat{\mathbf{d}}_a \cdot \hat{\mathbf{E}}_f, \quad \hat{V}_{bf} = -\hat{\mathbf{d}}_b \cdot \hat{\mathbf{E}}_f, \quad (5)$$

где точка обозначает скалярное произведение векторов. Поведение трехкомпонентной системы будет описываться полной матрицей плотности $\rho(t)$, которая подчиняется уравнению фон Неймана.

В представлении взаимодействия уравнение будет иметь вид

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [\hat{V}, \rho], \quad (6)$$

квадратные скобки здесь и далее обозначают коммутатор. Операторы дипольного момента атомов в этом представлении будут иметь явные временные зависимости:

$$\hat{\mathbf{d}}_a(t) = \mathbf{d}_{12}\hat{\sigma}_a^- e^{-i\omega_{12}t} + \mathbf{d}_{12}^*\hat{\sigma}_a^+ e^{i\omega_{12}t}, \quad \hat{\mathbf{d}}_b(t) = \mathbf{d}_{34}\hat{\sigma}_b^- e^{-i\omega_{34}t} + \mathbf{d}_{34}^*\hat{\sigma}_b^+ e^{i\omega_{34}t}, \quad (7)$$

где $\mathbf{d}_{12}$ и $\mathbf{d}_{34}$ – соответствующие матричные элементы дипольных переходов (см. рис. 1). Для оператора квантованного электромагнитного поля в точке $\mathbf{r}$ получим

$$\hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega(f)}{\mathbb{V}}} (\hat{a}_f \mathbf{e}_{(f)} e^{-i\omega(f)t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \hat{a}_f^\dagger \mathbf{e}_{(f)}^* e^{i\omega(f)t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}), \quad (8)$$

где $\mathbb{V}$ – объем квантования, верхний индекс $*$ обозначает комплексное сопряжение. Далее считаем, что в начальный момент времени все атомные частицы не взаимодействуют с полем и, следовательно, не скоррелированы. При этом электромагнитное поле находится в когерентном состоянии, что соответствует наличию внешнего лазерного излучения. Таким образом, полная матрица плотности в начальный момент времени может быть представлена в виде произведения одночастичных матриц плотности:

$$\rho(0) = \prod_f |\alpha_f\rangle\langle\alpha_f| \prod_a \rho_a(0) \prod_b \rho_b(0). \quad (9)$$

При этом среднее число фотонов в моде f равно $|\alpha_f|^2$. Для аналитического решения уравнения фон Неймана вместе с начальным условием воспользуемся развитым ранее формализмом ББГКИ для редуцированных матриц плотности.

Цепочка ББГКИ. В стандартном подходе [11] к построению цепочки ББГКИ для решения задач термодинамики, физики плазмы и др. применяется термодинамический предел, в результате чего исключается одно из слагаемых. Важно отметить, что такое рассмотрение является существенным препятствием для решения задач квантовой оптики. Так, след матрицы корреляционного оператора в стандартном подходе не будет сохраняться. Подробнее это будет рассмотрено ниже. Предлагаемое в настоящей работе построение цепочки ББГКИ позволяет правильно вывести цепочку уравнений с сохранением следа. Из этой новой цепочки нам удалось самосогласованно получить выражение для локального поля, действующего на атом, из начального гамильтониана. Учетные слагаемые также будут влиять и на оптические свойства системы такие, как спектр излучения и спектр поглощения [17], однако рассмотрение последнего вопроса выходит за рамки настоящей статьи.

Определим редуцированные матрицы плотности через полную матрицу плотности ρ путем взятия частичного следа:

$$\rho_{ABF} = \text{Tr}_{A'B'F'}(\rho), \quad \text{Tr}_{ABF} \rho_{ABF} = 1, \quad (10)$$

где A', B', F' – набор атомов a - и b -типов и мод квантованного электромагнитного поля, по которым происходит усреднение (взятие следа), A, B, F – остальные частицы. Таким образом, $A + A', B + B', F + F'$ – полный набор атомов обоих типов и мод электромагнитного поля соответственно. Взяв неполный след от уравнения фон

Неймана (6), получим цепочку уравнений ББГКИ в представлении взаимодействия:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{ABF} - [\hat{V}_{AF} + \hat{V}_{BF}, \rho_{ABF}] = \sum_{f'}^{F'} \text{Tr}_{f'} [\hat{V}_{Af'} + \hat{V}_{Bf'}, \rho_{ABFf'}] + \sum_{a'}^{A'} \text{Tr}_{a'} [\hat{V}_{a'F}, \rho_{ABFa'}] + \sum_{b'}^{B'} \text{Tr}_{b'} [\hat{V}_{b'F}, \rho_{ABFb'}], \quad (11)$$

где введены обозначения

$$\hat{V}_{AF} = \sum_a^A \sum_f^F \hat{V}_{af}, \quad \hat{V}_{BF} = \sum_b^B \sum_f^F \hat{V}_{bf}, \quad (12)$$

$$\hat{V}_{a'F} = \sum_f^F \hat{V}_{a'f}, \quad \hat{V}_{b'F} = \sum_f^F \hat{V}_{b'f}, \quad \hat{V}_{Af'} = \sum_a^A \hat{V}_{af'}, \quad \hat{V}_{Bf'} = \sum_b^B \hat{V}_{bf'}. \quad (13)$$

В правой части равенства (11) посредством оператора парного взаимодействия описана связь атомов A, B и фотонов F с остальными атомами и фотонами системы $A'B'F'$. Эта система является зацепляющейся, так как уравнение для матрицы плотности ρ_{ABF} содержит в правой части матрицы плотности $\rho_{ABFa'}, \rho_{ABFb'}, \rho_{ABFf'}$, которые, в свою очередь, также выражаются через матрицы плотности следующих порядков.

Решение системы уравнений (11) будем искать с помощью кластерного разложения. Для этого многочастичные матрицы плотности представим в виде суперпозиций одночастичных матриц плотности и операторов межчастичных корреляций $\rho_{af} = \rho_a \rho_f + g_{af}$, $\rho_{ab} = \rho_a \rho_b + g_{ab}$ и т.д., при этом взятие следа по любым переменным от операторов межчастичных корреляций $g_{af}, g_{ab}, g_{ff'}, g_{aa'f'}, \dots$ равно нулю (например, $\text{Tr}_a(g_{af}) = 0$). Далее мы будем ограничены приближениями обрыва ББГКИ, учитывающими вклады только двухчастичных корреляций, т.е. $g_{abf'} = g_{aa'f'} = g_{a'ff'} = g_{b'ff'} = 0$ и т.д. В рамках данного разложения получим шесть типов уравнений. Уравнение для одночастичной матрицы плотности ρ_a выглядит так:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_a - [\hat{U}_a, \rho_a] = \sum_f \text{Tr}_f [\hat{V}_{af}, g_{af}], \quad \hat{U}_a \equiv \sum_f \langle \hat{V}_{af} \rho_f \rangle, \quad \langle \hat{V}_{af} \rho_f \rangle \equiv \text{Tr}_f (\hat{V}_{af} \rho_f), \quad (14)$$

где $\hat{U}_a$ — оператор взаимодействия среднего электрического поля с атомом a -типа. Угловые скобки означают взятие следа по повторяющемуся индексу. Это основное уравнение, определяющее динамику одночастичной атомной матрицы плотности ρ_a . Коммутатор в левой части $[\hat{U}_a, \rho_a]$ определяет взаимодействие излучения с атомом. Правая часть уравнения отвечает за вклад корреляции атом–поле в поведение ρ_a и учитывает спонтанное излучение, лэмбовский сдвиг, переходы, индуцируемые некогерентным рассеянным излучением, и другие процессы.

Положим, что атомы среды (b -типа) будут находиться в основном состоянии, так как частота их перехода существенно отличается от частоты внешнего поля, поэтому матрицу плотности нерезонансных атомов среды можно положить $\rho_b =$

const. Запишем уравнение для однофотонной матрицы плотности ρ_f :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \rho_f - [\hat{U}_f, \rho_f] &= \sum_a \text{Tr}_a [\hat{V}_{af}, g_{af}] + \sum_b \text{Tr}_b [\hat{V}_{bf}, g_{bf}], \\ \hat{U}_f &\equiv \sum_a \langle \hat{V}_{af} \rho_a \rangle + \sum_b \langle \hat{V}_{bf} \rho_b \rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\hat{U}_f$ – оператор взаимодействия моды f квантованного поля со средним дипольным моментом атомной системы a, b -типа. Из уравнения для фотонной матрицы плотности (15) можно получить волновое уравнение для электромагнитного поля $\mathbf{E}$. Выражение $[\hat{U}_f, \rho_f]$ описывает вклад в эволюцию однофотонной матрицы плотности ρ_f за счет взаимодействия моды поля с макроскопической поляризацией материальной системы, складывающийся из компонент a и b . Слагаемое в правой части равенства учитывает квантовые эффекты посредством оператора межчастичных корреляций атом–поле.

Перейдем теперь к выводу уравнения для оператора двухчастичных корреляций g_{af} . При выводе этого уравнения важно не переходить сразу к термодинамическому пределу, а сохранять полное число частиц до конца всех преобразований. Чтобы показать это, выпишем уравнение для ρ_{af} :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{af} - [\hat{V}_{af}, \rho_{af}] = \sum_{a' \neq a} \text{Tr}_{a'} [\hat{V}_{a'f}, \rho_{aa'f}] + \sum_b \text{Tr}_b [\hat{V}_{bf}, \rho_{abf}] + \sum_{f' \neq f} \text{Tr}_{f'} [\hat{V}_{af'}, \rho_{aff'}]. \quad (16)$$

Рассмотрим подробнее первое слагаемое в правой части равенства. Оно представляет собой неполную сумму по всем атомам a -типа, кроме одного: $a' \neq a$. При переходе к постоянной плотности атомов n_a с помощью термодинамического предела в стандартном подходе [11] неполная сумма заменяется выражением

$$\sum_{a' \neq a} \text{Tr}_{a'} [\hat{V}_{a'f}, \rho_{aa'f}] = n_a \text{Tr}_a [\hat{V}_{af}, \rho_{aaaf}] \quad (17)$$

для фотонов, а также происходит замена неполной суммы на полную: $\sum_{f' \neq f} \rightarrow \sum_f$. Эти преобразования в результате приводят к неправильному уравнению для g_{af} :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} g_{af} - [\hat{U}_a + \hat{U}_f, g_{af}] &= [\hat{V}_{af}, \rho_a \rho_f] + \sum_b [\langle \hat{V}_{bf} g_{ab} \rangle, \rho_f] + \sum_{a' \neq a} [\langle \hat{V}_{a'f} g_{aa'} \rangle, \rho_f] + \\ &+ \sum_{f' \neq f} [\langle \hat{V}_{af'} g_{ff'} \rangle, \rho_a]. \end{aligned} \quad (18)$$

Как нетрудно заметить, след по атомным или фотонным переменным перестает быть равным нулю:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \text{Tr}_a g_{af} = [\langle \hat{V}_{af} \rho_a \rangle, \rho_f] \neq 0, \quad i\hbar \frac{d}{dt} \text{Tr}_f g_{af} = [\langle \hat{V}_{af} \rho_f \rangle, \rho_a] \neq 0, \quad (19)$$

что нарушает фундаментальное свойство кластерного разложения $\text{Tr}_a g_{af} = 0$, $\text{Tr}_f g_{af} = 0$. В результате перехода к постоянной плотности происходит учет двух лишних слагаемых, и это приводит к ошибкам.

Забегаая вперед, следует сказать, что правильный учет этих слагаемых устраняет самовоздействие излучателя, исключает рэлеевскую компоненту из некогерентной части спектра излучения и позволяет правильно ввести тензор корреляций компонент некогерентного поля. Чтобы избежать подобного рода ошибок, необходимо сохранять полное число частиц:

$$\sum_{a' \neq a} \text{Tr}_{a'} [\hat{V}_{a'f}, \rho_{aa'f}] = \sum_{a'} \text{Tr}_{a'} [\hat{V}_{a'f}, \rho_{aa'f}] - \text{Tr}_a [\hat{V}_{af}, \rho_{aaf}], \quad (20)$$

$$\sum_{f' \neq f} \text{Tr}_{f'} [\hat{V}_{af'}, \rho_{aff'}] = \sum_{f'} \text{Tr}_{f'} [\hat{V}_{af'}, \rho_{aff'}] - \text{Tr}_f [\hat{V}_{af}, \rho_{aff}]. \quad (21)$$

Такой подход приводит к корректному виду уравнения для оператора g_{af} :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} g_{af} - [\hat{U}_a + \hat{U}_f, g_{af}] &= [\hat{V}_{af} - \langle \hat{V}_{af} \rho_a \rangle - \langle \hat{V}_{af} \rho_f \rangle, \rho_a \rho_f] + \sum_b [\langle \hat{V}_{bf} g_{ab} \rangle, \rho_f] + \\ &+ \sum_{a' \neq a} [\langle \hat{V}_{a'f} g_{aa'} \rangle, \rho_f] + \sum_{f' \neq f} [\langle \hat{V}_{af'} g_{ff'} \rangle, \rho_a]. \end{aligned} \quad (22)$$

Теперь, благодаря корректно учтенным слагаемым $[-\langle \hat{V}_{af} \rho_f \rangle - \langle \hat{V}_{af} \rho_a \rangle, \rho_a \rho_f]$, след по атомным или фотонным переменным точно равен нулю: $\text{Tr}_a g_{af} = 0$, $\text{Tr}_f g_{af} = 0$. Далее, выпишем уравнения для оператора двухфотонной корреляции $g_{ff'}$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} g_{ff'} - [\hat{U}_f + \hat{U}_{f'}, g_{ff'}] &= \sum_a [\langle \hat{V}_{af} g_{af'} \rangle, \rho_f] + \sum_a [\langle \hat{V}_{af'} g_{af} \rangle, \rho_{f'}] + \\ &+ \sum_b [\langle \hat{V}_{bf} g_{bf'} \rangle, \rho_f] + \sum_b [\langle \hat{V}_{bf'} g_{bf} \rangle, \rho_{f'}], \end{aligned} \quad (23)$$

для оператора двухчастичных корреляций g_{ab} :

$$i\hbar \frac{d}{dt} g_{ab} - [\hat{U}_a + \hat{U}_b, g_{ab}] = \sum_f [\langle \hat{V}_{af} g_{bf} \rangle, \rho_a] + \sum_f [\langle \hat{V}_{bf} g_{af} \rangle, \rho_b], \quad (24)$$

и аналогично для $g_{aa'}$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} g_{aa'} - [\hat{U}_a + \hat{U}_{a'}, g_{aa'}] = \sum_f [\langle \hat{V}_{af} g_{a'f} \rangle, \rho_a] + \sum_f [\langle \hat{V}_{a'f} g_{af} \rangle, \rho_{a'}]. \quad (25)$$

Система (14), (15), (22)–(25), описывающая эволюцию двухуровневых атомов в среде, является полностью замкнутой. В дальнейшем переход от фотонных матриц плотности к полевым величинам поможет упростить эту систему уравнений.

3. ПОЛЕВЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Электрическое поле. Определим среднее значение поля через однофотонную матрицу плотности ρ_f :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t, \tau) = \sum_f \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \rho_f(\tau) \rangle. \quad (26)$$

Для отрицательно- и положительно-частотных компонент оператора электрического поля $\widehat{\mathbf{E}}_f = \widehat{\mathbf{E}}_f^+ + \widehat{\mathbf{E}}_f^-$ справедливы коммутационные соотношения [18]

$$\sum_f [\widehat{E}_f^{\pm i}(\mathbf{r}, t), \widehat{E}_f^{j}(\mathbf{r}', t')] = -i\hbar G^{\pm ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'t - t'), \quad (27)$$

где $G^{\pm}$ – опережающая и запаздывающая части тензора Грина электромагнитного поля в вакууме ($G = G^+ + G^-$):

$$G(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{I} + \nabla_r \otimes \nabla_r \right) \frac{\delta(t - r/c) - \delta(t + r/c)}{r}, \quad (28)$$

$\hat{I}$ – единичная матрица, ∇_r – оператор набла; символ $\otimes$ здесь и далее обозначает тензорное произведение векторов. Используя определение (26) и свойства оператора поля (27), уравнение (15) преобразуем к виду (см. приложение 1)

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t, \tau) = \sum_a G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a, t - \tau) \cdot \langle \widehat{\mathbf{d}}_a(\tau) \rho_a(\tau) \rangle + \sum_b G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, t - \tau) \cdot \langle \widehat{\mathbf{d}}_b(\tau) \rho_b(\tau) \rangle. \quad (29)$$

В результате такого преобразования мы перешли от уравнения для матрицы плотности ρ_f к векторному уравнению. Из его вида следует, что $\mathbf{E}$ подчиняется классическому уравнению Максвелла в среде с макроскопической поляризацией

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \sum_a \langle \widehat{\mathbf{d}}_a \rho_a \rangle \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}) + \sum_b \langle \widehat{\mathbf{d}}_b \rho_b \rangle \delta(\mathbf{r}_b - \mathbf{r}), \quad (30)$$

а именно

$$\square_{r,t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t, \tau) = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \theta(\tau - t), \quad (31)$$

где $\theta(\tau \geq t) = 1$ – ступенчатая функция и

$$\square_{r,t} \equiv \text{rot}(\text{rot}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (32)$$

Векторное поле $\widehat{\mathbf{X}}_a$. По аналогии с электрическим полем $\mathbf{E}$ введем определение операторно-векторного поля $\widehat{\mathbf{X}}_a$, описывающего влияние электромагнитного поля на излучатель посредством атомно-фотонной корреляции g_{af} :

$$\widehat{\mathbf{X}}_a(\mathbf{r}, t, \tau) = \sum_f \langle \widehat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) g_{af}(\tau) \rangle. \quad (33)$$

Следуя определению (33), уравнение (22) преобразуется в уравнение для $\widehat{\mathbf{X}}_a$ (см. приложение 2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \widehat{\mathbf{X}}_a(\mathbf{r}, t, \tau) - \frac{1}{i\hbar} [\widehat{U}_a(\tau), \widehat{\mathbf{X}}_a(\mathbf{r}, t, \tau)] = \\ = G^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a, t - \tau) \cdot \rho_a(\tau) \widehat{\mathbf{d}}_a(\tau) + G^-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a, t - \tau) \cdot \widehat{\mathbf{d}}_a(\tau) \rho_a(\tau) - \\ - G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a, t - \tau) \cdot \langle \widehat{\mathbf{d}}_a(\tau) \rho_a(\tau) \rangle \rho_a(\tau) - W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, t, \tau, \tau) \cdot \frac{[\widehat{\mathbf{d}}_a(\tau), \rho_a(\tau)]}{i\hbar} + \\ + \sum_b G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, t - \tau) \cdot \langle \widehat{\mathbf{d}}_{b'}(\tau) g_{ab}(\tau) \rangle + \sum_{a' \neq a} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{a'}, t - \tau) \cdot \langle \widehat{\mathbf{d}}_{a'}(\tau) g_{aa'}(\tau) \rangle. \end{aligned} \quad (34)$$

Первые два слагаемых в правой части равенства отвечают за распространение излучения от источника. Третье слагаемое, появившееся благодаря правильной записи цепочки ББГКИ (22), устраняет самовоздействие источника (см. раздел 5). Четвертое слагаемое с W – тензором корреляций компонент некогерентного поля – описывает взаимодействие атома-излучателя с неклассическим полем, определение будет дано ниже. Последние два слагаемых описывают влияние всех атомов среды и оставшихся излучателей ($a' \neq a$) на распространение излучения посредством межатомных корреляций g_{ab} и $g_{aa'}$.

Тензор корреляций некогерентного поля. Выражение для тензора корреляций компонент некогерентного поля получается из уравнения (23) для оператора межфотонной корреляции $g_{ff'}$ и уравнения для однофотонных матриц плотности (15). Для W вводится следующее определение:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t', \tau) = & \sum_f \sum_{f' \neq f} \langle \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \otimes \hat{\mathbf{E}}_{f'}(\mathbf{r}', t') g_{ff'}(\tau) \rangle \rangle + \\ & + \sum_f \langle \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \otimes \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}', t') : \rho_f(\tau) \rangle \rangle - \\ & - \sum_f \langle \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \rho_f(\tau) \rangle \rangle \otimes \langle \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}', t') \rho_f(\tau) \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (35)$$

Двоеточие ($: :$) означает нормальное упорядочение операторов рождения и уничтожения $\hat{a}_f^\dagger, \hat{a}_f$. Тензор W описывает корреляцию компонент неклассического некогерентного электромагнитного поля. Несложно показать, что для поля, описываемого набором когерентных состояний, данный тензор будет строго равен нулю. Выполнив суммирование по модам, получим уравнение для W (см. приложение 3):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t', \tau) = & \sum_a G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a, t - \tau) \cdot \langle \langle \hat{\mathbf{d}}_a(\tau) \otimes \hat{\mathbf{X}}_a(\mathbf{r}', t', \tau) \rangle \rangle + \\ & + \sum_a \langle \langle \hat{\mathbf{X}}_a(\mathbf{r}, t, \tau) \otimes \hat{\mathbf{d}}_a(\tau) \rangle \rangle \cdot G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a, t' - \tau) + \\ & + \sum_b G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, t - \tau) \cdot \langle \langle \hat{\mathbf{d}}_b(\tau) \otimes \hat{\mathbf{X}}_b(\mathbf{r}', t', \tau) \rangle \rangle + \\ & + \sum_b \langle \langle \hat{\mathbf{X}}_b(\mathbf{r}, t, \tau) \otimes \hat{\mathbf{d}}_b(\tau) \rangle \rangle \cdot G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_b, t' - \tau). \end{aligned} \quad (36)$$

4. ОБЩАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Уравнение (14) для одноатомной матрицы плотности ρ_a , записанное через полевые величины, будет иметь вид

$$\dot{\rho}_a(t) = -\frac{1}{i\hbar} ([\hat{\mathbf{d}}_a, \hat{\mathbf{X}}_a + \rho_a \mathbf{E}]). \quad (37)$$

Круглые скобки здесь означают скалярное произведение векторов, т. е. раскрытие коммутатора следует понимать как

$$([\hat{\mathbf{d}}_a, \hat{\mathbf{X}}_a]) = \hat{\mathbf{d}}_a \cdot \hat{\mathbf{X}}_a - \hat{\mathbf{X}}_a \cdot \hat{\mathbf{d}}_a. \quad (38)$$

Уравнения (24), (25) для операторов межатомных корреляций g_{ab} и $g_{aa'}$ представлены ниже в основной системе уравнений через полевые величины (см. приложение 4). В результате описанных преобразований исходная система уравнений (14), (15), (22)–(25) переходит в систему уравнений для введенных нами полевых величин $\mathbf{E}$, $\hat{\mathbf{X}}_a$ и тензора корреляций компонент некогерентного поля W . Мы считаем, что одноатомная матрица плотности среды ρ_b постоянна во времени $\rho_b = \text{const}$; тогда общая система уравнений запишется в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_a &= -\frac{1}{i\hbar}([\hat{\mathbf{d}}_a, \hat{\mathbf{X}}_a + \rho_a \mathbf{E}]), \\
 \frac{d}{d\tau} \mathbf{E} &= \sum_a G \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a \rangle + \sum_b G \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_b \rho_b \rangle, \\
 \frac{d}{d\tau} \hat{\mathbf{X}}_a - \frac{1}{i\hbar}[\hat{U}_a, \hat{\mathbf{X}}_a] &= G^+ \cdot \rho_a \hat{\mathbf{d}}_a + G^- \cdot \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a - G \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a \rangle \rho_a - \\
 &\quad - W \cdot \frac{[\hat{\mathbf{d}}_a, \rho_a]}{i\hbar} + \sum_b G \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_b g_{ab} \rangle + \sum_{a' \neq a} G \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_{a'} g_{aa'} \rangle, \\
 \frac{d}{d\tau} W &= \sum_a G \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_a \otimes \hat{\mathbf{X}}_a \rangle + \sum_a \langle \hat{\mathbf{X}}_a \otimes \hat{\mathbf{d}}_a \rangle \cdot G + \sum_b G \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_b \otimes \hat{\mathbf{X}}_b \rangle + \\
 &\quad + \sum_b \langle \hat{\mathbf{X}}_b \otimes \hat{\mathbf{d}}_b \rangle \cdot G, \\
 \dot{g}_{ab} - \frac{1}{i\hbar}[\hat{U}_a + \hat{U}_b, g_{ab}] &= -\frac{[\hat{\mathbf{d}}_b, \rho_b]}{i\hbar} \cdot \hat{\mathbf{X}}_a - \frac{[\hat{\mathbf{d}}_a, \rho_a]}{i\hbar} \cdot \hat{\mathbf{X}}_b, \\
 \dot{g}_{aa'} - \frac{1}{i\hbar}[\hat{U}_a + \hat{U}_{a'}, g_{aa'}] &= -\frac{[\hat{\mathbf{d}}_{a'}, \rho_{a'}]}{i\hbar} \cdot \hat{\mathbf{X}}_a - \frac{[\hat{\mathbf{d}}_a, \rho_a]}{i\hbar} \cdot \hat{\mathbf{X}}_{a'}.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Полученная система (39) наиболее полно описывает эволюцию атомов-излучателей в среде. При разрешении этой системы относительно ρ_a в рамках выбранных приближений мы будем использовать следующие начальные значения. Операторы корреляций частиц в начальный момент времени равны нулю: $g_{ab}(0) = 0$, $g_{aa'}(0) = 0$. Тензор корреляций компонент поля ввиду начальных условий также равен нулю: $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t', 0) = 0$. Векторное поле при $\tau = 0$ равно нулю: $\hat{\mathbf{X}}_a(\mathbf{r}, t, 0) = 0$, так как мы считаем, что в начальный момент времени атомно-фотонные корреляции отсутствуют: $g_{af}(0) = 0$. Для электрического поля $\mathbf{E}$ начальные условия определяют наличие внешнего лазерного излучения $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$. Однако для сокращения записи уравнений мы опустим соответствующие слагаемые и будем лишь подразумевать их наличие. Последнее формальное упрощение никак не влияет на вывод основных результатов.

Перед тем как перейти к вычислению скорости радиационной релаксации в среде, рассмотрим отдельно влияние перерассеяния W на эволюцию одноатомной матрицы плотности. Для этого в системе (39) оставим только интересующие нас слагаемые:

$$\dot{\rho}_a = -\frac{1}{i\hbar}([\hat{\mathbf{d}}_a, \hat{\mathbf{X}}_a]), \quad \hat{\mathbf{X}}_a = -\int_0^t d\tau W \cdot \frac{[\hat{\mathbf{d}}_a, \rho_a]}{i\hbar}. \tag{40}$$

В результате подстановки $\hat{\mathbf{X}}_a$ в уравнение для ρ_a и взятия соответствующего интеграла в марковском приближении, а также использования приближения вращаю-

щейся волны получим выражение для оператора вынужденной релаксации:

$$\dot{\rho}_a(t) = -\frac{\Gamma_W}{2}(\rho_a - \hat{\sigma}_a^- \rho_a \hat{\sigma}_a^+ - \hat{\sigma}_a^+ \rho_a \hat{\sigma}_a^-), \quad \Gamma_W = \frac{4}{\hbar^2} \int_0^t d\tau (\mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{d}_{12}) \cos(\omega_{12}(t-\tau)). \quad (41)$$

Для матричного элемента матрицы плотности

$$\dot{\rho}_{22}(t) = -\frac{\Gamma_W}{2}(\rho_{22}(t) - \rho_{11}(t)), \quad (42)$$

откуда следует, что слагаемое с W отвечает за вынужденные переходы. Вклад, вносимый тензором W в затухание одноатомной матрицы плотности, будет равен

$$\rho_{22}(t) \sim e^{-\Gamma_W t}. \quad (43)$$

5. СКОРОСТЬ РАДИАЦИОННОЙ РЕЛАКСАЦИИ В СРЕДЕ

Найти аналитически решение общей системы уравнений (39) представляется весьма затруднительным, однако при некоторых предположениях, указанных ниже, систему можно несколько упростить и разрешить относительно уравнения для одноатомной матрицы плотности ρ_a . Для его вывода необходимо выразить величины $\mathbf{E}$ и $\hat{\mathbf{X}}_a$ через матрицы плотности ρ_a и ρ_b и операторы дипольного момента $\hat{\mathbf{d}}_a$ и $\hat{\mathbf{d}}_b$. Это можно сделать путем последовательной подстановки формальных решений уравнений для операторов межчастичных корреляций g_{ab} , $g_{aa'}$ в уравнение для $\hat{\mathbf{X}}_a$. Слагаемое $[\hat{U}_a, \hat{\mathbf{X}}_a](i\hbar)^{-1}$, входящее в уравнение $\hat{\mathbf{X}}_a$ системы (39), внесет поправку к скорости радиационной релаксации, пропорциональную отношению квадрата частоты Раби к квадрату частоты перехода [16], [19]. Так как частота перехода рассматривается в оптическом диапазоне, а частота Раби – в области радиочастот, то такие поправки можно считать пренебрежимо малыми, и указанное слагаемое можно не учитывать в уравнении для $\hat{\mathbf{X}}_a$. Вычисления будем проводить в предположении, что атомы b -типа образуют однородную среду с постоянной плотностью n_b . При этом атомы-излучатели распределены в этой среде равномерно с постоянной плотностью n_a , причем будем считать, что плотность излучателей много меньше плотности среды: $n_a \ll n_b$.

Среднее значение электрического поля $\mathbf{E}$ в среде определяется индуцированной поляризацией, вклад в которую вносят как средние значения дипольных моментов атомов среды, так и излучателей, что следует из второго уравнения системы (39). Ввиду малой плотности излучателей по сравнению с плотностью среды не будем учитывать вклад межатомных корреляций $g_{aa'}$ в уравнении для вектора $\hat{\mathbf{X}}_a$. В то же время влияние среды на излучатель будет выражаться через оператор межатомных корреляций g_{ab} . Рассмотрим подробнее уравнение для g_{ab} основной системы (39). Здесь коммутатором $[\hat{U}_a + \hat{U}_b, g_{ab}]$ в левой части уравнения можно пренебречь, так как его учет дает лишь малую поправку к скорости радиационной релаксации, пропорциональную отношению квадрата частоты Раби к квадрату частоты перехода [16], [19]. Первое слагаемое $[\hat{\mathbf{d}}_b, \rho_b] \cdot \hat{\mathbf{X}}_a$ в правой части уравнения при подстановке формального решения g_{ab} в уравнение для векторного поля $\hat{\mathbf{X}}_a$ даст величину, пропорциональную $\hat{\mathbf{X}}_{a_2}$, и будет определять тензор поляризуемости среды β . Второе слагаемое $[\hat{\mathbf{d}}_a, \rho_a] \cdot \hat{\mathbf{X}}_b$ при подстановке в уравнение для $\hat{\mathbf{X}}_a$ даст $G \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_b \otimes \hat{\mathbf{X}}_b \rangle \cdot [\hat{\mathbf{d}}_a, \rho_a]$. Это слагаемое, как и слагаемое $W \cdot [\hat{\mathbf{d}}_a, \rho_a]$, входящее в

Рис. 2. Атом-излучатель окружен пустой ($\varepsilon = 1$) сферой. Снаружи сферы диэлектрическая среда с $\varepsilon = 1 + 4\pi\beta$ (модель реальной полости).

$\hat{\mathbf{X}}_a$, будет описывать только вынужденные переходы (из-за операторного сомножителя $[\hat{\mathbf{d}}_a, \rho_a]$, см. формулу (40)). Таким образом, эти слагаемые не дают вклада в величину скорости спонтанной радиационной релаксации в среде Γ_ε .

Здесь необходимо отметить, что рассмотрение атомов реальной среды с большим количеством нерезонансных переходов приведет к аддитивной поправке к тензору поляризуемости. Так как это не влияет на ход дальнейшего изложения, будем подразумевать под этой величиной эффективную поляризуемость среды. После подстановки формального решения для g_{ab} в уравнение для $\hat{\mathbf{X}}_a$ и пренебрежения членами, указанными выше, система уравнений (39) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_a &= -\frac{1}{i\hbar}([\hat{\mathbf{d}}_a, \hat{\mathbf{X}}_a + \rho_a \mathbf{E}]), \\ \mathbf{E} &= \int_0^t d\tau \sum_a G \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a \rangle + \int_0^t d\tau \sum_b G \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_b \rho_b \rangle, \\ \hat{\mathbf{X}}_a &= \int_0^t d\tau \left(G^+ \cdot \rho_a \hat{\mathbf{d}}_a + G^- \cdot \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a - G \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a \rangle \rho_a + \sum_b G\beta \cdot \hat{\mathbf{X}}_a \right), \end{aligned} \quad (44)$$

где $\beta = -\langle \hat{\mathbf{d}}_b \otimes [\hat{\mathbf{d}}_b, \rho_b] \rangle (i\hbar)^{-1}$ – тензор поляризуемости среды. Наличие слагаемого $G\beta \cdot \hat{\mathbf{X}}_a$ в последнем уравнении приводит к преобразованию тензора Грина в вакууме G в тензор Грина G_ε в среде с диэлектрической проницаемостью ε и к появлению множителя $l(\varepsilon)$. Рассмотрим подробнее основные этапы этого преобразования. Выделим вокруг атома-излучателя пустую сферу радиуса R в среде, как показано на рис. 2. Подействуем оператором (32) на уравнение $\hat{\mathbf{X}}_a$. Учтем наличие сферы через ступенчатую функцию $\theta(R - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|)$:

$$\square_{r,t} \hat{\mathbf{X}}_a = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{F}) \theta(R - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|) + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\beta \cdot \hat{\mathbf{X}}_a) \theta(R - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|) - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\beta \cdot \hat{\mathbf{X}}_a). \quad (45)$$

Здесь первое слагаемое в правой части уравнения отвечает за действие источника, второе учитывает пустую сферу вокруг атома-излучателя и, как будет показано ниже, приводит к возникновению множителя $l(\varepsilon)$ у соответствующих величин. Третье

слагаемое отражает наличие диэлектрической проницаемости $\varepsilon = 1 + 4\pi\beta$ в среде. При этом для первого слагаемого введено обозначение

$$\mathbf{F} = \int_0^t d\tau' (\delta^+(t - \tau') \rho_a \hat{\mathbf{d}}_a + \delta^-(t - \tau') \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a) - \langle \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a \rangle \rho_a, \quad (46)$$

$$\delta^\pm(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{\pm i\xi t} d\xi,$$

где $\delta^\pm$ – положительно- и отрицательно-частотные части дельта-функции.

Для однородной среды с постоянной диэлектрической проницаемостью ε можно перейти к переменной $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_a$. Произведем фурье-преобразование по времени уравнения (45) для $\hat{\mathbf{X}}_a(\mathbf{s}, t)$:

$$\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{X}_{a\omega}(\mathbf{s}) - \text{rot}(\text{rot}) \mathbf{X}_{a\omega}(\mathbf{s}) = \theta(R - s)(\varepsilon - 1) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{X}_{a\omega}(\mathbf{s}) - \theta(R - s) 4\pi \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{F}_\omega(0). \quad (47)$$

Начиная с этого момента будем следовать работе [1]. Наложим ограничение на радиус сферы: $R \ll 2\pi c/\omega_{12}$. При этом

$$\theta(R - s) \mathbf{X}_{a\omega}(\mathbf{s}) \approx \theta(R - s) \mathbf{X}_{a\omega}(0). \quad (48)$$

Тогда решением уравнения для фурье-компоненты будет

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{a\omega}(\mathbf{s}) = & (\varepsilon - 1) \frac{\omega^2}{c^2} \int d\mathbf{s}' G_\varepsilon(\mathbf{s} - \mathbf{s}') \cdot \theta(R - s') \mathbf{X}_{a\omega}(0) - \\ & - 4\pi \frac{\omega^2}{c^2} \int d\mathbf{s}' G_\varepsilon(\mathbf{s} - \mathbf{s}') \cdot \theta(R - s') \mathbf{F}_\omega(0), \end{aligned} \quad (49)$$

где тензор Грина подчиняется волновому уравнению

$$\left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \text{rot}(\text{rot}) \right) G_\varepsilon(\mathbf{s} - \mathbf{s}') = \hat{I} \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}'). \quad (50)$$

Разложение тензора Грина по плоским волнам приведет к выражению

$$G_\varepsilon(\mathbf{s} - \mathbf{s}') = \frac{c^2}{\varepsilon \omega^2} \sum_q \frac{q \otimes q}{q^2} \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{s}')}}{\mathbb{V}} + \lim_{\nu \rightarrow 0} \sum_q \frac{\mathbf{e}(q) \otimes \mathbf{e}(q)}{\varepsilon(\omega^2/c^2) + i\nu - q^2} \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{s}')}}{\mathbb{V}}. \quad (51)$$

Используя его в уравнении (49) для $\mathbf{s} = 0$, получим

$$\mathbf{X}_{a\omega}(0) = -\frac{4\pi}{2\varepsilon + 1} \mathbf{F}_\omega(0). \quad (52)$$

Подставим $\mathbf{X}_{a\omega}(0)$ в уравнение (49) и сложим коэффициенты при $\mathbf{F}_\omega(0)$:

$$1 + \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1} = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} = l(\varepsilon). \quad (53)$$

В результате получаем

$$\mathbf{X}_{a\omega}(\mathbf{s}) = -4\pi \frac{\omega^2}{c^2} l(\varepsilon) \int d\mathbf{s}' G_\varepsilon(\mathbf{s} - \mathbf{s}') \cdot \theta(R - s') \mathbf{F}_\omega(0) \quad (54)$$

и окончательно, выполняя обратное преобразование Фурье, приходим к выражению

$$\hat{\mathbf{X}}_a = l(\varepsilon) \int_0^t d\tau (G_\varepsilon^+ \cdot \rho_a \hat{\mathbf{d}}_a + G_\varepsilon^- \cdot \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a - G_\varepsilon \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a \rangle \rho_a). \quad (55)$$

Уравнение для электрического поля $\mathbf{E}$ также можно выразить через функцию Грина в среде G_ε . Как известно, в нерезонансном случае поляризация будет линейна по полю, $\langle \hat{\mathbf{d}}_b \rho_b \rangle = \beta \cdot \mathbf{E}$, тогда

$$\mathbf{E} = \int_0^t d\tau \sum_a G \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a \rangle + \int_0^t d\tau \sum_b G \cdot \beta \mathbf{E}. \quad (56)$$

Так же, как и в случае с $\hat{\mathbf{X}}_a$, это уравнение преобразуется к виду

$$\mathbf{E} = l(\varepsilon) \int_0^t d\tau \sum_a G_\varepsilon \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a \rangle. \quad (57)$$

В результате перехода к тензору Грина в среде G_ε система уравнений запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_a &= -\frac{1}{i\hbar} ([\hat{\mathbf{d}}_a, \hat{\mathbf{X}}_a + \rho_a \mathbf{E}]), \\ \mathbf{E} &= l(\varepsilon) \int_0^t d\tau \sum_a G_\varepsilon \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a \rangle, \\ \hat{\mathbf{X}}_a &= l(\varepsilon) \int_0^t d\tau (G_\varepsilon^+ \cdot \rho_a \hat{\mathbf{d}}_a + G_\varepsilon^- \cdot \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a - G_\varepsilon \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a \rangle \rho_a). \end{aligned} \quad (58)$$

Отметим, что поправка $l(\varepsilon)$ одинакова как для электрического поля $\mathbf{E}$, так и для $\hat{\mathbf{X}}_a$. Остановимся подробнее на выражении $(\hat{\mathbf{X}}_a + \rho_a \mathbf{E})$. Слагаемые $G_\varepsilon^+ \cdot \rho_a \hat{\mathbf{d}}_a + G_\varepsilon^- \cdot \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a$ из $\hat{\mathbf{X}}_a$, подставленные в уравнение для ρ_a , останутся без изменений, а член $-G_\varepsilon \cdot \langle \rho_a \hat{\mathbf{d}}_a \rangle \rho_a$ сократится со слагаемым $\rho_a \mathbf{E}$:

$$l(\varepsilon) \int_0^t d\tau G_\varepsilon(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_a, t - \tau) \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a \rangle (\rho_a(t) - \rho_a(\tau)) = 0. \quad (59)$$

Интеграл можно положить равным нулю по следующим причинам. Во-первых, в представлении взаимодействия $\rho_a(t)$ является медленно меняющейся функцией времени, поэтому $(\rho_a(t) - \rho_a(\tau)) = 0$. Во-вторых, тензор Грина в среде G_ε будет пропорционален дельта-функции

$$\delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}{c}\right), \quad (60)$$

а так как $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_a$, то $\tau \rightarrow t$ и результатом интегрирования будет ноль. В результате происходит автоматическое исключение самовоздействия излучателя. Такое поведение системы является следствием внутренней согласованности цепочки уравнений БВГКИ. В результате решение системы (58) сведется к решению уравнения

$$\dot{\rho}_a = -\frac{l(\varepsilon)}{i\hbar} \int_0^t d\tau ([\hat{\mathbf{d}}_a, G_\varepsilon^+ \cdot \rho_a \hat{\mathbf{d}}_a + G_\varepsilon^- \cdot \hat{\mathbf{d}}_a \rho_a]) - \frac{l(\varepsilon)}{i\hbar} \int_0^t d\tau \left(\left[\hat{\mathbf{d}}_a, \rho_a \sum_{a' \neq a} G_\varepsilon \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_{a'} \rho_{a'} \rangle \right] \right). \quad (61)$$

Подставив явное выражение (7) для оператора дипольного момента $\hat{\mathbf{d}}_a$, проведя интегрирование и пренебрегая слагаемыми на удвоенных частотах, получим выражение для оператора радиационной релаксации:

$$\hat{\Gamma}_\varepsilon[\rho_a] = -\frac{\Gamma_\varepsilon}{2}(\hat{\sigma}_a^+ \hat{\sigma}_a^- \rho_a - 2\hat{\sigma}_a^- \rho_a \hat{\sigma}_a^+ + \rho_a \hat{\sigma}_a^+ \hat{\sigma}_a^-), \quad \Gamma_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} l(\varepsilon) \Gamma_0, \quad (62)$$

Γ_ε будет иметь смысл скорости радиационной релаксации в среде. Так как в уравнениях теперь присутствует функция Грина электрического поля в среде G_ε , в выражении для скорости появляется коэффициент $\sqrt{\varepsilon}$. В этом можно убедиться, непосредственно вычисляя значение новой константы:

$$\Gamma_\varepsilon = l(\varepsilon) \frac{2}{\hbar} \mathbf{d}_{12} \cdot \text{Im } G_\varepsilon^-(0, \omega_{12}) \cdot \mathbf{d}_{12}. \quad (63)$$

В результате основное управляющее уравнение для ρ_a будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{\rho}_a = -i[\hat{V}_\varepsilon, \rho_a] + \hat{\Gamma}_\varepsilon[\rho_a], \quad \hat{V}_\varepsilon = -\frac{l(\varepsilon)}{\hbar} \hat{\mathbf{d}}_a \cdot \int_0^t d\tau \sum_{a' \neq a} G_\varepsilon \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_{a'} \rho_{a'} \rangle. \quad (64)$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Первым значимым результатом настоящей работы является вывод общей замкнутой системы уравнений (39) для эволюции матрицы плотности частицы-излучателя, поля, атомно-полевых и атомно-атомных корреляций. При выводе системы был использован подход, основанный на цепочке уравнений ББГКИ, адаптированный к решению оптических и спектроскопических задач. Рассмотрена трехкомпонентная система, состоящая из двух наборов двухуровневых атомов и квантованного электромагнитного поля. Предполагалось, что межатомное взаимодействие осуществляется только через поле излучения. Ключевым моментом в адаптации метода стал отказ от традиционного, но приводящего в данной системе к ошибкам, термодинамического предела. Также в отличие от известных подходов в полученной общей системе уравнений удалось сохранить вклад от двухчастичных корреляционных операторов.

Следующим и главным результатом работы стало получение основного управляющего уравнения для матрицы плотности излучателя-“примеси” (64), в котором скорость радиационной релаксации и эффективное поле накачки являются функциями от диэлектрической проницаемости нерезонансной среды – основного материала. В рамках микроскопического подхода путем исключения операторов, связанных с полем, удалось записать систему уравнений в терминах полевых векторов и тензора Грина. Такой подход позволил выявить макроскопический характер эволюции системы. При этом стала возможной процедура перехода от тензора Грина в вакууме к тензору Грина в среде. Таким образом, учет вклада нерезонансных атомов окружения в скорость радиационной релаксации привел к появлению множителя-поправки $l(\varepsilon)$ в виде функции (53). Здесь необходимо отметить, что данный результат был получен из микроскопического гамильтониана как наиболее фундаментального. Другим важным моментом является то, что в системе уравнений для излучателя в среде (58) поправка $l(\varepsilon)$ является общей как для $\hat{\mathbf{X}}_a$, так и для выражения, определяющего действующее поле $\mathbf{E}$. Этот факт обеспечивает согласованное исключение

самовоздействия излучателя. В результате указанные свойства системы позволили получить выражение для скорости спонтанной релаксации в однородной среде в виде $\Gamma_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} l(\varepsilon) \Gamma_0$.

Необходимо также отметить, что на скорость излучения атома в среде в рамках нашей модели влияют несколько процессов: процесс спонтанной релаксации и процессы вынужденных переходов под действием некогерентных компонент поля. В общей системе уравнений (39) за вынужденные переходы отвечают слагаемые, пропорциональные коммутатору $[\hat{\mathbf{d}}_a, \rho_a]$ в уравнении для $\hat{\mathbf{X}}_a$, как, например, слагаемое, пропорциональное W . Учет последних также должен приводить к изменению скорости радиационной релаксации одноатомной матрицы плотности $\rho_a \sim e^{-\Gamma_w t}$ (см. формулу (40)).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Уравнение для $\mathbf{E}$

Для вывода уравнения (29) для поля $\mathbf{E}$ подействуем оператором $\hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t)$ на уравнение (15) для однофотонной матрицы плотности $\rho_f(\tau)$ и, взяв след, просуммируем по всем модам согласно определению (26). Так, для коммутатора в левой части выполняется равенство

$$\langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) [\hat{U}_f(\tau), \rho_f(\tau)] \rangle = \langle [\hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t), \hat{U}_f(\tau)] \rho_f(\tau) \rangle. \quad (\text{П.1})$$

Далее, используя коммутационное соотношение (27) для оператора электрического поля и для $\hat{U}_f(\tau)$, преобразуем последнее выражение к виду

$$i\hbar \sum_a G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a, t - \tau) \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_a(\tau) \rho_a(\tau) \rangle + i\hbar \sum_b G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, t - \tau) \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_b(\tau) \rho_b(\tau) \rangle. \quad (\text{П.2})$$

Слагаемые в правой части будут равны нулю:

$$\langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \text{Tr}_a [\hat{V}_{af}(\tau), g_{af}(\tau)] \rangle = 0, \quad \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \text{Tr}_b [\hat{V}_{bf}(\tau), g_{bf}(\tau)] \rangle = 0. \quad (\text{П.3})$$

Таким образом, атомно-фотонная корреляция не дает вклада в среднее значение электрического поля $\mathbf{E}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Уравнение для $\hat{\mathbf{X}}_a$

Согласно определению (33) подействуем оператором электрического поля $\hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t)$ на уравнение (22) для оператора двухчастичных корреляций $g_{af}(\tau)$. Ниже последовательно приведем выражения для получившихся слагаемых. Коммутатор в левой части (22) преобразуется к сумме:

$$\begin{aligned} \sum_f \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) [\hat{U}_a(\tau), g_{af}(\tau)] \rangle &= [\hat{U}_a(\tau), \hat{\mathbf{X}}_a(\mathbf{r}, t, \tau)], \\ \sum_f \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) [\hat{U}_f(\tau), g_{af}(\tau)] \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Первый коммутатор в правой части (22) рассмотрим покомпонентно:

$$\begin{aligned} \sum_f \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) [\hat{V}_{af}(\mathbf{r}_a, \tau), \rho_a(\tau) \rho_f(\tau)] \rangle &= i\hbar G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a, t - \tau) \cdot \rho_a(\tau) \hat{\mathbf{d}}_a(\tau) - \\ &- \sum_f \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \otimes \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}_a, \tau) \rho_f(\tau) \rangle \cdot [\hat{\mathbf{d}}_a(\tau), \rho_a(\tau)], \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

это слагаемое содержит в себе оператор источника $i\hbar G \rho_a \hat{\mathbf{d}}_a$ и часть оператора перерасеяния (см. определение (35) для тензора W). Далее запишем

$$\sum_f \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) [\langle \hat{V}_{af}(\mathbf{r}_a, \tau) \rho_a(\tau) \rangle, \rho_a(\tau) \rho_f(\tau)] \rangle = i\hbar G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a, t - \tau) \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_a(\tau) \rho_a(\tau) \rangle \rho_a(\tau) \quad (\text{П.6})$$

– слагаемое, которое исключает из системы уравнений самовоздействие атома-излучателя. И, наконец,

$$\begin{aligned} \sum_f \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) [\langle \hat{V}_{af}(\tau) \rho_f(\tau) \rangle, \rho_a(\tau) \rho_f(\tau)] \rangle &= \\ &= - \sum_f \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \rho_f(\tau) \rangle \otimes \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}_a, \tau) \rho_f(\tau) \rangle \cdot [\hat{\mathbf{d}}_a(\tau), \rho_a(\tau)] \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

описывает когерентную часть оператора перерасеяния. Следующий коммутатор будет определять часть оператора перерасеяния (см. определение (35) тензора W):

$$\begin{aligned} \sum_{f, f' \neq f} \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \text{Tr}_{f'} [\hat{V}_{af'}(\mathbf{r}_a, \tau), \rho_a(\tau) g_{ff'}(\tau)] \rangle &= \\ &= - \sum_{f, f' \neq f} \langle \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \otimes \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}_a, \tau) g_{ff'}(\tau) \rangle \rangle \cdot [\hat{\mathbf{d}}_a(\tau), \rho_a(\tau)]. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Последние два слагаемых в уравнении (22) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \sum_f \left\langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \sum_b \text{Tr}_b [\hat{V}_{bf}(\mathbf{r}_b, \tau), \rho_f(\tau) g_{ab}(\tau)] \right\rangle &= \\ &= i\hbar \sum_b G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, t - \tau) \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_b(\tau) g_{ab}(\tau) \rangle, \\ \sum_f \left\langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \sum_{a' \neq a} \text{Tr}_{a'} [\hat{V}_{a'f}(\mathbf{r}_{a'}\tau), \rho_f(\tau) g_{aa'}(\tau)] \right\rangle &= \\ &= i\hbar \sum_{a' \neq a} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{a'}, t - \tau) \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_{a'}(\tau) g_{aa'}(\tau) \rangle \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

и будут описывать соответственно воздействие атомов среды на атом-излучатель через оператор межатомных корреляций g_{ab} и влияние всех атомов-излучателей на заданный излучатель посредством межатомной корреляции $g_{aa'}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Уравнение для W

Действуя согласно определению (35) и используя уравнения (15), (23) для $\rho_f, g_{ff'}$, для коммутатора из $g_{ff'}$ получим

$$\sum_{f, f' \neq f} \langle \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \otimes \hat{\mathbf{E}}_{f'}(\mathbf{r}', t') [\hat{U}_f(\tau) + \hat{U}_{f'}(\tau), g_{ff'}] \rangle \rangle = 0; \quad (\text{П.10})$$

для следующих слагаемых из $g_{ff'}$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{a, f, f' \neq f} \langle \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \otimes \hat{\mathbf{E}}_{f'}(\mathbf{r}', t') \text{Tr}_a[V_{af}(\mathbf{r}_a, \tau), \rho_f g_{aff'}] \rangle \rangle &= \\ &= \sum_{a, f, f' \neq f} G_{(f)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a, t - \tau) \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_a(\tau) \otimes \hat{\mathbf{X}}_{a(f)}(\mathbf{r}', t', \tau) \rangle, \\ \sum_{a, f, f' \neq f} \langle \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \otimes \hat{\mathbf{E}}_{f'}(\mathbf{r}', t') \text{Tr}_a[V_{af'}(\mathbf{r}_a, \tau), \rho_{f'} g_{aff'}] \rangle \rangle &= \\ &= \sum_{a, f, f' \neq f} \langle \hat{\mathbf{X}}_{a(f)}(\mathbf{r}, t, \tau) \otimes \hat{\mathbf{d}}_a(\tau) \rangle \cdot G_{(f')}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a, t' - \tau). \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Аналогичные соотношения получаются для атомов b -типа (четвертое и пятое слагаемые из $g_{ff'}$). Для использованных выше обозначений выполняются соотношения

$$G \equiv \sum_f G_{(f)}, \quad \hat{\mathbf{X}}_a \equiv \sum_f \hat{\mathbf{X}}_{a(f)}, \quad \mathbf{E} \equiv \sum_f \mathbf{E}_{(f)}. \quad (\text{П.12})$$

Из уравнения для ρ_f получим

$$\begin{aligned} \sum_f \langle \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \otimes \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}', t') \rho_f(\tau) \rangle \rangle - \sum_f \langle \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}, t) \rho_f(\tau) \rangle \rangle \otimes \langle \langle \hat{\mathbf{E}}_f(\mathbf{r}', t') \rho_f(\tau) \rangle \rangle &= \\ &= \sum_{a, f} G_{(f)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a, t - \tau) \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_a(\tau) \otimes \hat{\mathbf{X}}_{a(f)}(\mathbf{r}', t', \tau) \rangle + \\ &+ \sum_{a, f} \langle \hat{\mathbf{X}}_{a(f)}(\mathbf{r}, t, \tau) \otimes \hat{\mathbf{d}}_a(\tau) \rangle \cdot G_{(f)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a, t' - \tau) + \\ &+ \sum_{b, f} G_{(f)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, t - \tau) \cdot \langle \hat{\mathbf{d}}_b(\tau) \otimes \hat{\mathbf{X}}_{b(f)}(\mathbf{r}', t', \tau) \rangle + \\ &+ \sum_{b, f} \langle \hat{\mathbf{X}}_{b(f)}(\mathbf{r}, t, \tau) \otimes \hat{\mathbf{d}}_b(\tau) \rangle \cdot G_{(f)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_b, t' - \tau). \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

Складывая это выражение с написанными выше слагаемыми из $g_{ff'}$, получим полные суммы по модам f' , что приведет к итоговому выражению для W (см. формулу (36)).

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Уравнения для операторов межатомных корреляций

Рассмотрим каждое слагаемое, входящее в уравнение (25) для оператора межатомных корреляций $g_{aa'}$. Для первого и второго слагаемых в правой части равенства, учтя явное выражение для оператора взаимодействия $\hat{V}_{af}$ и определение (33),

получим

$$\begin{aligned}\sum_f \text{Tr}_f [\hat{V}_{af}, \rho_a g_{a'f}] &= -\hat{\mathbf{X}}_{a'}(\mathbf{r}_a, \tau, \tau) \cdot [\hat{\mathbf{d}}_a(\tau), \rho_a(\tau)], \\ \sum_f \text{Tr}_f [\hat{V}_{a'f}, \rho_{a'} g_{af}] &= -\hat{\mathbf{X}}_a(\mathbf{r}_{a'}, \tau, \tau) \cdot [\hat{\mathbf{d}}_{a'}(\tau), \rho_{a'}(\tau)].\end{aligned}\quad (\text{П.14})$$

Аналогичные соотношения получаются для операторов межатомных корреляций g_{ab} :

$$\begin{aligned}\sum_f \text{Tr}_f [\hat{V}_{af}, \rho_a g_{bf}] &= -\hat{\mathbf{X}}_b(\mathbf{r}_a, \tau, \tau) \cdot [\hat{\mathbf{d}}_a(\tau), \rho_a(\tau)], \\ \sum_f \text{Tr}_f [\hat{V}_{bf}, \rho_b g_{af}] &= -\hat{\mathbf{X}}_a(\mathbf{r}_b, \tau, \tau) \cdot [\hat{\mathbf{d}}_b(\tau), \rho_b(\tau)].\end{aligned}\quad (\text{П.15})$$

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы 2009–2011 гг.” (проект № 11823), и частично поддержана Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3239.2010.2).

Список литературы

- [1] R. J. Glauber, M. Lewenstein, *Phys. Rev. A*, **43**:1 (1991), 467–491.
- [2] P. W. Milonni, *J. Mod. Opt.*, **42**:10 (1995), 1991–2004.
- [3] G. Nienhuis, C. Th. J. Alkemade, *Physica B+C*, **81**:1 (1976), 181–188.
- [4] M. E. Crenshaw, C. M. Bowden, *Phys. Rev. Lett.*, **85**:9 (2000), 1851–1854, arXiv: quant-ph/0004101.
- [5] M. E. Crenshaw, C. M. Bowden, *Phys. Rev. A*, **63**:1 (2000), 013801, 5 pp.
- [6] M. E. Crenshaw, *Phys. Rev. A*, **78**:5 (2008), 053827, 10 pp., arXiv: arXiv:0805.2134.
- [7] S. Scheel, L. Knoll, D.-G. Welsch, *Phys. Rev. A*, **60**:5 (1999), 4094–4104, arXiv: quant-ph/9904015.
- [8] М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, М., 1970.
- [9] F. J. P. Schuurmans, D. T. N. de Lang, G. H. Wegdam, R. Sprik, A. Lagendijk, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:23 (1998), 5077–5080.
- [10] А. А. Пантелеев, В. Л. К. Рерих, А. Н. Старостин, *ЖЭТФ*, **123**:2 (2003), 255–275.
- [11] M. Bonitz, *Quantum Kinetic Theory*, B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1998.
- [12] Ю. Л. Климонтович, *Статистическая физика*, Наука, М., 1982.
- [13] Ю. Л. Климонтович, *Кинетическая теория электромагнитных процессов*, Наука, М., 1980.
- [14] М. Г. Гладуш, А. А. Пантелеев, В. Л. К. Рерих, *ЖЭТФ*, **130**:2 (2006), 239–251.
- [15] A. Kuditcher, M. P. Nehlen, C. M. Florea, K. W. Winick, S. C. Rand, *Phys. Rev. Lett.*, **84**:9 (2000), 1898–1901.
- [16] Э. Г. Пестов, “Теория релаксации квантовых систем в сильном электромагнитном поле”, *Резонансное взаимодействие излучения с веществом*, Труды ФИАН, **187**, ред. А. Н. Ораевский, Наука, М., 1988, 60–116.
- [17] M. G. Gladush, D. V. Kuznetsov, A. A. Panteleev, V. L. K. Roerich, *Emission spectra and intrinsic optical bistability in a two-level medium*, arXiv: 1010.2969.
- [18] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, М., 1981.
- [19] V. L. K. Roerich, A. N. Starostin, A. A. Panteleev, *Progress in Nonequilibrium Green's Functions II* (Dresden, Germany, 19–23 August 2002), eds. M. Bonitz, D. Semkat, World Sci. Publ., Singapore, 2003.

Поступила в редакцию 1.11.2010,
после доработки 16.12.2010