Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Иванов, В. В. Скалозуб, Прохождение волновых пакетов через квантовые системы с резонансными уровнями, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 2, 281–290

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6681>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:29:35

© 2011 г.

Н. А. Иванов*, В. В. Скалозуб*

ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ ЧЕРЕЗ КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ С РЕЗОНАНСНЫМИ УРОВНЯМИ

С помощью предложенного ранее модифицированного метода седловых точек описано туннелирование волнового пакета прямоугольной формы через квантовую систему с резонансными уровнями. Аналитически рассчитана форма пакета, получаемого на выходе из квантовой системы, при различных значениях ширины уровня. Результатом прохождения является пакет, представляющий собой суперпозицию дополнительных функций ошибок. Сравнение полученного результата с точным численным решением, полученным без использования асимптотических методов, показывает совпадение результатов с хорошей степенью точности. Детально изучено прохождение волновых пакетов гауссовой и прямоугольной формы при больших значениях ширины резонансного уровня.

Ключевые слова: туннелирование, резонансные уровни, волновой пакет, резонансное рассеяние, квантовая система, матрица рассеяния.

1. ВВЕДЕНИЕ

Прохождение волновых пакетов через квантовые наносистемы с резонансными уровнями – долгое время не поддававшаяся решению проблема, ставшая особенно актуальной в наше время (см., например, [1]–[3]), когда миниатюризация приборов, работающих на микросхемах, становится повсеместной. Для ее решения используются различные методы, основанные на применении оператора эволюции, T -матричного подхода и численных расчетов (см. [4]). Характеризуя задачу в целом, отметим, что до сих пор отсутствует единый подход к описанию квантовых систем, содержащих широкие резонансные уровни, и систем с узкими резонансными уровнями. Поэтому для каждой квантовой системы предлагается особый вариант решения. В работе [5] предложен метод описания туннелирования волнового пакета через квантовую систему с резонансными уровнями. Этот метод, основанный на использовании S -матричного формализма и модифицированного асимптотического метода седловой точки, был разработан и применен для решения задачи о

* Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск, Украина.
E-mail: na_ivanov@dsu.dp.ua, skalozubv@daad-alumni.de

прохождении волнового пакета гауссовой формы через квантовую систему с резонансными уровнями. Он полностью формализует решение задачи о туннелировании волнового пакета произвольной формы. Было, в частности, показано, что при выполнении вычислений в терминах входящего пакета нет необходимости определять, узкими или широкими резонансными уровнями обладает система. Полученные результаты асимптотического решения совпадают с точным решением, представленным erfc -функцией ошибок. Было найдено аналитическое решение для пакета гауссовой формы. Однако для разнообразных приложений интересно рассмотреть другие волновые конфигурации. Точность полученных результатов сильно зависит от правильности задания генератором формы входящего волнового пакета. Для правильной оценки совпадения аналитических и практических результатов необходимо, чтобы форма генерируемого сигнала соответствовала форме сигнала, рассмотренного аналитически. Поэтому исследование динамических характеристик квантовых систем требует изучения пакета с такой конфигурацией, получение которой в лабораторных условиях будет достаточно простой задачей. Мы остановили выбор на сигнале прямоугольной формы, поскольку получить его на любом генераторе не составляет труда, а задаваться он будет с достаточно высокой точностью. Эти исследования дадут возможность изучить свойства открытых мезоскопических систем, таких как время задержки сигнала в системе, имеющей один или несколько резонансных уровней, и ширина уровней, и находить матрицы рассеяния системы.

Целью настоящей работы является изучение процесса прохождения через квантовую систему сигнала, который достаточно просто получить в лабораториях. В качестве такого сигнала рассматривается волновой пакет прямоугольной формы. Основное внимание уделено получению точного и асимптотического аналитических решений данной задачи. Выяснено, что независимо от формы пакета, подаваемого на вход квантовой системы, форма выходящего пакета будет описываться с помощью erfc -функций (дополнительных функций ошибок). Уточнены результаты для случая туннелирования волнового пакета через квантовую систему при больших значениях ширины резонансного уровня, что требует отдельного рассмотрения.

2. МЕТОД

Сигнал, подаваемый на вход открытой одномерной квантовой системы, представим в виде соответствующей волновой функции Ψ , определенной в импульсном пространстве. Характеристическими параметрами волновой функции являются координата x , время t , импульс k , расположение k_0 центра волнового пакета в импульсном пространстве, а параметрами, задающими систему, – ширина резонансных уровней и их количество, а также расположение k_j в импульсном пространстве полюсов S -матрицы рассеяния.

Пусть a задает ширину волнового пакета, t_a – длительность. После выхода из квантовой системы волновая функция Ψ будет состоять из двух слагаемых: Ψ^{res} – резонансная часть, зависящая от параметров системы и импульса, и Ψ^{bg} – фоновая часть, не зависящая от резонансных уровней системы. S -матрица определена только в случае динамического процесса рассеивания,

$$\Psi_a^{\text{out}} = \frac{1}{2\pi} \sum_b \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_b^{\text{in}} S_{b,a} dk, \quad (1)$$

и задает связь входящего и выходящего из системы (1) волновых пакетов. Зная матрицу рассеяния, можно определить форму выходящего пакета по форме входящего. Представление пакета произвольной формы в любой момент времени после входа в квантовую систему (см. [1]) в формализме S -матрицы имеет вид

$$\Psi(x > 0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Psi_0(k) S(k) \exp \left[\left(ikx - \frac{i\hbar}{4m\pi} k^2 t \right) \right] dk, \quad (2)$$

где $\Psi_0(k)$ – фурье-образ функции, которая задает форму сигнала, S – матрица рассеяния. Интегрирование ведется по всем значениям в пространстве импульсов. В импульсном пространстве представление любой рассеивающей квантовой системы с помощью S -матрицы имеет вид (см. [2], [6], [7])

$$S(k) = \sum_{j=1}^N \left[a_j \frac{i\Gamma_j/2}{k - k_j + i\Gamma_j/2} + b_j \right], \quad k_j = \frac{\sqrt{2mE_j}}{\hbar}, \quad (3)$$

где k_j – импульс, Γ_j – ширина j -го резонанса, параметры a_j и b_j определяются внутренними свойствами системы и связаны с матрицами S^{res} (определяющей резонансное рассеяние) и S^{bg} (определяющей фоновое рассеяние) соотношениями (см. [4])

$$a_j = \frac{m}{\hbar^2(k_j - i\Gamma_j/2)} S^{\text{res}}, \quad b_j = S^{\text{bg}} - \frac{a_j i\Gamma_j}{4k_j - 2i\Gamma_j}. \quad (4)$$

Выражение (3) соответствует случаю системы, содержащей N резонансных уровней. В основе подхода лежит метод перевала. Если мы получим несколько седловых точек, то ответом будет суперпозиция результатов для каждой из них. Групповая скорость входящего пакета $v_0 = k_0 \hbar / m$, где k_0 – импульс центра масс. Будем использовать следующие безразмерные переменные:

$$q' = \frac{x}{a}, \quad \tau = \frac{t}{t_a}, \quad S = a(k - k_0), \quad l_j = ak_j, \quad \rho_j = a \frac{\Gamma_j}{2}, \quad l_0 = ak_0, \quad (5)$$

где t_a – длительность пакета, l_j и l_0 – положения особой точки и центра волнового пакета соответственно, а ρ_j – ширина j -го резонанса. Учитывая, что a – ширина волнового пакета, получим, что все характеристики прохождения будут измеряться в терминах падающего волнового пакета. Параметрами координаты и времени становятся q и τ соответственно. Ширина падающего импульса стала единичной. Представление квантовой системы в терминах, характеризующих импульс, дает достаточное число параметров для описания процесса прохождения. Введем обозначения, принятые в работе [5], которые позволят упростить выражения и сделают более наглядными дальнейшие шаги вычислений:

$$\beta = \frac{1 + i\tau}{2}, \quad q_{0j} = l_0 - l_j + i\rho_j, \quad q = q' - l_0\tau. \quad (6)$$

Учитывая, что $t_a = ma^2/\hbar$, получим в этих обозначениях прошедший волновой пакет:

$$\Psi(q > 0, \tau) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp \left[il_0 \left(q - \frac{1}{2} l_0 \tau \right) \right] \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} ds \Psi_0(s) S(s + l_0) \exp \left[isq' - \beta s^2 + \frac{1}{2} s^2 \right], \quad (7)$$

$$S(l) = \sum_j \left[a_j \frac{i\rho_j}{l - l_j + i\rho_j} + b_j \right]. \quad (8)$$

Отсюда очевидным образом следует, что параметром асимптотического разложения является τ , поскольку именно им определяется осцилляторное поведение экспоненты подынтегрального выражения.

Представим $S(l)$ в виде экспоненты:

$$S(l) = e^{\ln(S(l))}. \quad (9)$$

Интеграл (7) примет вид

$$\Psi(q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\Phi(s)} ds, \quad (10)$$

где

$$\Phi(s) = \frac{1}{\tau} \left[isq' - \left(\beta - \frac{1}{2} \right) s^2 + \ln(S(l)) + \ln(\Psi_0(s)) \right]. \quad (11)$$

Для аналитического решения задачи воспользуемся методом седловой точки (см. [8]). Параметром, позволяющим применять данный метод, будет τ , т. е. рассматриваемый момент времени, когда волновой пакет вышел из системы, будем полагать во много раз большим длительности самого волнового пакета t_a , что является необходимым условием существования резонанса. Вычисление точки перевала определяется из условия стационарности

$$\frac{d\Phi(s)}{ds} = 0. \quad (12)$$

Обычно точка перевала вычисляется без учета члена $\ln(S(l))$ (см. [1]). При таком выборе фазы особенности амплитуды, обусловленные полюсной структурой, связанной с квантовой системой, остаются скрытыми. В нашем случае полная информация о квантовой системе входит в выражение для $\Phi(s)$ и соответственно в уравнение (12). Поэтому все особенности амплитуды как аналитической функции будут найдены из этого уравнения.

В этом и состоит главное преимущество развиваемого метода. Поскольку свойства аналитической функции определяются ее особенностями, то асимптотическое разложение, определяющее поведение амплитуды при больших значениях параметра τ , фактически оказывается пригодным для значений переменных вплоть до ближайшей особой точки, которая может находиться даже при малых значениях параметра, определяющего асимптотику. Это свойство хорошо известно в приложениях асимптотических разложений. Таким образом, в нашем случае можно ожидать близости асимптотического и точного решений при одинаковых значениях τ .

Получаем следующее представление для резонансной (res) и фоновой (bg) частей:

$$\Psi(q > 0, \tau) = \sum_j \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp \left[il_0 \left(q - \frac{1}{2} l_0 \tau \right) \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} ds f_j^{\text{res}}(s) e^{g_j^{\text{res}}(s)} + \int_{-\infty}^{\infty} ds f_j^{\text{bg}}(s) e^{g_j^{\text{bg}}(s)} \right], \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} g_j^{\text{res}}(s) &= isq' - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) s^2 - \ln(s - q_{0j}) + \ln(\Psi_0(s)), \\ g_j^{\text{bg}}(s) &= isq' - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) s^2 + \ln(\Psi_0(s)), \\ f_j^{\text{res}}(s) &= i\rho_j a_j, \quad f_j^{\text{bg}}(s) = b_j. \end{aligned}$$

Найдем корни уравнения $g'(s) = 0$. Те из них, которые удовлетворяют условиям стационарности

$$\text{Im } g(s) = \text{const}, \quad \text{Re } g(s) < \text{Re } g(s_k), \quad (14)$$

где s_k – k -й корень уравнения $g'(s) = 0$, являются точками перевала. Согласно этим условиям мы должны изменить контур таким образом, чтобы путь интегрирования проходил в направлении наиболее быстрого изменения $\text{Re } g(s)$, а поскольку функция $g(s)$ аналитическая, то это направление совпадет с направлением линии $\text{Im } g(s) = \text{const}$. В результате в окрестности точки стационарности амплитуда примет вид

$$\begin{aligned} \Psi(q > 0, \tau) &\sim \frac{1}{a} \exp \left[il_0 \left(q - \frac{1}{2} l_0 \tau \right) \right] \left(\sum_{jk} e^{g_j^{\text{res}}(x_k^s)} \sqrt{-\frac{1}{e^{g_j^{\text{res}''}(x_k^s)}}} f_j^{\text{res}}(x_k^s) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{jk} e^{g_j^{\text{bg}}(x_k^s)} \sqrt{-\frac{1}{e^{g_j^{\text{bg}''}(x_k^s)}}} f_j^{\text{bg}}(x_k^s) \right). \end{aligned}$$

Индекс j пробегает все резонансные состояния, а k – все седловые точки. Эта формула дает асимптотическое представление волновой функции пакета произвольной формы, проходящего через резонансную квантовую систему.

3. ПРОХОЖДЕНИЕ ПАКЕТА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ С ОДНИМ РЕЗОНАНСНЫМ УРОВНЕМ

Применим развитый метод к исследованию прохождения пакета прямоугольной формы через квазиодномерную квантовую систему с одним резонансным уровнем. Пакет представим с помощью двух функций Хевисайда:

$$\Psi(x) = \Theta(x) - \Theta(x - a), \quad (15)$$

с разницей в аргументе, соответствующей ширине волнового пакета.

Фурье-образ функции Хевисайда известен:

$$\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{ik} + \pi \delta(k) \right) e^{ikx} dk. \quad (16)$$

Входящий в систему сигнал будет представляться в следующем виде:

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{ik} + \pi\delta(k) - \left(\frac{1}{ik} + \pi\delta(k) \right) e^{-ika} \right) S(k) \exp\left(ikx - i\hbar \frac{k^2 t}{2m}\right). \quad (17)$$

Перейдя к безразмерным переменным, получим

$$\begin{aligned} \Psi(q > 0, \tau) = & \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left[il_0\left(q - \frac{1}{2}l_0\tau\right)\right] \int_{-\infty}^{\infty} ds \left(\frac{a}{is} + \pi\delta\left(\frac{s}{a}\right) - \right. \\ & \left. - e^{-is}\left(\frac{a}{is} + \pi\delta\left(\frac{s}{a}\right)\right) \right) \exp\left[isq' - \left(\beta - \frac{1}{2}\right)s^2\right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда аргументы экспоненты примут вид

$$\begin{aligned} g_j^{\text{res}}(s) &= isq' - \left(\beta - \frac{1}{2}\right)s^2 - \ln(s - q_{0j}) + \ln\left[(1 - e^{-is})\left(\pi\delta\left(\frac{s}{a}\right) + \frac{a}{is}\right)\right], \\ g_j^{\text{bg}}(s) &= isq' - \left(\beta - \frac{1}{2}\right)s^2 + \ln\left[(1 - e^{-is})\left(\pi\delta\left(\frac{s}{a}\right) + \frac{a}{is}\right)\right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку эти выражения включают в себя слагаемые, содержащие в знаменателе s , получаем особую точку $s = 0$. Однако эта особая точка не используется в качестве точки перевала, поскольку при данном значении переменной не наблюдается рассеяния. Учтем, что при значениях s , отличных от нуля, функция $\delta(s/a)$ обращается в нуль,

$$g_j^{\text{res}}(s) = isq' - \left(\beta - \frac{1}{2}\right)s^2 - \ln(s - q_{0j}) + \ln\left[(1 - e^{-is})\frac{a}{is}\right]. \quad (20)$$

Воспользуемся разложением экспоненты в ряд Тейлора и выделим первые три члена разложения, получим

$$g_j^{\text{res}}(s) = isq' - \left(\beta - \frac{1}{2}\right)s^2 - \ln(s - q_{0j}) + \ln\left[a - \frac{ais}{2}\right]. \quad (21)$$

Тогда

$$g_j^{\text{res}'}(s) = iq' - (2\beta - 1)s - \frac{1}{s - q_{0j}} - \frac{ia}{2} \frac{1}{a - ais/2}. \quad (22)$$

Найдем корни уравнения $g_j^{\text{res}'}(s) = 0$. Те из решений, которые удовлетворяют условиям стационарности (14), и будут точками перевала. Получим три корня, два из которых удовлетворяют данному требованию. Ввиду громоздкости соотношений между параметрами задачи¹⁾ не представляется возможным приводить аналитический вид выражений для точек стационарности $s_1 = s_1(q', q_{0j}, \beta)$ и $s_2 = s_2(q', q_{0j}, \beta)$. Ниже вместо этого мы представим необходимые графики расчетов процесса туннелирования.

Для выходящего волнового пакета получаем выражение

$$\Psi_{jsp}^{\text{res}}(q, \tau) = i\rho_j a_j \left[e^{g^{\text{res}}(s_1)} \sqrt{-\frac{1}{g^{\text{res}''}(s_1)}} + e^{g^{\text{res}}(s_2)} \sqrt{-\frac{1}{g^{\text{res}''}(s_2)}} \right], \quad (23)$$

¹⁾Каждый из корней занимает несколько страниц и просто находится при помощи стандартных пакетов математических программ.

Рис. 1. Графики функций $|\Psi_p^{sp}|$ (штриховая линия) и $|\Psi_r^{ex}|$ (сплошная линия) для $\tau = 100$, $a_1 = 1$, $l_0 = 1$, $l_1 = 1$, $\rho_1 = 0.04$ (а) и $\rho_1 = 0.007$ (б). Измерения производятся в терминах амплитуды входящего в систему волнового пакета.

учитывающее суперпозицию решений от двух седловых точек. Подставив в (23) найденные значения $s_1 = s_1(q', q_{0j}, \beta)$ и $s_2 = s_2(q', q_{0j}, \beta)$, построим график функции $|\Psi(q)|$, что даст асимптотическое решение, изображаемое ниже на рисунках штриховыми линиями. Точное решение имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi^{ex} = & \frac{ia}{q_{0j}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\exp \left[iq' q_{0j} - q_{0j}^2 \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \right] \operatorname{erfc} \left(\frac{q'}{2\sqrt{\beta - 1/2}} - iq_{0j} \sqrt{\beta - \frac{1}{2}} \right) - \right. \\ & \left. - \operatorname{erfc} \left(\frac{q'}{2\sqrt{\beta - 1/2}} \right) \right] - \frac{ia}{q_{0j}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{q' - 1}{2\sqrt{\beta - 1/2}} \right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{erfc} \left(\frac{q' - 1}{2\sqrt{\beta - 1/2}} - iq_{0j} \sqrt{\beta - \frac{1}{2}} \right) \exp \left[i(q' - 1)q_{0j} - q_{0j}^2 \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \right] \right]. \quad (24) \end{aligned}$$

Из последнего выражения видно, что, как и в случае сигнала гауссовой формы, на выходе из системы получаем сигнал, форма которого описывается erfc -функцией. Легко видеть, что это происходит потому, что входящий сигнал не зависит от собственных параметров системы, определяющих форму выходящего сигнала. Получаем, что вне зависимости от формы входящего сигнала выходящий пакет определяется суперпозицией erfc -функций различных аргументов. Значения же аргументов определяются формой входящего пакета. Рассмотрим координатную зависимость амплитуды проходящего прямоугольного пакета, рассчитанную для указанных значений параметров системы и импульса. На рис. 1 и рис. 2 показано, как изменяется форма прямоугольного пакета при прохождении резонансной системы с заданными параметрами. Изменение τ не приводит к изменению внешней формы выходящего сигнала, что проиллюстрировано на рис. 3, происходит только смещение графика по оси q . Этот результат ожидаем, поскольку после выхода из квантовой системы никаких изменений формы выходящего сигнала не происходит. Начальная точка $q = 0$ определяет внешнюю границу системы. Это еще раз показывает, что амплитуда волновой функции зависит только от параметров системы и входящего пакета.

Рис. 2. Графики функций $|\Psi_p^{sp}|$ (штриховая линия) и $|\Psi_r^{ex}|$ (сплошная линия) для $\tau = 100$, $a_1 = 1$, $l_0 = 1$, $l_1 = 1$, $\rho_1 = 0.09$ для главного члена ряда (а) и для расширенного разложения (б). Измерения производятся в терминах амплитуды входящего в систему волнового пакета.

Рис. 3. Графики функций $|\Psi_p^{sp}|$ (штриховая линия) и $|\Psi_r^{ex}|$ (сплошная линия) для $\tau = 100$ (кривая 1) и для $\tau = 60$ (кривая 2) при $a_1 = 1$, $l_0 = 1$, $l_1 = 1$, $\rho_1 = 0.1$ (а) и $\rho_1 = 0.07$ (б). Измерения производятся в терминах амплитуды входящего в систему волнового пакета.

4. УЧЕТ ПОСЛЕДУЮЩИХ ЧЛЕНОВ АСИМПТОТИКИ

Из рис. 1 следует, что рассматриваемый метод при небольших значениях ρ ($\rho < 0.09$) дает результаты, хорошо согласующиеся с результатами точного решения. Но при больших значениях ρ происходит потеря малых гармоник (см. рис. 2а). Воспользуемся разложением до второго члена асимптотического ряда, явный вид которого приведен в приложении. Результаты изображены на рис. 2б. Сравнивая рис. 2а и рис. 2б, можно видеть, что они соответствуют реальным результатам. В работе [5] рассматривалось прохождение волнового пакета гауссовой формы через резонансную квантовую систему на основании S -матричного формализма и метода седловых точек. Были получены результаты, представленные на рис. 4. Как и в случае с пакетом прямоугольной формы, при достаточно больших значениях ρ происходит потеря

Рис. 4. Графики функций $|\Psi_p^{\text{sp}}|$ (штриховая линия) и $|\Psi_r^{\text{ex}}|$ (сплошная линия) для $\tau = 100$, $a_1 = 1$, $l_0 = 1$, $l_1 = 1$, $\rho_1 = 0.1$ (а) и $\rho_1 = 0.05$ (б).

гармоник (см. рис. 4а). Используя разложение до второго члена асимптотического ряда, получим результат, изображенный на рис. 3а. Он хорошо согласуется с точным выражением. Очевидно, что учет новых членов может улучшить это соответствие.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе исследован процесс прохождения волнового пакета прямоугольной формы через квантовую систему с одним резонансным уровнем. Найдена форма выходящего пакета. Продемонстрировано совпадение результатов, полученных точным численным и асимптотическим методами. При малых значениях параметра затухания ρ используемые методы дают достаточно точное совпадение результатов даже при учете только первого члена асимптотического разложения. Фактически это означает, что выделены все аналитические особенности амплитуды прохождения. При больших значениях ρ происходит потеря малых гармоник на фоне сохранения главного пика. Потеря гармоник в этом случае устраняется учетом большего количества членов асимптотического ряда. Таким способом были уточнены результаты решения задач о прохождении пакетов гауссовой и прямоугольной формы через квантовую систему с резонансными уровнями. Как показало исследование, при любой конфигурации подаваемого сигнала из квантовой системы выходит сигнал, форма которого представима в виде суперпозиции дополнительных функций ошибок.

Описанный метод позволяет найти и определить все переменные, необходимые для описания квазиодномерных квантовых систем с резонансными уровнями. Использование этого метода при решении задачи о рассеянии волнового пакета дает максимально формализованное и простое аналитическое решение. Таким образом, показана целесообразность предлагаемого подхода, основанного на формализме S -матрицы и методе перевала, что открывает возможность для решения широкого класса задач, связанных с процессом рассеяния в квазиодномерных системах. Ключевой идеей данного подхода является использование безразмерных переменных и учет полюсов S -матрицы при вычислении точек стационарности. При рассмотрении систем, содержащих два и более резонансных уровней, решение представляется с учетом суперпозиции результатов от каждого из них. Полученные в настоящей

работе результаты могут быть полезны в дальнейшем для решения широкого класса задач, связанных с прохождением волновых пакетов через квантовые системы с резонансными уровнями. В частности, одной из таких задач является определение времени задержки сигнала в системе. Из-за внутренних особенностей систем с резонансными уровнями без точных расчетов определить, как долго сигнал будет находиться в системе, затруднительно. Используя предложенный метод, в частности, стало возможным рассчитывать время задержки сигнала различных конфигураций при прохождении таких систем, как двубарьерные диоды и транзисторы квантового туннелирования. Это станет предметом исследования в последующих работах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В работе использовалось разложение в асимптотический ряд методом перевала. Стандартное выражение, примененное к данной задаче, дает с точностью до членов второго порядка следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Psi_{jsp}^{\text{res}}(q, \tau) = & i\rho_j a_j \left[e^{g^{\text{res}}(s_1)} \sqrt{-\frac{1}{g^{\text{res}''}(s_1)}} + e^{g^{\text{res}}(s_2)} \sqrt{-\frac{1}{g^{\text{res}''}(s_2)}} + \right. \\ & + \frac{e^{g^{\text{res}}(s_1)}}{6\sqrt{2\pi(g^{\text{res}''}(s_1))^7}} [12g^{\text{res}''}(s_1)(f^{\text{res}''}(s_1)g^{\text{res}''}(s_1) - f^{\text{res}'}(s_1)g^{\text{res}(3)}(s_1) + \\ & + f^{\text{res}}(s_1)(5(g^{\text{res}(3)}(s_1))^2 - 3g^{\text{res}''}(s_1)g^{\text{res}(4)}(s_1)))] + \frac{e^{g^{\text{res}}(s_2)}}{6\sqrt{2\pi(g^{\text{res}''}(s_2))^7}} \times \\ & \times [12g^{\text{res}''}(s_2)(f^{\text{res}''}(s_2)g^{\text{res}''}(s_2) - f^{\text{res}'}(s_2)g^{\text{res}(3)}(s_2) + \\ & \left. + f^{\text{res}}(s_2)(5(g^{\text{res}(3)}(s_2))^2 - 3g^{\text{res}''}(s_2)g^{\text{res}(4)}(s_2))) \right]. \end{aligned}$$

Входящие в это выражение параметры описаны в основном тексте статьи.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Ульриху Вульффу за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

Список литературы

- [1] M. Razavy, *Quantum Theory of Tunneling*, World Sci., Singapore, 2003.
- [2] H. Mizuta, M. Tanoue, *The Physics and Applications of Resonant Tunneling Diodes*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [3] U. Wulf, E. R. Racec, P. N. Racec, A. Aldea, *Mat. Sci. Eng. C*, **23**:6–8 (2003), 675–681.
- [4] А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, М., 1971.
- [5] U. Wulf, V. Skalozub, A. Zaharov, *Phys. Rev. B*, **77**:4 (2004), 045318, 7 pp.
- [6] L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*, Acad. Press, New York, 1960.
- [7] L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics. A Modern Development*, World Scientific, Singapore, 1998.
- [8] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, М., 1973.

Поступила в редакцию 19.10.2009,
после доработки 29.11.2010