Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Точные асимптотики типа Лапласа для гауссовской меры Боголюбова, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 2, 299–340

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6683>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 16:17:32

© 2011 г.

В. Р. Фаталов*

ТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ ТИПА ЛАПЛАСА ДЛЯ ГАУССОВСКОЙ МЕРЫ БОГОЛЮБОВА

Получены новые асимптотические формулы для двух классов функциональных интегралов типа Лапласа, взятых по мере Боголюбова. В качестве основных функционалов взяты L^p -функционалы при $0 < p < \infty$ и два функционала типа точной верхней грани. В частности, доказаны теоремы об асимптотиках типа Лапласа для моментов L^p -нормы гауссовского процесса Боголюбова, когда порядок момента становится неограниченно большим. Установлено существование порогового значения $p_0 = 2 + 4\pi^2/\beta^2\omega^2$, где $\beta > 0$ – обратная температура, $\omega > 0$ – собственная частота гармонического осциллятора. Доказано различное поведение исследуемых асимптотик при $0 < p < p_0$ и $p > p_0$. Получены родственные асимптотические результаты о больших отклонениях для меры Боголюбова. Установлено масштабное свойство процесса Боголюбова, позволяющее уменьшить при исследовании число независимых параметров.

Ключевые слова: мера Боголюбова, метод Лапласа в банаховом пространстве, принцип больших отклонений, функционал действия.

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Метод функционального интегрирования, восходящий к работе [1], находит широкое и эффективное применение в таких разделах современной теоретической физики, как квантовая теория поля, статистическая механика и ряд других [2]–[10]. Особый интерес представляет тот важный и распространенный в теории и приложениях случай, когда исследуемый функциональный интеграл берется по некоторой гауссовской мере в пространстве непрерывных функций. Дело в том, что в случае гауссовского функционального интеграла можно провести многие необходимые вычисления, используя хорошо развитые приближенные и асимптотические методы теории гауссовских мер [11]–[17].

Отметим, что выделение и характеристика гауссовской меры, по которой ведется интегрирование в функциональном интеграле, является довольно сложной задачей. В настоящей статье мы рассмотрим один важный и интересный пример подобного рода. Исследуя функциональные интегралы, введенные в работах [18], [19], Санкович доказал [20]–[23], что указанные функциональные интегралы берутся по особой

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: vrfatalov@yandex.ru

гауссовской мере, которая названа в работе [21] гауссовской мерой Боголюбова. Дадим описание этой меры, придерживаясь работ [20]–[22].

Гауссовский процесс Боголюбова – это стационарный гауссовский процесс $\xi(t)$, $t \in [0, \beta]$, с нулевым средним и ковариационной функцией

$$B(t-s) \equiv B(t, s) := \mathbf{E} \xi(t)\xi(s) = \frac{1}{2m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}} \operatorname{ch} \left(\omega|t-s| - \frac{\beta\omega}{2} \right), \quad t, s \in [0, \beta]. \quad (1.1)$$

Здесь и ниже $\mathbf{E}$ – оператор математического ожидания, взятый относительно вероятности $\mathbf{P}$, $m > 0$ – масса частицы, $\beta > 0$ – обратная температура, $\omega > 0$ – собственная частота гармонического осциллятора [21]. Согласно общему результату из теории гауссовских процессов [24] процесс Боголюбова $\xi(t)$ имеет почти наверное (п. н.) непрерывные траектории на отрезке $[0, \beta]$. Используя формулу (1.1), находим $\mathbf{E} [\xi(\beta) - \xi(0)]^2 = 0$, следовательно, $\xi(0) = \xi(\beta)$ п. н. Учитывая вышеизложенное, заключаем, что траектории гауссовского процесса Боголюбова принадлежат п. н. пространству $C^0[0, \beta]$ непрерывных на отрезке $[0, \beta]$ функций $x(t)$ с равномерной метрикой, удовлетворяющих условию $x(0) = x(\beta)$. Распределение $\mu_{\mathbf{B}}$ процесса $\xi(t)$ в пространстве $C^0[0, \beta]$ называется *гауссовской мерой Боголюбова*. Сведения о распределениях случайных процессов в функциональных пространствах можно найти в книге [25]; теория гауссовских мер изложена в работах [26]–[29].

В статье [21] на основе метода работ [11], [12] вычислены приближенно некоторые функциональные интегралы по мере Боголюбова. Приближенные формулы в работе [21] представляют собой квадратурные формулы, которые являются точными для функциональных многочленов. В дополнение к результатам работы [21] в статье [30] были получены приближенные асимптотические формулы для одного класса функциональных интегралов типа Лапласа, взятых по мере Боголюбова. В качестве основного функционала в [30] была взята норма пространства L^p при $p > 0$.

Проводя дальнейшие исследования асимптотических свойств меры Боголюбова, связанные с одной задачей теории возмущений квантовой теории поля (см. [6], [31]), мы обнаружили, что третьи утверждения в теоремах 1 и 3 из работы [30] справедливы только при $0 < p < p_0$, где

$$p_0 \equiv p_0(\beta\omega) := 2 + \frac{4\pi^2}{\beta^2\omega^2}. \quad (1.2)$$

Оказалось, что вычисление асимптотик интегралов типа Лапласа и вероятностей больших отклонений для меры Боголюбова в случае L^p -функционалов резко усложняется при $p > p_0$.

В настоящей работе мы даем объяснение причины этого явления, связанного с возникновением порогового значения p_0 , а также доказываем утверждения о логарифмических асимптотиках и обсуждаем вид точных асимптотик при $p \geq p_0$. Кроме того, мы доказываем новые теоремы об асимптотиках типа Лапласа для моментов L^p -нормы гауссовского процесса Боголюбова, когда порядок момента становится неограниченно большим. Мы также рассматриваем большие отклонения для нормы типа точной верхней грани, т. е. при $p = \infty$. Доказательства полученных в статье результатов проводятся с помощью метода Лапласа в функциональных пространствах для гауссовских мер.

Связь между мерами Винера и Боголюбова описана в работах [22], [30]. Оказалось, что процесс Боголюбова относится к классу *гауссовских процессов винеровского типа* в том смысле, что его траектории обладают той же степенью регулярности, что и траектории винеровского процесса: они непрерывны по Гёльдеру порядка $\gamma < 1/2$ [30] и не удовлетворяют условию Гёльдера порядка $\gamma > 1/2$ (см. [22], а также [24]). В указанный класс гауссовских процессов типа винеровского входят такие важные в теории и приложениях процессы, как процессы Орнштейна–Уленбека, условные винеровские процессы [6], гауссовские процессы с треугольной ковариационной функцией и ряд других [32], [33].

Перейдем к точной формулировке полученных результатов. Приведенные ниже определения и построения аналогичны изложенным в статье [32], но при этом имеются существенные отличия.

Для фиксированного числа $2 < p < \infty$ введем следующие функции, играющие важную роль на протяжении всей статьи:

$$J(\delta) \equiv J_p(\delta) := \int_{\delta}^1 \frac{dt}{\sqrt{\frac{1-\delta^2}{1-\delta^p}(1-t^p) - (1-t^2)}}, \quad (1.3)$$

$$M(\delta) \equiv M_p(\delta) := \int_{\delta}^1 \frac{t^p dt}{\sqrt{\frac{1-\delta^2}{1-\delta^p}(1-t^p) - (1-t^2)}}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (1.4)$$

Из определений получаем неравенства

$$0 < \delta^p J(\delta) < M(\delta) < J(\delta), \quad 0 < \delta < 1. \quad (1.5)$$

Несложно убедиться, что функции $J(\delta)$ и $M(\delta)$ корректно определены и непрерывны, некоторые свойства функции $J(\delta)$ изложены ниже в разделе 3. Здесь мы отметим, что подынтегральные функции в (1.3) и (1.4) имеют интегрируемые особенности при $t = \delta$ и $t = 1$. В лемме 5 настоящей статьи также доказаны следующие соотношения для $p > 2$:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} J_p(\delta) = +\infty, \quad \lim_{\delta \uparrow 1} J_p(\delta) = \frac{\pi}{\sqrt{p-2}}. \quad (1.6)$$

Доопределим по непрерывности

$$J_p(1) := \lim_{\delta \uparrow 1} J_p(\delta) = \frac{\pi}{\sqrt{p-2}}.$$

В разделе 5 доказано следующее важное утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть число $p > p_0$ фиксировано. Тогда уравнение

$$J_p(\delta) = \frac{\beta\omega}{2}, \quad 0 < \delta < 1, \quad (1.7)$$

имеет единственный корень, который мы обозначим через $\delta_0 \equiv \delta_0(p, \beta\omega)$.

Для $p > p_0$ положим

$$b_0 = b_0(p, \beta\omega) := \left(\frac{\beta\omega}{2M(\delta_0)} \right)^{1/p}, \quad h_0 := b_0\delta_0, \quad \delta_{\infty} := \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\beta\omega}{2}}. \quad (1.8)$$

Из леммы 12 и формулы (1.5) вытекают неравенства

$$0 < \delta_\infty < \delta_0 < h_0 < 1 < b_0. \quad (1.9)$$

Определим также важный параметр

$$\lambda_0 = \lambda_0(p, \beta\omega) := \beta^2 \omega^2 \frac{b_0^2 - h_0^2}{2(b_0^p - h_0^p)} = \beta^2 \omega^2 \frac{1 - \delta_0^2}{2(1 - \delta_0^p)b_0^{p-2}}. \quad (1.10)$$

Для $p > p_0$ справедливы следующие полезные оценки, которые доказаны ниже в конце этого раздела:

$$2\beta\omega \operatorname{th} \frac{\beta\omega}{2} \leq p\lambda_0 \leq \omega^2 \beta^2. \quad (1.11)$$

Важное свойство монотонного убывания по $p \in (p_0, \infty)$ функции $p\lambda_0(p, \beta\omega)$ описано в лемме 13.

Положим

$$\|x\|_p := \left(\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad p > 0, \quad \|x\|_\infty := \sup_{t \in [0, \beta]} |x(t)|. \quad (1.12)$$

Как известно, при $p \geq 1$ функционал $\|x\|_p$ является нормой в банаховом пространстве $L^p[0, \beta]$ функций, интегрируемых в p -й степени на отрезке $[0, \beta]$. Точные асимптотики интегралов типа Лапласа для L^p -нормы, взятых по мере Боголюбова, имеют следующий вид.

ТЕОРЕМА 1. Пусть задано число $0 < \alpha < 2$. Для $p > 0$ положим

$$q_0 = q_0(p, \alpha) = \frac{2 - \alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{m\omega^2} \beta^{(2-p)/p} \right)^{\alpha/(2-\alpha)} > 0. \quad (1.13)$$

Справедливы следующие утверждения.

1. Предположим, что фиксировано число $0 < p < 2$. Тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{u\|\xi\|_p^\alpha} &\equiv \int_{C^0[0, \beta]} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} d\mu_B(x) = \\ &= d_0 \exp \{ q_0 u^{2/(2-\alpha)} \} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где

$$d_0 = d_0(p, \alpha) = \frac{2\sqrt{2-p} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\sqrt{2-\alpha} \operatorname{sh} \left(\frac{\beta\omega}{2} \sqrt{2-p} \right)} > 0.$$

2. При $u \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \int_{C^0[0, \beta]} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta x^2(t) dt \right)^{\alpha/2} \right\} d\mu_B(x) = \\ = \exp \left\{ \frac{2 - \alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{m\omega^2} \right)^{\alpha/(2-\alpha)} u^{2/(2-\alpha)} \right\} \frac{4 \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\beta\omega \sqrt{2-\alpha}} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.15)$$

3. Пусть фиксировано число $2 < p < p_0$, тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{u\|\xi\|_p^\alpha} &\equiv \int_{C^0[0,\beta]} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} d\mu_B(x) = \\ &= d_1 \exp \{ q_0 u^{2/(2-\alpha)} \} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$d_1 = d_1(p, \alpha) = \frac{2\sqrt{p-2} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\sqrt{2-\alpha} \sin\left(\frac{\beta\omega}{2}\sqrt{p-2}\right)} > 0. \quad (1.17)$$

4. Пусть фиксировано число $p > p_0$, тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\ln \mathbf{E} e^{u\|\xi\|_p^\alpha} = \ln \int_{C^0[0,\beta]} e^{u\|x\|_p^\alpha} d\mu_B(x) = q_1 u^{2/(2-\alpha)} (1 + o(1)), \quad (1.18)$$

где

$$q_1 = q_1(p, \alpha) = \frac{2-\alpha}{2} \left(\frac{\alpha\beta^{(2+p)/p}}{\lambda_0 p m} \right)^{\alpha/(2-\alpha)} > 0. \quad (1.19)$$

Формулы (1.13)–(1.17) повторяют формулы (1.2)–(1.5) из теоремы 1 работы [30] при $0 < p < p_0$. Формула (1.18) дает новую константу для логарифмической асимптотики по сравнению с п. 3 упомянутой теоремы при $p > p_0$.

Ограничение сверху $\alpha < 2$ в теореме 1 есть следствие известной теоремы Ландау–Маркуса–Шепша–Ферника об экспоненциальной интегрируемости квадрата нормы гауссовского случайного элемента (см. [26]–[29], а также замечание 1 в [30]).

Оценки вероятностей больших отклонений для меры Боголюбова в L^p -норме приведены в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть фиксировано число $0 < p < 2$. Тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{ \|\xi\|_p > u \} &\equiv \mathbf{P} \left\{ \int_0^\beta |\xi(t)|^p dt > u^p \right\} \equiv \mu_B \left\{ x: \int_0^\beta |x(t)|^p dt > u^p \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{m\omega^2}{2} \beta^{(p-2)/p} u^2 \right\} \frac{d_2}{u} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где

$$d_2 = d_2(p) = \frac{\sqrt{2(2-p)} \beta^{(2-p)/2p} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\omega \sqrt{\pi m} \operatorname{sh}\left(\frac{\beta\omega}{2}\sqrt{2-p}\right)} > 0. \quad (1.21)$$

2. При $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{ \|\xi\|_2 > u \} &\equiv \mathbf{P} \left\{ \int_0^\beta \xi^2(t) dt > u^2 \right\} \equiv \mu_B \left\{ x: \int_0^\beta x^2(t) dt > u^2 \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{m\omega^2}{2} u^2 \right\} \frac{2\sqrt{2} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{u\beta\omega^2 \sqrt{\pi m}} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.22)$$

3. Пусть фиксировано число $2 < p < p_0$, тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \int_0^\beta |\xi(t)|^p dt > u^p \right\} &\equiv \mu_B \left\{ x: \int_0^\beta |x(t)|^p dt > u^p \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{m\omega^2}{2} \beta^{(p-2)/p} u^2 \right\} \frac{d_3}{u} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.23)$$

где

$$d_3 = d_3(p) = \frac{\sqrt{2(p-2)} \beta^{(2-p)/2p} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\omega \sqrt{\pi m} \sin(\frac{\beta\omega}{2} \sqrt{p-2})} > 0. \quad (1.24)$$

4. Пусть фиксировано число $p > p_0$, тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\ln \mathbf{P} \left\{ \int_0^\beta |\xi(t)|^p dt > u^p \right\} = -\frac{m\lambda_0 p}{2\beta^{(p+2)/p}} u^2 (1 + o(1)). \quad (1.25)$$

Формулы (1.20)–(1.24) повторяют формулы (1.12)–(1.16) из теоремы 3 работы [30] при $0 < p < p_0$. Формула (1.25) дает новую константу для логарифмической асимптотики по сравнению с п. 3 указанной теоремы при $p > p_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что точные асимптотики (1.18) для среднего значения и вероятности (1.25) имеют иные степенные множители по u по сравнению с асимптотиками из формул (1.14)–(1.16) и формул (1.21)–(1.23) соответственно. Это связано с тем, что при $p > p_0$ соответствующая экстремальная задача для функционала действия в методе Лапласа имеет однопараметрическое многообразие решений (см. ниже лемму 10 и лемму 18). Указанный факт, как и в конечномерном методе Лапласа, оказывает влияние на показатель степенного множителя точной асимптотики (см. теорему 1 в [13], а также работы [34]–[37]). Можно доказать, что при некоторых достаточно простых условиях справедливы следующие асимптотические соотношения при $p > p_0$ и $u \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{E} e^{u\|\xi\|_p^\alpha} = \int_{C^0[0,\beta]} e^{u\|x\|_p^\alpha} d\mu_B(x) = c_1 \exp\{q_1 u^{2/(2-\alpha)}\} u^{1/(2-\alpha)} (1 + o(1)), \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \int_0^\beta |\xi(t)|^p dt > u^p \right\} &\equiv \mu_B \left\{ x: \int_0^\beta |x(t)|^p dt > u^p \right\} = \\ &= c_2 \exp \left\{ -\frac{m\lambda_0 p}{2\beta^{(p+2)/p}} u^2 \right\} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.27)$$

где $c_1 = c_1(p, m, \beta, \omega) > 0$ и $c_2 = c_2(p, m, \beta, \omega) > 0$ – некоторые константы.

Строгое доказательство соотношений (1.26) и (1.27) и описание постоянных c_1, c_2 является достаточно сложным и длинным, поэтому его целесообразно изложить в отдельной работе. Здесь мы лишь укажем, что вывод формулы (1.26) основан на теореме 1 из работы [13] при $\dim M = 1$ и лемме 18 настоящей статьи, а формула (1.27) доказывается при помощи общей теоремы 1 из работы [37] и леммы 10 настоящей статьи.

Результат теоремы 2 интересно сравнить с точной асимптотикой больших уклонений гауссовского процесса Боголюбова для L^∞ -функционала, т. е. для точной верхней грани.

ТЕОРЕМА 3. Пусть фиксировано число $0 < \beta_0 < \beta$. Тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнены асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} \mu_B \left\{ x: \sup_{t \in [0, \beta_0]} |x(t)| > u \right\} &\equiv \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, \beta_0]} |\xi(t)| > u \right\} = 2 \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, \beta_0]} \xi(t) > u \right\} (1 + o(1)) = \\ &= 2 \exp \left\{ -m\omega u^2 \operatorname{th} \frac{\beta\omega}{2} \right\} u \beta_0 \sqrt{\frac{m}{\pi}} \left(\omega \operatorname{th} \frac{\beta\omega}{2} \right)^{3/2} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, \beta]} |\xi(t)| > u \right\} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, \beta]} \xi(t) > u \right\} = -m\omega \operatorname{th} \frac{\beta\omega}{2}. \quad (1.29)$$

Данная теорема доказана ниже в разделе 8. Брать в формуле (1.28) в качестве β_0 число β , вообще говоря, нельзя. Как видим, показатели степенных множителей по u в правых частях формул из теоремы 2 и соотношения (1.28) разные. Это объясняется тем, что точная асимптотика больших отклонений для функционала типа точной верхней грани (в отличие от интегральных L^p -функционалов при $0 < p < \infty$) зависит от гёльдеровских свойств траекторий рассматриваемого гауссовского процесса.

Справедливы следующие аналоги теорем 1 и 2 в случае, когда степень функции $x(t)$ берется без модуля.

ТЕОРЕМА 4. Имеют место следующие утверждения.

1. Пусть фиксированы числа $0 < p < p_0$ и $0 < \alpha < 2$, имеющие следующий вид:

$$p = \frac{2k_1 - 1}{2k_2 - 1}, \quad \alpha = \frac{2k_3 - 1}{2k_4 - 1}, \quad k_j = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (1.30)$$

Тогда при $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \int_{C^0[0, \beta]} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta x^p(t) dt \right)^{\alpha/p} \right\} d\mu_B(x) &= \\ = \frac{1}{2} \int_{C^0[0, \beta]} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} d\mu_B(x) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.31)$$

2. Пусть фиксировано число $0 < p < p_0$, имеющее вид, заданный в (1.30). Тогда при $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\mu_B \left\{ \int_0^\beta x^p(t) dt > u^p \right\} = \frac{1}{2} \mu_B \left\{ \int_0^\beta |x(t)|^p dt > u^p \right\} (1 + o(1)). \quad (1.32)$$

Далее асимптотика интеграла из правой части формулы (1.31) вычисляется при помощи теоремы 1, а асимптотика вероятности из правой части формулы (1.32) – при помощи теоремы 2. Теорема 4 уточняет теоремы 2 и 4 из статьи [30], в формулировках которых отсутствует условие $p < p_0$. Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теорем 2 и 4 из [30].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Значения чисел $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$ из теоремы 4 подобраны таким образом, что для любого действительного числа r определены однозначно степени r^p , $r^{\alpha/p}$, принимающие действительные значения. При этом, в частности, выполнены равенства $(-1)^p = -1$ и $(\int_0^\beta (-\xi(t))^p dt)^{\alpha/p} = -(\int_0^\beta \xi^p(t) dt)^{\alpha/p}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для порогового числа $p = p_0$ асимптотическое поведение интегралов и вероятностей из теорем 1, 2, 4 нужно исследовать отдельно. Здесь возникает так называемый вырожденный случай (см., в частности, теорему 2.3 в статье [14]). Логарифмические асимптотики при этом имеют тот же вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. В случае $p = p_0$ справедливы следующие утверждения.

1. Для $0 < \alpha < 2$ выполнено асимптотическое равенство

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^{2/(2-\alpha)}} \ln \mathbf{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta |\xi(t)|^{p_0} dt \right)^{\alpha/p_0} \right\} = q_0(p_0, \alpha), \quad (1.33)$$

где $q_0(p_0, \alpha)$ задано в (1.13). Пусть число p_0 и число $0 < \alpha < 2$ удовлетворяют равенствам (1.30). Тогда выполнено асимптотическое соотношение

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^{2/(2-\alpha)}} \ln \mathbf{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta \xi^{p_0}(t) dt \right)^{\alpha/p_0} \right\} = q_0(p_0, \alpha). \quad (1.34)$$

2. Имеет место равенство

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln \mu_B \left\{ \int_0^\beta |x(t)|^{p_0} dt > u^{p_0} \right\} = -\frac{m\omega^2}{2} \beta^{(p_0-2)/p_0}. \quad (1.35)$$

Для числа p_0 , удовлетворяющего первому равенству в (1.30), справедливо соотношение

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln \mu_B \left\{ \int_0^\beta x^{p_0}(t) dt > u^{p_0} \right\} = -\frac{m\omega^2}{2} \beta^{(p_0-2)/p_0}. \quad (1.36)$$

Во многих задачах математической и теоретической физики, теории случайных процессов, математической статистики возникает необходимость приближенного вычисления моментов распределений L^p -функционалов от гауссовских процессов типа винеровского (см., например, работы [6], [21], [31], [38]). В настоящей статье мы докажем следующий асимптотический результат о моментах распределений L^p -функционалов для гауссовского процесса Боголюбова. Для $p > 0$ положим

$$q_2 = q_2(p) = \frac{p}{2} - \frac{p}{2} \ln \left(\frac{p}{m\beta\omega^2} \right). \quad (1.37)$$

ТЕОРЕМА 5. Справедливы следующие утверждения.

1. Предположим, что фиксировано число $0 < p < 2$. Тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\int_{C^0[0,\beta]} \left[\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right]^u d\mu_B(x) \equiv \mathbf{E} \left[\int_0^\beta |\xi(t)|^p dt \right]^u = d_5 e^{-q_2 u} u^{up/2} \beta^u (1 + o(1)), \quad (1.38)$$

где

$$d_5 = d_5(p) = \frac{\sqrt{2(2-p)} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\operatorname{sh} \left(\frac{\beta\omega}{2} \sqrt{2-p} \right)} > 0. \quad (1.39)$$

2. При $u \rightarrow \infty$ имеет место равенство

$$\int_{C^0[0,\beta]} \left[\int_0^\beta x^2(t) dt \right]^u d\mu_B(x) \equiv \mathbf{E} \left[\int_0^\beta \xi^2(t) dt \right]^u = \frac{2\sqrt{2} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\beta\omega} u^u \left(\frac{2}{em\omega^2} \right)^u (1 + o(1)). \quad (1.40)$$

3. Пусть фиксировано число $2 < p < p_0$, тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\int_{C^0[0,\beta]} \left[\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right]^u d\mu_B(x) \equiv \mathbf{E} \left[\int_0^\beta |\xi(t)|^p dt \right]^u = d_6 e^{-q_2 u} u^{up/2} \beta^u (1 + o(1)), \quad (1.41)$$

где

$$d_6 = d_6(p) = \frac{\sqrt{2(p-2)} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\sin\left(\frac{\beta\omega}{2} \sqrt{p-2}\right)} > 0. \quad (1.42)$$

4. Пусть фиксировано число $p > p_0$, тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое равенство

$$\int_{C^0[0,\beta]} \left[\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right]^u d\mu_B(x) \equiv \mathbf{E} \left[\int_0^\beta |\xi(t)|^p dt \right]^u = \left(\frac{\beta u}{m} \right)^{up/2} \beta^u e^{-uq_3(p)(1+o(1))}, \quad (1.43)$$

где

$$q_3 = q_3(p) = \frac{p}{2}(1 + \ln \lambda_0), \quad (1.44)$$

а число λ_0 задано в формуле (1.10).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что в соотношении (1.43) записана логарифмическая асимптотика, так как выражение $1 + o(1)$ стоит в показателе последней экспоненты. Можно получить формулу для точной асимптотики интеграла из равенства (1.43) при $p > p_0$. Вывод точной асимптотики здесь проводится по схеме доказательства соотношения (1.26).

ТЕОРЕМА 6. Пусть фиксировано число $0 < p < p_0$, имеющее вид, заданный в (1.30), тогда при $k \rightarrow \infty$, $k \in \mathbb{N}$, справедливо соотношение

$$\mathbf{E} \left[\int_0^\beta \xi^p(t) dt \right]^{2k} = \mathbf{E} \left[\int_0^\beta |\xi(t)|^p dt \right]^{2k} (1 + o(1)). \quad (1.45)$$

Далее асимптотика среднего значения из правой части данной формулы вычисляется при помощи теоремы 5. Отметим интересный факт, состоящий в том, что функция от k , записанная в левой части формулы (1.45), не превосходит функции, записанной в правой части этой формулы. Тем не менее эти две функции имеют одинаковую точную асимптотику. Объяснение этого факта дано при доказательстве теоремы 6 в п. 7.8.

В случае $p = 1$ имеем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $u \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\int_{C^0[0,\beta]} \left[\int_0^\beta |x(t)| dt \right]^u d\mu_B(x) \equiv \mathbf{E} \left[\int_0^\beta |\xi(t)| dt \right]^u = \sqrt{2} u^{u/2} \left(\frac{\beta}{em\omega^2} \right)^{u/2} (1 + o(1)). \quad (1.46)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $p = 1$ соотношения (1.45) и (1.46) согласованы друг с другом между собой. В самом деле, используя теорему Фубини и формулу (1.1), легко показать, что случайная величина $\zeta := \int_0^\beta \xi(t) dt$ является гауссовской случайной величиной с нулевым средним и дисперсией

$$\sigma_0^2(\beta) := \int_0^\beta \int_0^\beta \mathbf{E} \xi(t) \xi(s) dt ds = \frac{\beta}{m\omega^2}. \quad (1.47)$$

Применяя известную формулу для моментов гауссовской случайной величины (см., например, [39]) и выражение для асимптотики гамма-функции (см. п. 6.1.39 в [40]), заключаем, что при $k \rightarrow \infty$, $k \in \mathbb{N}$, выполнены соотношения

$$\mathbf{E} \left[\int_0^\beta \xi(t) dt \right]^{2k} \equiv \mathbf{E} \zeta^{2k} = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) [\sigma_0(\beta)]^{2k} = \sqrt{2} (2k)^k e^{-k} [\sigma_0(\beta)]^{2k} (1 + o(1)). \quad (1.48)$$

Теперь мы можем вычислить двумя разными способами точные асимптотики двух выражений из формулы (1.45) при $p = 1$: при помощи соотношений (1.47), (1.48) и при помощи соотношения (1.46) с $u = 2k$. В результате получаем совпадение указанных двух асимптотик.

Для случая $p = p_0$ асимптотическое поведение средних значений из теорем 5, 6 нужно исследовать отдельно, так как здесь также возникает вырожденный случай. Логарифмические асимптотики при этом имеют тот же вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *При $u \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение*

$$\int_{C^0[0,\beta]} \left[\int_0^\beta |x(t)|^{p_0} dt \right]^u d\mu_B(x) \equiv \mathbf{E} \left[\int_0^\beta |\xi(t)|^{p_0} dt \right]^u = u^{up_0/2} \beta^u e^{-uq_2(p_0)(1+o(1))}, \quad (1.49)$$

где $q_2(p_0)$ задано в (1.37).

2. *Для числа p_0 , удовлетворяющего первому равенству в (1.30), справедлива следующая асимптотическая формула при $k \rightarrow \infty$, $k \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbf{E} \left[\int_0^\beta \xi^{p_0}(t) dt \right]^{2k} = (2k)^{kp_0} \beta^{2k} e^{-2kq_2(p_0)(1+o(1))}. \quad (1.50)$$

Отметим, что в (1.49), (1.50) выражение $1 + o(1)$ стоит в показателях экспоненты. Докажем теперь оценки (1.11). Для фиксированных чисел $0 < s < r \leq \infty$ и функционала (1.12) справедливо неравенство

$$\|x\|_s \leq \beta^{1/s-1/r} \|x\|_r, \quad \text{если} \quad \|x\|_r < \infty \quad (1.51)$$

(см., например, монографии [41] и [42]); здесь, как обычно, мы полагаем, что $1/r = 0$ при $r = \infty$. Используя утверждение 4 теоремы 2, формулы (1.29), (1.35), (1.51), получаем при $p > p_0$ цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln \mathbf{P} \{ \|\xi\|_{p_0} > u \beta^{1/p_0-1/p} \} &= -\frac{m\omega^2}{2} \beta^{(p-2)/p} \leq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln \mathbf{P} \{ \|\xi\|_p > u \} = \\ &= -\frac{m\lambda_0 p}{2\beta^{(p+2)/p}} \leq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln \mathbf{P} \left\{ \|\xi\|_\infty > \frac{u}{\beta^{1/p}} \right\} = -\frac{m\omega}{\beta^{2/p}} \operatorname{th} \frac{\beta\omega}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, вытекают оценки (1.11). В работе [43] при помощи метода Лапласа доказаны аналоги теорем 5, 6, следствия 1 и предложения 2 для винеровского процесса и броуновского моста.

2. МЕТОД ЛАПЛАСА ДЛЯ ГАУССОВСКИХ МЕР В СЛУЧАЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Здесь мы изложим в краткой форме три основных результата, при помощи которых доказываются теоремы 1–6. Более полное изложение имеется в статьях [16], [30].

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ – действительное сепарабельное банахово пространство, $\mathcal{E}$ – борелевская σ -алгебра в E , E^* – сопряженное к E пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – линейная форма, устанавливающая двойственность между E и E^* . Пусть P_A – гауссовская мера, определенная на $\mathcal{E}$, имеющая нулевое среднее значение и инъективный ковариационный оператор $A: E^* \rightarrow E$ [29].

Обозначим первую и вторую производные Фреше числовой функции $S: E \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x через $S'(x)$ и $S''(x)$. Мы будем предполагать, что производные $S'(x)$ и $S''(x)$ можно рассматривать как ограниченные линейные операторы из E в $\mathbb{R}$ и из E в E^* соответственно, при этом будем употреблять обозначения

$$S'(x)[h] = \langle h, S'(x) \rangle, \quad S''(x)[h, v] = \langle h, S''(x)v \rangle, \quad h, v \in E.$$

Обозначим также через $\text{Dom}(T)$ область определения оператора T , через $\text{Ran}(T)$ – область значений оператора T , через I – тождественный оператор в E . Пусть $(H_A, \|\cdot\|_A)$ обозначает гильбертово пространство, ассоциированное с ковариационным оператором A , т.е. пополнение области значений $\text{Ran}(A)$ оператора A относительно предгильбертовой нормы $\|y\|_A := \sqrt{\langle Ay, y \rangle}$, $y \in E^*$ [29].

2.1. Точные асимптотики для гауссовских интегралов типа Лапласа.

Предположим, что выполнены следующие условия.

D1. Пусть f и F – заданные на E непрерывные действительные функции, такие, что для некоторых постоянных $b_1 > 0$, $b_2 \geq 0$, $0 \leq b_3 < 1/2\|A\|$, $b_4 \geq 0$ справедливы неравенства

$$|f(x)| \leq b_1 e^{b_2 \|x\|^2}, \quad F(x) \geq -b_3 \|x\|^2 - b_4, \quad x \in E.$$

D2. Функционал $\Lambda(x) := F(x) + \langle x, A^{-1}x \rangle/2$ достигает своего минимума на множестве $\text{Dom}(A^{-1})$ в конечном числе точек $x^1, x^2, \dots, x^m$. Предположим, что $\inf_{x \in H_A} [F(x) + \|x\|_A^2/2]$ также достигается только в точках $x^1, x^2, \dots, x^m$.

D3. В пространстве E существуют окрестности U_i точек x^i такие, что функция F трижды дифференцируема по Фреше в точках множеств U_i , причем $f(x^i) \neq 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$.

D4. Для всех $i = 1, 2, \dots, m$ собственные значения γ_{ik} , $k = 1, 2, \dots$, ядерного оператора $AF'''(x^i): E \rightarrow E$ таковы, что конечен и не равен нулю детерминант $\det R_i := \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \gamma_{ik})$, где $R_i = I + AF'''(x^i): E \rightarrow E$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть P_A – гауссовская мера в E , имеющая нулевое среднее значение и инъективный ковариационный оператор A .

Пусть выполнены условия **D1–D4**. Тогда для всех $i = 1, 2, \dots, m$ имеем $\det R_i > 0$, выполняются равенства $x^i = -AF'(x^i)$, и при $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\int_E f(x) e^{-u^2 F(x)} dP_A(ux) = e^{-u^2 \Lambda(x^1)} \sum_{i=1}^m f(x^i) [\det R_i]^{-1/2} (1 + o(1)). \quad (2.1)$$

Теорема 7 представляет собой банаховозначный вариант известного результата [14] об асимптотическом разложении гауссовского интеграла типа Лапласа в гильбертовом пространстве (см. также [16]).

2.2. Точные асимптотики больших отклонений для гауссовских мер.

Рассмотрим более простой случай, когда E представляет собой сепарабельное гильбертово пространство H с нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Предположим, что выполнены следующие условия.

C1. Замкнуто борелевское множество $D = \{x \in H: Q(x) \geq 0\}$, где $Q(x)$ – непрерывная действительная функция такая, что или D , или множество $H \setminus D$ представимо в виде конечного объединения непересекающихся выпуклых множеств из H . Пусть D имеет непустую внутренность и не содержит нулевого элемента пространства H .

C2. Квадратичная форма $\langle x, A^{-1}x \rangle$ достигает своего минимума на $D \cap \text{Dom}(A^{-1})$ в конечном числе точек $x^1, x^2, \dots, x^m$, лежащих на границе множества D . Предположим, что $\inf_{x \in D \cap H_A} \|x\|_A^2$ также достигается только в точках $x^1, x^2, \dots, x^m$.

C3. В гильбертовом пространстве H существуют окрестности U_i точек x^i такие, что функция Q трижды дифференцируема по Фреше в точках множеств U_i , причем $\langle x^i, Q'(x^i) \rangle \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

C4. Для всех $i = 1, 2, \dots, m$ собственные значения γ_{ik} , $k = 1, 2, \dots$, ядерного оператора $AQ''(x^i): H \rightarrow H$ таковы, что не равен нулю $\det R_i := \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_i \gamma_{ik})$, где $R_i = I - \lambda_i AQ''(x^i): H \rightarrow H$ и

$$\lambda_i = \frac{\langle x^1, A^{-1}x^1 \rangle}{\langle x^i, Q'(x^i) \rangle} > 0.$$

Из этого условия вытекает, что оператор R_i является инъективным, $i = 1, 2, \dots, m$. Следовательно, согласно альтернативе Фредгольма [41] $\text{Ran}(R_i) = H$ и существует обратный оператор R_i^{-1} , определенный на всем H . В частности, $x^i \in \text{Dom}(R_i^{-1})$, $i = 1, 2, \dots, m$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть P_A – гауссовская мера в гильбертовом пространстве H , имеющая нулевое среднее значение и инъективный ковариационный оператор A . Пусть выполнены условия **C1–C4**. Тогда

$$x^i = \lambda_i A Q'(x^i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.2)$$

и при $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$P_A(uD) = e^{-u^2 \langle x^1, A^{-1}x^1 \rangle / 2} \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^m |\det R_i \langle R_i^{-1}x^i, A^{-1}x^i \rangle|^{-1/2} (1 + o(1)). \quad (2.3)$$

Теорема 8 доказана в работе [44], банаховозначный вариант этой теоремы изложен в статье [16].

2.3. Логарифмические асимптотики для гауссовских мер и интегралов.

Принцип больших уклонений. Фундаментальный принцип больших уклонений для вероятностных мер и интегралов по ним, берущий свое начало с работы [45], сегодня находит чрезвычайно широкое применение для решения различных асимптотических задач теории вероятностей, статистики, математической и статистической физики, теории чисел, теории информации, математического моделирования и других областей математики, физики, а также естествознания [16], [46]–[53]. Применяя принцип больших уклонений, можно вычислить логарифмические асимптотики интеграла из (2.1) и вероятности из (2.3) в следующих трех случаях, когда вычисление точной асимптотики затруднено:

- 1) функция F или Q недифференцируемы хотя бы в одной из экстремальных точек x^i ;
- 2) нарушено условие невырожденности из условий **D4** или **C4** в одной из точек x^i , т. е. когда $\det R_i = 0$,
- 3) минимум в экстремальной задаче из условий **D2** или **C2** достигается на конечномерном многообразии ненулевой размерности.

ТЕОРЕМА 9 (принцип больших уклонений для гауссовских мер). *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть P_A – гауссовская мера в банаховом пространстве E , имеющая нулевое среднее значение и инъективный ковариационный оператор A . Тогда семейство гауссовских мер $\{P_A(uC), u > 0\}$, $C \in \mathcal{E}$, удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия I_A , имеющим следующий вид:

$$I_A(x) = \begin{cases} \|x\|_A^2/2, & \text{если } x \in H_A, \\ +\infty, & \text{если } x \in E \setminus H_A. \end{cases}$$

2. Для любого открытого в E множества D_0 выполнены неравенства

$$-\inf_{x \in D_0} I_A(x) \leq \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln P_A(uD_0) \leq \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln P_A(uD) \leq -\inf_{x \in D} I_A(x),$$

где $D = \overline{D_0}$ – замыкание множества D_0 . В частности, если

$$\inf_{x \in D_0} I_A(x) = \inf_{x \in D} I_A(x),$$

то

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln P_A(uD) = -\inf_{x \in D} I_A(x). \quad (2.4)$$

3. Для любой непрерывной функции $F: E \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию **D1**, справедливо соотношение

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln \int_E e^{-u^2 F(x)} dP_A(ux) = -\inf_{x \in E} [F(x) + I_A(x)]. \quad (2.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Соотношение (2.4) верно для многих регулярных множеств, в частности для открытого выпуклого множества D_0 , а также для открытого множества D_0 , замыкание D которого удовлетворяет условию **C1**. Укажем также, что

$$\inf_{x \in D} I_A(x) = \frac{1}{2} \inf_{x \in D \cap \text{Ran}(A)} \langle x, A^{-1}x \rangle, \quad (2.6)$$

так как $\text{Ran}(A)$ плотно в $(H_A, \|\cdot\|_A)$, кроме того, если выполнено последнее требование в условии **C2**, то минимум в левой и правой частях равенства (2.6) доставляют одни и те же точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Аналогично, экстремальная задача в правой части равенства (2.5) эквивалентна экстремальной задаче из условия **D2** в силу последнего требования в **D2**, т. е. минимум в обеих задачах одинаков и достигается на одном и том же множестве. Утверждение 3 теоремы 9 часто называют теоремой Варадана, так как вариант этой теоремы впервые появился в статье [45].

На основе соотношения (2.4) проводится вывод логарифмических асимптотик для вероятностей в формулах (1.25), (1.29), (1.35), (1.36). Логарифмические асимптотики для интегралов в формулах (1.18), (1.33), (1.34), (1.43), (1.49), (1.50) доказываются при помощи соотношения (2.5).

3. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $J(\delta)$

Доказательство теорем 1–6 основано на теоремах 7–9. При этом основную сложность представляет решение экстремальных задач из условий **D2** и **C2** для гауссовской меры Боголюбова. Для решения этих экстремальных задач нам понадобятся некоторые свойства функций $J(\delta)$ и $M(\delta)$.

Для фиксированного числа $p > 2$ введем следующую функцию:

$$\phi(t) := \frac{1-t^2}{1-t^p}, \quad t \in [0, 1), \quad \phi(1) := \lim_{t \uparrow 1} \phi(t) = \frac{2}{p}. \quad (3.1)$$

ЛЕММА 2. *Функция $\phi(t)$ строго монотонно убывает на отрезке $t \in [0, 1]$ от значения $\phi(0) = 1$ до значения $\phi(1) = 2/p < 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производная функции (3.1) имеет вид

$$\phi'(t) = \frac{t}{(1-t^p)^2} g(t), \quad g(t) := (2-p)t^p + pt^{p-2} - 2, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.2)$$

Вычисляя производную, получаем соотношения $g'(t) = p(p-2)t^{p-3}(1-t^2) > 0$ при $t \in (0, 1)$. Таким образом, функция $g(t)$ строго монотонно возрастает на отрезке $[0, 1]$ от значения $g(0) = -2$ до значения $g(1) = 0$. Следовательно, $g(t) < 0$ для всех $t \in [0, 1)$. Отсюда и из (3.2) вытекает неравенство $\phi'(t) < 0$ для всех $t \in (0, 1)$. Лемма доказана.

Для фиксированных чисел $0 < \delta < t < 1$ введем следующую функцию:

$$\tau(p) \equiv \tau(p, \delta, t) := \frac{1-t^p}{1-\delta^p}, \quad 0 < p < \infty. \quad (3.3)$$

Доопределим ее по непрерывности:

$$\tau(0) := \lim_{p \downarrow 0} \tau(p) = \frac{\ln t}{\ln \delta}, \quad \tau(\infty) := \lim_{p \uparrow \infty} \tau(p) = 1.$$

ЛЕММА 3. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Функция*

$$v(x) := \frac{\ln(x+1)}{x}, \quad 0 < x < \infty, \quad (3.4)$$

строго монотонно убывает на $(0, \infty)$ от значения $v(0) := \lim_{x \downarrow 0} v(x) = 1$ до значения $v(\infty) := \lim_{x \uparrow \infty} v(x) = 0$.

2. *Функция $\tau(p)$ строго монотонно возрастает при $0 < p < \infty$ от значения $\tau(0)$ до значения $\tau(\infty) = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производная функции (3.4) имеет вид

$$v'(x) = \frac{1}{x^2} \left[\frac{x}{x+1} - \ln(x+1) \right], \quad 0 < x < \infty. \quad (3.5)$$

Учитывая это равенство и известное неравенство $x/(x+1) < \ln(x+1)$ при $x > 0$ (см. книгу [40], гл. 4), заключаем, что для всех $x \in (0, \infty)$ справедливо неравенство $v'(x) < 0$. Это доказывает первое утверждение леммы.

Докажем второе утверждение. Производная функции (3.3) имеет вид

$$\tau'(p) = \frac{1}{(1-\delta^p)^2} [(1-t^p)\delta^p \ln \delta - (1-\delta^p)t^p \ln t], \quad 0 < p < \infty. \quad (3.6)$$

Положим

$$a = \frac{1}{t^p} - 1, \quad b = \frac{1}{\delta^p} - 1. \quad (3.7)$$

Напомним, что $0 < \delta < t < 1$, поэтому $0 < a < b < \infty$. Учитывая (3.6) и (3.7), несложно убедиться, что для произвольного фиксированного числа $p \in (0, \infty)$ неравенство $\tau'(p) > 0$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\frac{\ln(a+1)}{a} > \frac{\ln(b+1)}{b}.$$

Но последнее неравенство справедливо в силу первого утверждения леммы, так как $0 < a < b$. Второе утверждение, а вместе с ним и сама лемма, доказаны.

ЛЕММА 4. *При фиксированном $0 < \delta < 1$ функция $J_p(\delta)$, заданная в (1.3), строго монотонно убывает по $p \in (2, \infty)$. Существует предел*

$$J_\infty(\delta) := \lim_{p \uparrow \infty} J_p(\delta) = \int_\delta^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \delta^2}} = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \delta^2}}{\delta}. \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулы (1.3) и (3.3), получаем следующее равенство для $p \in (2, \infty)$:

$$J_p(\delta) = \int_\delta^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-\delta^2)\tau(p, \delta, t) - (1-t^2)}}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (3.9)$$

В силу второго утверждения леммы 3 для фиксированных $0 < \delta < t < 1$ подынтегральное выражение в (3.9) является строго монотонно убывающей функцией переменной $p \in (2, \infty)$. Отсюда вытекает первое утверждение леммы. Второе утверждение леммы мы выводим, применяя теорему Лебега о монотонной сходимости. Переходя в равенстве (3.9) к пределу под знаком интеграла при $p \rightarrow \infty$, мы получаем формулу (3.8). Лемма доказана.

ЛЕММА 5. При любом фиксированном $p \in (2, \infty)$ имеют место соотношения

$$\int_{\delta}^1 \frac{dt}{\sqrt{(2/p)(1-t^p) - (1-t^2)}} \geq J_p(\delta) \geq \int_{\delta}^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - t^p}}, \quad 0 < \delta < 1, \quad (3.10)$$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} J_p(\delta) = +\infty, \quad (3.11)$$

$$\lim_{\delta \uparrow 1} J_p(\delta) = \frac{\pi}{\sqrt{p-2}}. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулы (1.3) и (3.1), получаем следующее равенство для $p \in (2, \infty)$:

$$J_p(\delta) = \int_{\delta}^1 \frac{dt}{\sqrt{\phi(\delta)(1-t^p) - (1-t^2)}}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (3.13)$$

В силу леммы 2 при $0 < \delta < 1$ выполнено неравенство $2/p \leq \phi(\delta) \leq 1$. Отсюда и из соотношения (3.13) вытекают неравенства (3.10). Переходя в последнем неравенстве из (3.10) к пределу при $\delta \downarrow 0$, получаем соотношение (3.11), поскольку $\int_0^1 dt/\sqrt{t^2 - t^p} = +\infty$. Доказательство формулы (3.12) проведем по той же схеме, что и доказательство леммы 2 в работе [32]. Сделав в интеграле (1.3) замену переменной $s = t^p$, получим равенство

$$J_p(\delta) = \frac{1}{p} \int_{\delta^p}^1 \frac{s^{(1-p)/p} ds}{\sqrt{s^{2/p} - (s - \delta^p)/(1 - \delta^p) + (s - 1)\delta^2/(1 - \delta^p)}}. \quad (3.14)$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной $y = (s - \delta^p)/(1 - \delta^p)$ и положив $\varepsilon = 1 - \delta^p$, находим

$$J_p(\delta) = \frac{\varepsilon}{p} K(\varepsilon), \quad (3.15)$$

где

$$K(\varepsilon) := \int_0^1 \frac{(y\varepsilon + 1 - \varepsilon)^{(1-p)/p} dy}{\sqrt{(y\varepsilon + 1 - \varepsilon)^{2/p} - y + (y - 1)(1 - \varepsilon)^{2/p}}}. \quad (3.16)$$

Используя это определение и оценки $1 - \varepsilon \leq y\varepsilon + 1 - \varepsilon \leq 1$, справедливые при $0 \leq y \leq 1$, убеждаемся после простых преобразований, что выполнено соотношение

$$K(\varepsilon) = K_1(\varepsilon)(1 + o(1)), \quad \varepsilon \downarrow 0, \quad (3.17)$$

где

$$K_1(\varepsilon) := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x\varepsilon)^{2/p} - (1 - x) - x(1 - \varepsilon)^{2/p}}}. \quad (3.18)$$

Применяя формулу Тейлора, получаем для $x \in [0, 1]$ равенство при $\varepsilon \downarrow 0$:

$$(1 - x\varepsilon)^{2/p} - (1 - x) - x(1 - \varepsilon)^{2/p} = \frac{p-2}{p^2} x(1-x)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.19)$$

Из формул (3.18), (3.19) и определения бета-функции [40] вытекает, что при $\varepsilon \downarrow 0$

$$K_1(\varepsilon) = \frac{p}{\varepsilon\sqrt{p-2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} (1 + o(1)) = \frac{\pi p}{\varepsilon\sqrt{p-2}} (1 + o(1)). \quad (3.20)$$

Используя формулы (3.15), (3.17) и (3.20), получаем соотношение (3.12). Лемма доказана.

4. МАСШТАБНОЕ СВОЙСТВО ПРОЦЕССА БОГОЛЮБОВА И ВЫБОР ГИЛЬБЕРТОВА ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА

Доказательства первых трех утверждений в теоремах 1 и 2 при $p < p_0$ изложены в статье [30] и остаются без изменений. В настоящей статье мы дадим доказательства четвертых пунктов этих теорем, а также доказательства теорем 3–6. При этом некоторые пояснения и формулировки будут приведены для общего случая $p > 0$, в частности решения экстремальных задач из условий **D2**, **C2** мы изложим для $p > 0$.

Как уже было сказано, случай $p > p_0$ оказался наиболее сложным для исследования рассматриваемых асимптотик. Учитывая это, ради упрощения вычислений и записи доказательств мы используем так называемое масштабное свойство процесса Боголюбова, которое интересно и важно само по себе.

Назовем процесс $\xi(t)$, $t \in [0, \beta]$, рассмотренный в разделе 1 (см. (1.1)), процессом Боголюбова с параметрами (m, β, ω) . Определим гауссовский процесс

$$\eta(t) := \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\beta}} \xi(\beta t), \quad t \in [0, 1]. \quad (4.1)$$

Сформулируем масштабное свойство процесса Боголюбова.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Гауссовский процесс (4.1) представляет собой процесс Боголюбова с параметрами $(1, 1, \omega_1)$, где*

$$\omega_1 := \beta\omega > 0. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулы (1.1) и (4.1), заключаем, что гауссовский процесс $\eta(t)$, $t \in [0, 1]$, имеет нулевое среднее значение и ковариационную функцию

$$\mathbf{E} \eta(t) \eta(s) = \frac{m}{\beta} \mathbf{E} \xi(\beta t) \xi(\beta s) = \frac{1}{2\beta\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}} \operatorname{ch} \left(\beta\omega |t - s| - \frac{\beta\omega}{2} \right), \quad t, s \in [0, 1]. \quad (4.3)$$

Искомое утверждение очевидно, вытекает из формул (4.2), (4.3).

Как будет показано ниже, в силу предложения 3 теоремы типа 1–6 достаточно доказать для процесса Боголюбова $\eta(t)$. Изложим сначала доказательство теоремы 2, основанное на теоремах 8, 9.

ЛЕММА 6. *Для любых $p > 0$, $u > 0$ выполнено равенство*

$$\mathbf{P} \left\{ \int_0^\beta |\xi(t)|^p dt > u^p \right\} = \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 |\eta(s)|^p ds > v^p \right\}, \quad v = \frac{u\sqrt{m}}{\beta^{(2+p)/2p}}. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделав в первом интеграле в (4.4) замену переменной $t = \beta s$ и используя формулу (4.1), получаем равенство (4.4).

Таким образом, нам достаточно доказать вариант теоремы 2 для процесса Боголюбова (4.1) с параметрами $(1, 1, \omega_1)$ и параметром $v \rightarrow \infty$.

Возьмем в качестве гильбертова пространства H обычное гильбертово пространство $L^2 \equiv L^2[0, 1]$ интегрируемых в квадрате на $[0, 1]$ действительных измеримых

функций со скалярным произведением и нормой, заданными следующим образом: $\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t) dt$ и $\|x\| = (\int_0^1 x^2(t) dt)^{1/2}$ для $x, y \in L^2[0, 1]$.

Обозначим через μ_η распределение процесса $\eta(t)$ в пространстве $C^0[0, 1]$. Мы будем рассматривать гауссовскую меру μ_η , заданную в пространстве $L^2[0, 1]$, имея в виду, что эта мера сосредоточена на $C^0[0, 1]$. Как известно, в этом случае мера μ_η имеет нулевое среднее значение и ковариационный оператор $A_\eta: L^2 \rightarrow L^2$ интегрального типа (см., например, [28], [30]): для $x \in L^2$

$$A_\eta x(t) = \int_0^1 [\mathbf{E} \eta(t)\eta(s)] x(s) ds = \frac{1}{2\omega_1 \operatorname{sh} \frac{\omega_1}{2}} \int_0^1 \operatorname{ch} \left(\omega_1 |t-s| - \frac{\omega_1}{2} \right) x(s) ds. \quad (4.5)$$

Пусть $C^2[0, 1]$ – множество дважды дифференцируемых на $[0, 1]$ функций $x(t)$.

ЛЕММА 7. Область значений ковариационного оператора A_η , определенного в формуле (4.5), имеет вид

$$\operatorname{Ran}(A_\eta) = \{x \in C^2[0, 1]: x(0) = x(1), x'(0) = x'(1)\}. \quad (4.6)$$

Обратный оператор задается формулой

$$[A_\eta^{-1}y](t) = -y''(t) + \omega_1^2 y(t), \quad y \in \operatorname{Ran}(A_\eta), \quad t \in [0, 1]. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения леммы получаются в результате двукратного дифференцирования по t равенства $y(t) = A_\eta x(t)$.

ЛЕММА 8. Собственные числа $\{\nu_n\}_{n=-\infty}^\infty$ ковариационного оператора A_η имеют следующий вид:

$$\nu_n = \frac{1}{\omega_1^2 + (2\pi n)^2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.8)$$

им соответствуют ортонормированные в пространстве $L^2[0, 1]$ собственные функции

$$\varphi_0(t) = 1; \quad \varphi_n(t) = \sqrt{2} \begin{cases} \cos(2\pi n t), & \text{если } n > 0, \\ \sin(2\pi n t), & \text{если } n < 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу на собственные числа для ядерного оператора A_η :

$$A_\eta \varphi = \nu \varphi, \quad \varphi \in L^2. \quad (4.10)$$

Поскольку оператор A_η является инъективным и положительным, в уравнении (4.10) параметр $\nu > 0$. Согласно соотношениям (4.6), (4.7) уравнение (4.10) равносильно следующей граничной задаче на собственные числа:

$$\begin{aligned} \varphi''(t) + \left(\frac{1}{\nu} - \omega_1^2 \right) \varphi(t) &= 0, \quad t \in [0, 1], \\ \varphi(0) &= \varphi(1), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Используя № 2.9 из справочника [54], заключаем, что решениями данной задачи являются собственные числа (4.8) и собственные функции (4.9). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Согласно известной осцилляционной теореме для широкого круга задач на собственные числа с периодическими краевыми условиями [55] основная собственная функция $\varphi_0(t)$ не имеет нулей на отрезке $[0, 1]$, а число нулей двух собственных функций $\varphi_n(t)$, $n = \pm k$, $k > 0$, на полуоткрытом интервале $(0, 1]$ равно $2k$. В случае задачи (4.11) этот факт можно установить и непосредственно, учитывая формулу (4.9). Иначе говоря, для широкого круга задач на собственные числа для дифференциального уравнения второго порядка с периодическими краевыми условиями справедлив следующий вывод: *меньшему из двух различных собственных чисел соответствует собственная функция, имеющая меньшее число нулей.*

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО П.3 И П.4 ТЕОРЕМЫ 2

Мы докажем третье и четвертое утверждения теоремы 2, применяя теоремы 8 и 9, где мы будем полагать $E = H = L^2[0, 1]$, $P_A = \mu_\eta$, $A = A_\eta$. Некоторые утверждения, приведенные ниже, мы формулируем в достаточно общем виде, рассматривая случай $p > 0$ и имея целью обоснование соотношения (1.27) из замечания 1.

5.1. Выбор основного функционала. Учитывая лемму 6, возьмем в качестве функционала Q , участвующего в формулировке теоремы 8, следующий функционал:

$$G(x) := \int_0^1 |x(t)|^p dt - 1, \quad x \in L^2, \quad p > 0. \quad (5.1)$$

Обозначим через $\mathcal{X}$ множество функций из $C^0[0, 1]$, имеющих конечное число нулей. Очевидно, множество $\mathcal{X}$ всюду плотно в $C^0[0, 1]$, а следовательно, и в L^2 . Отметим, что $0 \notin \mathcal{X}$ (здесь функция, тождественно равная нулю на $[0, 1]$, также обозначена через 0).

Ниже мы используем определение производной Фреше, данное в работе [56], где допускается, чтобы рассматриваемый оператор был определен всего лишь на всюду плотном подмножестве банахова пространства; значения, равные $\pm\infty$, возможны (см. определение 1 в [57]).

ЛЕММА 9. *Имеют место следующие утверждения.*

1. При $p > 0$ функционал G трижды дифференцируем по Фреше в каждой точке $x \in \mathcal{X}$, и его производные равны

$$G'(x) = p|x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t), \quad (5.2)$$

$$G''(x) = p(p-1)|x(t)|^{p-2}, \quad (5.3)$$

$$G'''(x)[h, g, v] = \int_0^1 p(p-1)(p-2)|x(t)|^{p-3} \operatorname{sign} x(t)h(t)g(t)v(t) dt, \quad h, g, v \in L^2.$$

2. Функционал G является выпуклым функционалом при $p \geq 1$.

3. При $p \geq 2$ производные (5.2), (5.3) задают ограниченные линейные операторы при $x \in C^0[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО первых двух утверждений леммы простое, его можно найти в [30]. Третье утверждение непосредственно вытекает из вида формул (5.2), (5.3).

5.2. Решение экстремальной задачи. Положим

$$D_0 = \{x \in L^2 : G(x) > 0\}, \quad D = \{x \in L^2 : G(x) \geq 0\}. \quad (5.4)$$

В силу утверждения 2 леммы 9 множество $L^2 \setminus D$ является выпуклым при $p \geq 1$. Очевидно, что множество D имеет непустую внутренность и не содержит ноль. Таким образом, множество D удовлетворяет условию **C1** при $p \geq 1$, и к нему применимо замечание 6.

Решим экстремальную задачу из условия **C2** для множества D , определенного в (5.4), и ковариационного оператора A_η , заданного в (4.5). Определим постоянную функцию

$$e_0(t) \equiv 1, \quad t \in [0, 1]. \quad (5.5)$$

Для фиксированного $p > p_0$ введем функцию от s , $h_0 \leq s \leq b_0$,

$$\theta(s) \equiv \theta(s, p, \omega_1) := \frac{1}{\omega_1} \int_{\delta_0}^{s/b_0} \frac{dz}{\sqrt{(1 - \delta_0^2)(1 - \delta_0^p)^{-1}(1 - z^p) - (1 - z^2)}}, \quad (5.6)$$

где положительные постоянные h_0 , b_0 , δ_0 , λ_0 заданы посредством формул (1.7), (1.8), (1.10), ω_1 определено в (4.2). Легко убедиться, что функция $\theta(s)$ монотонно возрастает при $s \in [h_0, b_0]$, $\theta(h_0) = 0$, $\theta(b_0) = J(\delta_0)/\omega_1 = 1/2$, поэтому однозначно определена обратная функция θ^{-1} ; положим

$$x_0(t) := \theta^{-1}(t), \quad t \in [0, 1/2]. \quad (5.7)$$

Распространим функцию $x_0(t)$ на весь отрезок $[0, 1]$ симметричным образом, а именно положим

$$x_0(t) = x_0(1 - t), \quad t \in [1/2, 1]. \quad (5.8)$$

Очевидно, функция $x_0(t)$ является строго положительной, она монотонно возрастает при $t \in [0, 1/2]$, причем $x_0(0) = h_0$ и $x_0(1/2) = b_0$. Таким образом, для всех значений $t \in [0, 1]$ выполнены неравенства $0 < h_0 \leq x_0(t) \leq b_0$. Ниже будет показано, что функция $x_0(t)$ дважды дифференцируема на отрезке $[0, 1]$ и при этом

$$x'_0(0) = x'_0(1/2) = x'_0(1) = 0. \quad (5.9)$$

Нелинейная граничная задача второго порядка, которой удовлетворяет функция $x_0(t)$, записана ниже, в формуле (5.23), где нужно положить $\lambda = \lambda_0$. Также ниже при доказательстве леммы 10 будет показано, что $\|x_0\|_p = 1$. Принимая во внимание (5.8) и равенство $x_0(0) = h_0$, получаем формулу

$$x_0(0) = x_0(1) = h_0. \quad (5.10)$$

Таким образом, с учетом формул (4.6), (5.9) и (5.10) заключаем, что функция $x_0(t)$ удовлетворяет на $[0, 1]$ периодическим граничным условиям и $x_0(t) \in \text{Ran}(A_\eta)$.

Продолжим периодически функцию $x_0(t)$ на всю ось $\mathbb{R}$ и полученную периодическую функцию с периодом 1 обозначим через $\hat{x}_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Отметим следующее важное осцилляционное свойство функции $x_0(t)$. Функция $x_0(t)$ пересекает функцию $e_0(t) \equiv 1$ на полуоткрытом интервале $(0, 1]$ ровно два

раза – это минимально возможное число пересечений с функцией $e_0(t)$ для симметричной относительно точки $t = 1/2$ положительной функции $x(t)$ при условии $\|x\|_p = 1$. Заметим, что все функции из определенных ниже в (5.12) множеств $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ пересекают функцию $e_0(t)$ на интервале $(0, 1]$ ровно два раза (здесь и ниже мы говорим, что функции $f(t)$ и $g(t)$ пересекаются в точке $s \in (0, 1]$, если выполнено равенство $f(s) = g(s)$).

Для фиксированного $p > p_0$ введем также функцию

$$x_1(t) := h_0 + b_0 - x_0(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (5.11)$$

Очевидно, что функция $x_1(t)$ является строго положительной симметричной относительно точки $t = 1/2$ функцией. Используя формулы (5.9)–(5.11), убеждаемся, что справедливы равенства $x_1(0) = x_1(1) = b_0$ и $x'_1(0) = x'_1(1/2) = x'_1(1) = 0$. Таким образом, функция $x_1(t)$ также удовлетворяет на отрезке $[0, 1]$ периодическим граничным условиям, и $x_1(t) \in \text{Ran}(A_\eta)$. Несложно показать, что $\|x_1\|_p = 1$.

Продолжим периодически функцию $x_1(t)$ на всю ось $\mathbb{R}$, полученную периодическую функцию с периодом 1 обозначим через $\hat{x}_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Для числа $0 \leq \kappa \leq 1$ определим функции

$$x_{0,\kappa}(t) := \hat{x}_0(t + \kappa), \quad x_{1,\kappa}(t) := \hat{x}_1(t + \kappa), \quad t \in [0, 1].$$

Очевидно, $x_{0,0}(t) \equiv x_{0,1}(t) \equiv x_0(t)$, $x_{1,0}(t) \equiv x_{1,1}(t) \equiv x_1(t)$. Кроме того, в силу определения и периодичности функций при всех $0 \leq \kappa \leq 1$ имеют место соотношения

$$x_{0,\kappa}(t) \in \text{Ran}(A_\eta), \quad \|x_{0,\kappa}\|_p = 1, \quad x_{1,\kappa}(t) \in \text{Ran}(A_\eta), \quad \|x_{1,\kappa}\|_p = 1.$$

Введем два множества функций, заданных на $[0, 1]$:

$$\mathcal{M}_0 := \{x_{0,\kappa}(t) : 0 \leq \kappa \leq 1\}, \quad \mathcal{M}_1 := \{x_{1,\kappa}(t) : 0 \leq \kappa \leq 1\}. \quad (5.12)$$

Отметим, что здесь элементы $x_{0,0}$ и $x_{0,1}$ отождествлены, так же отождествлены элементы $x_{1,0}$ и $x_{1,1}$, следовательно, множества $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M}_1$ являются замкнутыми компактными кривыми, которые лежат в множестве $\text{Ran}(A_\eta)$. Зададим два множества, центрально-симметричные множествам $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M}_1$:

$$\mathcal{M}_2 := -\mathcal{M}_0 = \{-x(t) : x(t) \in \mathcal{M}_0\}, \quad \mathcal{M}_3 := -\mathcal{M}_1 = \{-x(t) : x(t) \in \mathcal{M}_1\}. \quad (5.13)$$

ЛЕММА 10. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть фиксировано число $0 < p \leq p_0$. Тогда минимум в экстремальной задаче

$$\langle x, A_\eta^{-1}x \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in D \cap \text{Dom}(A_\eta^{-1}), \quad (5.14)$$

равен ω_1^2 и достигается на двух функциях $\pm e_0(t)$, лежащих на границе ∂D . Минимум

$$\inf_{x \in D \cap H_{A_\eta}} \|x\|_{A_\eta}^2 \quad (5.15)$$

также достигается только в двух точках $\pm e_0$.

2. Пусть фиксировано число $p_0 < p < \infty$. Тогда минимум в экстремальной задаче (5.14) равен $\lambda_0 p$ и достигается на одномерном компактном четырехсвязном многообразии

$$\mathcal{M} := \bigcup_{j=0}^3 \mathcal{M}_j \subset \text{Ran}(A_\eta), \quad (5.16)$$

при этом компоненты $\mathcal{M}_j$, $j = 0, 1, 2, 3$, попарно не пересекаются и лежат на границе ∂D . Минимум (5.15) также достигается только на множестве $\mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что минимум в задаче (5.14) достигим. В силу леммы 8 максимальное собственное число оператора A_η равно $\nu_0 = 1/\omega_1^2$. Следовательно, минимальное собственное число оператора A_η^{-1} равно ω_1^2 . Таким образом, согласно известному вариационному свойству собственных чисел компактного симметричного оператора [58], [59] справедлива оценка $\langle x, A_\eta^{-1}x \rangle \geq \omega_1^2 \|x\|^2$ для $x \in L^2$. Из этой оценки и первой теоремы Вейерштрасса [56] следует достижимость минимума в задаче (5.14).

Решим экстремальную задачу (5.14) методом множителей Лагранжа [57]. Функция Лагранжа задается формулой $\mathcal{L}(x) = \lambda_1 \langle x, A_\eta^{-1}x \rangle - \lambda_2 G(x)$ для $x \in \text{Ran}(A_\eta)$, где множители Лагранжа удовлетворяют неравенствам $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$. Используя формулы для первых двух производных квадратичного функционала [57] и равенства (5.2), (5.3), продифференцируем дважды функцию Лагранжа. Согласно принципу Лагранжа и условию второго порядка [57] заключаем, что для того чтобы точка $x \in \mathcal{X} \cap \text{Ran}(A_\eta)$ доставляла минимум в задаче (5.14), необходимо выполнение условия стационарности

$$\mathcal{L}'(x) \equiv 2\lambda_1 A_\eta^{-1}x - \lambda_2 G'(x) = 0, \quad (5.17)$$

а также условия второго порядка

$$\langle z, \mathcal{L}''(x)z \rangle \equiv \langle z, [2\lambda_1 A_\eta^{-1} - \lambda_2 G''(x)]z \rangle \geq 0 \quad (5.18)$$

для всех z таких, что $\langle z, G'(x) \rangle = 0$, и условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_2 \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt - 1 \right) = 0. \quad (5.19)$$

Легко проверить, что в нашей задаче $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, положим $\lambda = \lambda_2/2\lambda_1 > 0$. Учитывая формулы (5.3), (5.17)–(5.19), убеждаемся, что точка x , доставляющая минимум в задаче (5.14), является граничной точкой, и для нее выполнены соотношения $x = \lambda A_\eta G'(x)$ (ср. с равенствами (2.2)) и

$$\langle z, [A_\eta^{-1} - \lambda p(p-1)|x(t)|^{p-2}]z \rangle \geq 0, \quad \text{если} \quad \langle z, G'(x) \rangle = 0. \quad (5.20)$$

Мы будем искать положительные решения, т.е. будем полагать, что $x(t) > 0$ при $t \in [0, 1]$; можно показать, что знакопеременные функции не доставляют минимума в экстремальной задаче (5.14).

Таким образом, уравнение для положительной экстремальной функции $x(t)$ согласно соотношениям (4.5) и (5.2) является нелинейным интегральным уравнением

Хаммерштейна и имеет вид

$$x(t) = \frac{\lambda p}{2\omega_1 \operatorname{sh} \frac{\omega_1}{2}} \int_0^1 \operatorname{ch} \left(\omega_1 |t-s| - \frac{\omega_1}{2} \right) x^{p-1}(s) ds, \quad t \in [0, 1], \quad (5.21)$$

где $\lambda > 0$ – множитель Лагранжа, при этом выполнены условие второго порядка (5.20) и условие связи

$$\int_0^1 x^p(t) dt = 1. \quad (5.22)$$

Поскольку $x \in \operatorname{Ran}(A_\eta)$, заключаем, учитывая (4.6), (4.7), что экстремальная функция дважды дифференцируема на отрезке $[0, 1]$. Используя формулу для обратного оператора (4.7), убеждаемся, что интегральное уравнение (5.21) эквивалентно следующей нелинейной краевой задаче:

$$\begin{aligned} x''(t) &= \omega_1^2 x(t) - \lambda p x^{p-1}(t), & t \in [0, 1], \\ x(0) &= x(1), & x'(0) = x'(1). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Кроме того, учитывая вывод, сделанный в замечании 8, мы будем искать положительные решения задачи (5.22), (5.23), имеющие минимально возможное число пересечений с функцией $e_0(t) \equiv 1$ на интервале $(0, 1]$. Как было указано выше, для симметричной положительной функции это минимальное число равно двум. Можно показать, что возможные положительные решения задачи (5.22), (5.23), пересекающие функцию $e_0(t)$ на интервале $(0, 1]$ более двух раз, не доставляют минимум в задаче (5.14).

Записывая уравнение задачи (5.23) в виде $d(x'(t))^2 = \omega_1^2 dx^2(t) - 2\lambda dx^p(t)$, приходим к следующему факту: если функция $x(t) > 0$ удовлетворяет краевой задаче (5.23), то эта функция удовлетворяет также следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} (x'(t))^2 &= \omega_1^2 x^2(t) - 2\lambda x^p(t) + C, & t \in [0, 1], \\ x(0) &= x(1), & x'(0) = x'(1), \end{aligned} \quad (5.24)$$

при некоторой константе C . Детальный анализ задачи (5.24) с учетом соотношений (5.20), (5.22) показывает, что имеются две возможности: $0 < p < p_0$ и $p > p_0$.

Легко видеть, что для любого $p > 0$ задача (5.22), (5.24) имеет положительное постоянное решение – функцию $e_0(t) \equiv 1$, заданную в (5.5). Подставляя $e_0(t)$ в (5.23), (5.24), получаем следующие значения $\tilde{\lambda}_0$, $\tilde{C}$ постоянных λ , C в задаче (5.24):

$$\tilde{\lambda}_0 = \frac{\omega_1^2}{p}, \quad \tilde{C} = \frac{2-p}{p} \omega_1^2. \quad (5.25)$$

Условие второго порядка (5.20) показывает, что функция $e_0(t)$ является точкой локального минимума задачи (5.14) только при $0 < p \leq p_0$.

В самом деле, согласно лемме 8, принимая во внимание вторую собственную функцию и второе собственное число и учитывая (5.25), получаем равенство

$$\langle \varphi_1, [A_\eta^{-1} - \tilde{\lambda}_0 p(p-1)e_0^{p-2}] \varphi_1 \rangle = (2-p)\omega_1^2 + 4\pi^2,$$

выражение в правой части неотрицательно тогда и только тогда, когда $0 < p \leq p_0$. Отметим, что в силу леммы 8 имеет место равенство $\langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle = \langle \varphi_1, e_0 \rangle = 0$ и, кроме

того, $G'(e_0) = pe_0$. Учитывая вышеизложенное, заключаем, что условие второго порядка (5.20) для функции e_0 не выполнено при $p > p_0$, и для этих значений p точка e_0 не является точкой локального минимума задачи (5.14). Можно показать, что при $0 < p \leq p_0$ функции $\pm e_0$ являются точками глобального минимума задачи (5.14). Используя формулы (4.7), (5.5), найдем минимальное значение:

$$\langle e_0, A_\eta^{-1} e_0 \rangle = \omega_1^2 \int_0^1 e_0^2(t) dt = \omega_1^2.$$

Взяв гильбертово пространство $(H_{A_\eta}, \|\cdot\|_{A_\eta})$, ассоциированное с ковариационным оператором A_η , можно доказать, что минимум (5.15) также достигается только в двух точках $\pm e_0$. Первое утверждение леммы доказано.

Рассмотрим теперь вторую возможность. Покажем, что для $p > p_0$ задача (5.22), (5.24) имеет среди прочих два множества положительных решений – множество $\{e_0\}$, состоящее из единственной функции $e_0(t)$, и множество $\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_1$; при этом минимум в задаче (5.14) доставляют точки из $\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_1$. Множества $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ целиком определяются только одной функцией $x_0(t)$, поэтому покажем сначала, что задача (5.22), (5.24) имеет положительное решение $x_0(t)$.

Учитывая (5.23), несложно убедиться, что при $p > 2$ допустимо обращение в ноль второй производной экстремали $x(t)$ во внутренней точке отрезка $[0, 1]$. Принимая во внимание этот факт, а также отсутствие первой производной $x'(t)$ в уравнении (5.23), заключаем, что задача (5.22), (5.24) имеет симметричные решения, т. е. $x(t) = x(1-t)$ при $t \in [0, 1]$. Всюду ниже мы полагаем, что $p > p_0$.

Итак, будем искать симметричные положительные решения задачи (5.22), (5.23), пересекающие функцию $e_0(t)$ на интервале $(0, 1]$ ровно два раза, имея целью доказать, что среди таких решений присутствует функция $x_0(t)$.

Вследствие граничных условий в (5.23) заключаем, что симметричные экстремали удовлетворяют условиям $x'(0) = x'(1/2) = x'(1) = 0$. Пусть для определенности $x(0) = x(1) = h > 0$.

Учитывая вышеизложенное, приходим к выводу, что симметричные экстремали удовлетворяют нелинейной граничной задаче первого порядка

$$\begin{aligned} (x'(t))^2 &= \omega_1^2 x^2(t) - 2\lambda x^p(t) + C, & t \in [0, 1/2], \\ x(0) &= h, & x'(0) = x'(1/2) = 0, \end{aligned} \quad (5.26)$$

где $h > 0$ и C – некоторые постоянные, уравнения для которых будут записаны ниже. Ниже также показано, что $C < 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда симметричная экстремаль возрастает в окрестности точки $t = 0$. Исследуя задачу (5.26) в этом случае и учитывая, что мы ищем экстремаль, пересекающую функцию $e_0(t)$ на интервале $(0, 1]$ ровно два раза, несложно убедиться, что искомая симметричная экстремаль монотонно возрастает на всем отрезке $[0, 1/2]$ от значения $h = x(0)$ до значения $b := x(1/2)$, при этом экстремаль является сначала выпуклой вниз, затем – выпуклой вверх и удовлетворяет нелинейной граничной задаче

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sqrt{\omega_1^2 x^2(t) - 2\lambda x^p(t) + C}, & t \in [0, 1/2], \\ x(0) &= h, & x'(0) = x'(1/2) = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Подставляя в (5.26) значения $t = 0$ и $t = 1/2$, получаем два уравнения для параметров $0 < h < b$, $\lambda > 0$ и C :

$$\omega_1^2 h^2 - 2\lambda h^p + C = 0, \quad (5.28)$$

$$\omega_1^2 b^2 - 2\lambda b^p + C = 0. \quad (5.29)$$

Ниже в лемме 11 доказано, что уравнение

$$\omega_1^2 x^2 - 2\lambda x^p + C = 0, \quad x > 0, \quad (5.30)$$

имеет при $p > p_0$ ровно одну пару решений, удовлетворяющих условию $x < b$, если $c_0 < C < 0$, где число $c_0 < 0$ указано в лемме 11. Далее, интегрируя уравнение (5.27), заключаем, что искомая экстремаль $\tilde{x}_0(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\omega_1^2 x^2 - 2\lambda x^p + C}} = t, \quad t \in [0, 1/2]. \quad (5.31)$$

Отсюда следует, что, как и указано выше, $h > 0$. В самом деле, если $h = 0$, то в силу (5.28) получаем $C = 0$, и интеграл в левой части соотношения (5.31) расходится в нуле, что противоречит конечности правой части уравнения (5.31).

Покажем, что при определенном выборе параметров h , b , λ и C функция $\tilde{x}_0(t)$ совпадает с функцией $x_0(t)$, введенной в (5.7), (5.8).

Определим монотонно возрастающую функцию

$$\tilde{\theta}(s) := \int_0^s \frac{dx}{\sqrt{\omega_1^2 x^2 - 2\lambda x^p + C}}, \quad 0 \leq s \leq b. \quad (5.32)$$

Тогда, как легко видеть,

$$\tilde{x}_0(t) = \tilde{\theta}^{-1}(t), \quad t \in [0, 1/2]. \quad (5.33)$$

Теперь выпишем уравнения для параметров h , b , λ . Из уравнений (5.28), (5.29) получаем

$$\omega_1^2 h^2 - 2\lambda h^p = \omega_1^2 b^2 - 2\lambda b^p. \quad (5.34)$$

Положив в (5.31) $t = 1/2$, находим

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{\omega_1^2 x^2 - 2\lambda x^p + C}} = \frac{1}{2}. \quad (5.35)$$

Используя условие нормировки (5.22), симметричность функции $\tilde{x}_0(t)$ и формулу (5.33), получаем

$$1 = 2 \int_0^{1/2} \tilde{x}^p(t) dt = 2 \int_0^{1/2} [\tilde{\theta}^{-1}(t)]^p dt = 2 \int_0^b \frac{s^p ds}{\sqrt{\omega_1^2 s^2 - 2\lambda s^p + C}}; \quad (5.36)$$

здесь во втором интеграле была проведена замена переменной $t = \tilde{\theta}(s)$. Покажем, что имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Уравнения (5.34)–(5.36) относительно параметров h , b , λ имеют единственное решение – тройку h_0 , b_0 , λ_0 , определенную в (1.8), (1.10)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая формулу (5.34) и вводя параметр $\delta := h/b \in (0, 1)$, мы можем записать интеграл в левой части (5.35) в виде

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{\omega_1^2 x^2 - 2\lambda x^p + C}} = \frac{1}{\omega_1} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(2\lambda/\omega_1^2)b^{p-2}(1-x^p) - (1-x^2)}} = \frac{1}{\omega_1} J(\delta); \quad (5.37)$$

здесь во втором интеграле была проведена замена переменной $t = x/b$ и использована формула (1.3). Аналогично, последний интеграл в (5.36) можно записать как

$$\int_0^b \frac{s^p ds}{\sqrt{\omega_1^2 s^2 - 2\lambda s^p + C}} = \frac{b^p}{\omega_1} M(\delta), \quad (5.38)$$

где $M(\delta)$ определено в (1.4). Из формул (5.34)–(5.38) получаем следующую систему из трех уравнений для трех параметров δ , b , λ :

$$J(\delta) = \frac{\omega_1}{2}, \quad M(\delta) = \frac{\omega_1}{2b^p}, \quad \lambda = \omega_1^2 \frac{1 - \delta^2}{(1 - \delta^p)b^{p-2}}. \quad (5.39)$$

Согласно лемме 1 первое уравнение в (5.39) имеет единственный корень $\delta_0 \in (0, 1)$. Зная δ_0 , из второго уравнения в (5.39) находим единственное решение b_0 , заданное в (1.8). Из третьего уравнения в (5.39) находим единственное решение λ_0 , заданное в формуле (1.10). Далее, согласно определениям получаем $h_0 = b_0\delta_0$ и $C_0 = 2\lambda_0 b_0^p - \omega_1^2 b_0^2$. Утверждение доказано.

Используя формулы (5.6) и (5.32), убеждаемся, что при $C = C_0$, $h = h_0$, $b = b_0$, $\lambda = \lambda_0$ функции $\tilde{\theta}(s)$ и $\theta(s)$ тождественно равны; следовательно, при указанных значениях параметров, тождественно равны и функции $\tilde{x}_0(t)$ и $x_0(t)$.

Учитывая вышеизложенное, мы заключаем, что если симметричная экстремаль возрастает в окрестности точки $t = 0$, то задача (5.22), (5.24) имеет положительное симметричное решение $x_0(t)$.

Рассмотрим теперь случай, когда симметричная экстремаль убывает в окрестности точки $t = 0$.

Рассуждения, аналогичные проведенным в предыдущем случае, доказывают, что теперь задача (5.22), (5.24) имеет в качестве положительного симметричного решения (пересекающего функцию $e_0(t)$ на интервале $(0, 1]$ ровно два раза) функцию $x_1(t)$, заданную в (5.11). В частности, функция $x_1(t)$ монотонно убывает на всем отрезке $[0, 1/2]$ от значения $x_1(0) = b_0$ до значения $x_1(1/2) = h_0$, при этом она является сначала выпуклой вверх, затем – выпуклой вниз и удовлетворяет следующей нелинейной граничной задаче:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\sqrt{\omega_1^2 x^2(t) - 2\lambda_0 x^p(t) + C_0}, & t \in [0, 1/2], \\ x(0) &= b_0, & x'(0) = x'(1/2) = 0, \end{aligned}$$

где h_0 , b_0 , λ_0 , C_0 те же, что и выше.

Вывод. Учитывая доказанные утверждения о функциях $x_0(t)$, $x_1(t)$ и используя определения (5.12), (5.13) и свойства периодичности, несложно убедиться, что при $p > p_0$ задача (5.22), (5.24) имеет наряду с функцией e_0 множество положительных решений $\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_1$ и множество отрицательных решений $-e_0$, $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$. Как уже было сказано, при $p > p_0$ точка e_0 не является точкой локального минимума.

Можно показать, что при $p > p_0$ задача (5.22), (5.24), кроме функций из множества $\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_1$, не имеет иных положительных решений, пересекающих функцию $e_0(t)$ на интервале $(0, 1]$ ровно два раза.

Используя формулы (4.7), (5.22), (5.23), получаем что для любого $z \in \mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_1$

$$\langle z, A_\eta^{-1} z \rangle = \langle x_0, A_\eta^{-1} x_0 \rangle = p\lambda_0. \quad (5.40)$$

Из последнего утверждения, формулы (5.40) и того факта, что минимум в экстремальной задаче (5.14) доставляют только знакопостоянные функции, вытекает, что при $p > p_0$ минимум в задаче (5.14) равен $\lambda_0 p$ и достигается на одномерном компактном многообразии $\mathcal{M}$ из (5.16).

Можно также показать, используя хорошие свойства дифференцируемости границы ∂D , что при $p > p_0$ минимум (5.15) также достигается только на множестве $\mathcal{M}$. Кроме того, легко видеть, что компоненты $\mathcal{M}_j$, $j = 0, 1, 2, 3$, взаимно не пересекаются и лежат на границе ∂D . Таким образом, для завершения доказательства второго утверждения леммы 10 нам осталось доказать леммы 1 и 11. Это сделано ниже.

Для $x > 0$ введем функцию $q(x) := 2\lambda x^p - \omega_1^2 x^2$. Производная функции $q(x)$ имеет вид $q'(x) = 2x(\lambda p x^{p-2} - \omega_1^2)$, $x > 0$. Используя две последние формулы, заключаем, что $q(0) = 0$, $q(+\infty) = +\infty$, функция $q(x)$ имеет при $x > 0$ один глобальный минимум в точке $x_{\min} = (\omega_1^2 / \lambda p)^{1/(p-2)}$, монотонно убывает на интервале $(0, x_{\min})$ и монотонно возрастает на интервале $(x_{\min}, \infty)$.

ЛЕММА 11. Для фиксированных $\omega_1 > 0$, $\lambda > 0$, $C \in \mathbb{R}$ уравнение

$$\omega_1^2 x^2 - 2\lambda x^p + C = 0, \quad x > 0, \quad (5.41)$$

имеет при $p > p_0$ ровно одну пару решений, удовлетворяющих условию $0 < x < b$, если $c_0 := q(x_{\min}) < C < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем уравнение (5.41) в виде

$$q(x) = C, \quad x > 0, \quad (5.42)$$

и решим его, применяя графический метод. Нарисуем в обычной декартовой системе координат Oxy графики двух функций $y = q(x)$ и $y = C$. Из чертежа и свойств функции $q(x)$ следует, что уравнение (5.42) имеет ровно два решения $0 < x_1 = h < x_2 = b$, если $q(x_{\min}) < C < 0$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Записывая формулу (1.6) при $p = p_0$, получаем равенство

$$J_{p_0}(1) = \frac{\pi}{\sqrt{p_0 - 2}} = \frac{\omega_1}{2}. \quad (5.43)$$

Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 11, и используя (5.43), заключаем, что уравнение

$$J_{p_0}(\delta) = \frac{\omega_1}{2}, \quad 0 < \delta \leq 1,$$

имеет ровно один корень $\delta_0(p_0, \omega_1) = 1$; здесь $x_1 = h = x_2 = b$. Учитывая этот факт и свойство монотонного убывания по p функции $J_p(\delta)$ из леммы 4, получаем утверждение леммы 1. Доказательство леммы 10 завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Отметим, что в утверждениях леммы 10 имеет место свойство непрерывности по параметру p при $p \downarrow p_0$, в том числе непрерывность для минимальных значений. Так, можно доказать, что

$$\lim_{p \downarrow p_0} p\lambda_0(p, \omega_1) = \omega_1^2. \quad (5.44)$$

Свойство непрерывности по параметру p при $p \uparrow \infty$ рассмотрено ниже в п. 5.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. При $p = 2$ первое утверждение леммы 10 согласуется с леммой 8: функция (5.5) при $p = 2$ совпадает с собственной функцией $\varphi_0(t)$ из формулы (4.9), а минимальное значение ω_1^2 совпадает с $1/\nu_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Можно показать, что для достаточно больших $p > p_0$ задача (5.22), (5.24) имеет множество положительных решений, пересекающих функцию $e_0(t)$ на интервале $(0, 1]$ ровно 4, 6 и т. д. раз.

5.3. Сравнение со случаем $p = \infty$. В дополнение к замечанию 9 укажем, что в утверждении леммы 10 имеет место свойство непрерывности по параметру p также при $p \uparrow \infty$, в том числе для минимальных значений. Для описания этого свойства нам понадобятся некоторые определения и утверждения, которые мы приведем ниже.

Согласно формуле (3.8) определена функция

$$J_\infty(\delta) = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \delta^2}}{\delta}. \quad (5.45)$$

В соответствии с уравнением (1.7) обозначим через $\delta_\infty \equiv \delta_\infty(\omega_1)$ единственный корень уравнения

$$J_\infty(\delta) = \frac{\omega_1}{2}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (5.46)$$

Используя (5.45), легко находим, что $\delta_\infty = 1/\operatorname{ch}(\omega_1/2)$, и это согласуется с последней формулой в (1.8).

ЛЕММА 12. Для любого фиксированного $\omega_1 > 0$ функция $\delta_0(p, \omega_1)$ является строго монотонно убывающей функцией переменной $p \in (p_0, \infty)$. Существует предел

$$\delta_0(\infty, \omega_1) := \lim_{p \uparrow \infty} \delta_0(p, \omega_1) = \delta_\infty = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\omega_1}{2}}. \quad (5.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Монотонность функции $\delta_0(p, \omega_1)$ вытекает непосредственно из леммы 6 и определения функции $\delta_0(p, \omega_1)$. Монотонно убывающая и ограниченная последовательность имеет предел, отсюда следует существование предела в (5.47). Второе равенство в (5.47) получаем, используя определение числа δ_∞ посредством формул (5.45), (5.47).

Из этой леммы, очевидно, вытекают следующие неравенства: для любых $p > p_0$ и $\omega_1 > 0$

$$0 < \delta_\infty(\omega_1) < \delta_0(p, \omega_1) < h_0(p, \omega_1) < 1 < b_0(p, \omega_1).$$

Таким образом, доказано второе неравенство в (1.9).

ЛЕММА 13. Для любого фиксированного $\omega_1 > 0$ функция $p\lambda_0(p, \omega_1)$ монотонно убывает по $p \in (p_0, \infty)$ от значения $p_0\lambda_0(p_0, \omega_1) = \omega_1^2$ до значения

$$\lim_{p \uparrow \infty} p\lambda_0(p, \omega_1) = 2\omega_1 \operatorname{th} \frac{\omega_1}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно второму утверждению леммы 10 при $p > p_0$ справедливо равенство

$$\min_{x \in D \cap \operatorname{Dom}(A_\eta^{-1})} \langle x, A_\eta^{-1}x \rangle = p\lambda_0(p, \omega_1). \quad (5.48)$$

Используя неравенство (1.51) при $\beta = 1$ и равенство (5.1), убеждаемся, что выражение в левой части формулы (5.48) является убывающей функцией по $p \in (p_0, \infty)$. Остальные утверждения леммы вытекают из формулы (5.44) и приведенного ниже соотношения (5.49). Лемма доказана.

ЛЕММА 14. Справедливо соотношение

$$\lim_{p \uparrow \infty} p\lambda_0(p, \omega_1) = 2\omega_1 \sqrt{1 - \delta_\infty^2} = 2\omega_1 \operatorname{th} \frac{\omega_1}{2}. \quad (5.49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является довольно длинным и техническим, мы его опускаем.

5.4. Завершение доказательств п. 3 и п. 4 теоремы 2. Дальнейшее доказательство п. 3 теоремы 2 проводится так же, как доказательство п. 3 теоремы 3 из статьи [30], с учетом леммы 6, первого утверждения леммы 10 и условия $2 < p < p_0$.

Докажем п. 4 теоремы 2, используя второе утверждение теоремы 9, где мы положим $E = L^2[0, 1]$, $P_A = \mu_\eta$, $A = A_\eta$. Как уже было сказано, множество D из (5.4) удовлетворяет условию **C1** при $p > p_0$, и поэтому для него выполнено соотношение (2.4). Применяя это соотношение с учетом замечания 6, формулы (5.1) и второго утверждения леммы 10, получаем следующую цепочку равенств при $p > p_0$:

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v^2} \ln \mu_\eta(vD) &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v^2} \ln \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 |\eta(t)|^p dt > v^p \right\} = \\ &= - \inf_{x \in D} I_{A_\eta}(x) = - \frac{1}{2} \inf_{x \in D \cap \operatorname{Ran}(A_\eta)} \langle x, A_\eta^{-1}x \rangle = - \frac{\lambda_0 p}{2}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Полагая $v = u\sqrt{m}/\beta^{(2+p)/2p}$ и используя (4.4), получаем соотношение (1.25). Четвертое утверждение теоремы 2 доказано.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО П. 3 И П. 4 ТЕОРЕМЫ 1

Мы докажем п. 3 и п. 4 теоремы 1, применяя теоремы 7 и 9. Некоторые утверждения ниже мы формулируем в достаточно общем виде, рассматривая случай $p > 0$ и имея целью обоснование соотношения (1.26) из замечания 1.

Используем масштабное свойство процесса Боголюбова из предложения 3 для интегралов из теоремы 1. Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 15. Для любых $p > 0$, $0 < \alpha < 2$, $u > 0$ выполнено равенство

$$\mathbf{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta |\xi(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} = \mathbf{E} \exp \left\{ r \left(\int_0^1 |\eta(s)|^p ds \right)^{\alpha/p} \right\}, \quad r = u \frac{\beta^{\alpha(2+p)/2p}}{m^{\alpha/2}}. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделав в первом интеграле в (6.1) замену переменной $t = \beta s$ и используя формулу (4.1), получаем равенство (6.1).

Таким образом, в силу только что доказанной леммы нам достаточно доказать вариант теоремы 1 для процесса Боголюбова $\eta(t)$ с параметрами $(1, 1, \omega_1)$ и большим параметром $r \rightarrow \infty$.

6.1. Выбор банахова функционального пространства. Зафиксируем числа $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$. Положим

$$\tilde{p} := \begin{cases} p, & \text{если } p > 2, \\ 2, & \text{если } 0 < p \leq 2. \end{cases} \quad (6.2)$$

Учитывая лемму 15, возьмем в качестве банахова пространства E из теорем 7 и 9 банахово пространство $L^{\tilde{p}} \equiv L^{\tilde{p}}[0, 1]$ функций, интегрируемых в $\tilde{p}$ -й степени на отрезке $[0, 1]$. Норма в $L^{\tilde{p}}$ обозначена через $\|\cdot\|_{\tilde{p}}$.

Таким образом, в силу (6.2) мы имеем $\tilde{p} \geq 2$. Пусть $2 \geq \tilde{q} > 1$ обозначает число, сопряженное к $\tilde{p}$, т. е. $1/\tilde{p} + 1/\tilde{q} = 1$. Напомним что, сопряженным банаховым пространством к пространству $L^{\tilde{p}}$ является пространство $L^{\tilde{q}}$.

В настоящем разделе мы будем рассматривать гауссовскую меру Боголюбова μ_η , заданную в пространстве $L^{\tilde{p}}[0, 1]$, имея в виду, что эта мера сосредоточена на $C^0[0, 1]$. Известно, что в этом случае мера μ_η имеет нулевое среднее значение и инъективный ковариационный оператор $A_\eta: L^{\tilde{q}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$ интегрального типа, который определяется по формуле (4.5), где $x \in L^{\tilde{q}}$. Здесь также справедлива лемма 7. Отметим, что теперь оператор A_η зависит от $\tilde{p}$, в частности $\text{Dom}(A_\eta) = L^{\tilde{q}}$, указывать эту зависимость мы не будем.

В настоящем разделе мы будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ каноническую билинейную форму между пространствами $L^{\tilde{p}}$ и $L^{\tilde{q}}$, которая, как известно, имеет интегральный вид:

$$\langle h, g \rangle = \int_0^1 h(t)g(t) dt, \quad h \in L^{\tilde{p}}, g \in L^{\tilde{q}}.$$

6.2. Выбор основного функционала. Мы докажем теорему 1, применяя теоремы 7 и 9, где мы будем полагать $E = L^{\tilde{p}}$, $P_A = \mu_\eta$, $A = A_\eta$ и $f \equiv 1$.

Возьмем в качестве функционала F , участвующего в формулировке теорем 7 и 9, следующий функционал:

$$\Psi(x) := -\|x\|_p^\alpha \equiv -\left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\alpha/p}, \quad x \in L^{\tilde{p}}. \quad (6.3)$$

Наша цель – применить теоремы 7 и 9 к этому функционалу и гауссовской мере Боголюбова μ_η . Положим

$$v = r^{1/(2-\alpha)} = u^{1/(2-\alpha)} \frac{\beta^{\alpha(2+p)/(2p(2-\alpha))}}{m^{\alpha/(2(2-\alpha))}}. \quad (6.4)$$

Тогда $r = v^{2-\alpha}$, кроме того, $v \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Функционал (6.3) обладает свойством однородности порядка α : $\Psi(cx) = c^\alpha \Psi(x)$, $c > 0$. Используя это свойство и

равенство (6.4), запишем среднее значение из правой части формулы (6.1) в виде модельного интеграла Лапласа:

$$\mathbf{E} \exp \left\{ r \left(\int_0^1 |\eta(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} = \mathbf{E} e^{-r\Psi(\eta)} = \int_{L^{\bar{p}}} e^{-v^2\Psi(x)} d\mu_\eta(vx). \quad (6.5)$$

Функционал $-\Psi(x)$ представляет собой степень интегрального функционала. Как известно, интегральные функционалы дифференцируемы по Фреше [42], [56], [57]. Напомним, что множество $\mathcal{X}$ было определено перед леммой 9.

ЛЕММА 16. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Функционал Ψ трижды дифференцируем по Фреше в каждой точке $x \in \mathcal{X}$, при этом первая производная имеет вид

$$\Psi'(x) = -\alpha \left(\int_0^1 |x(s)|^p ds \right)^{(\alpha-p)/p} |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t), \quad (6.6)$$

а вторую производную $\Psi''(x)$ можно рассматривать как линейный оператор $\Psi''(x): L^{\bar{p}} \rightarrow L^{\bar{q}}$, действующий по правилу

$$\begin{aligned} \Psi''(x)g &= \alpha(1-p)\|x\|_p^{\alpha-p}|x(t)|^{p-2}g + \\ &+ \alpha(p-\alpha)\|x\|_p^{\alpha-2p}|x(t)|^{p-1}\operatorname{sign} x(t)\langle g, |x(t)|^{p-1}\operatorname{sign} x(t) \rangle, \quad g \in L^{\bar{p}}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

2. При $p \geq 2$ производные (6.6), (6.7) задают ограниченные линейные операторы при $x \in C^0[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы получаем, применяя теорему о суперпозиции дифференцируемых отображений [57] и известные формулы для первых двух производных функционала $G_0(x) = \int_0^1 |x(t)|^p dt$ (см. лемму 9 и книги [42], [57]).

ЛЕММА 17. *Для функционала Ψ выполнено условие D1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится при помощи неравенства (1.51) с $\beta = 1$.

6.3. Решение экстремальной задачи. Решим экстремальную задачу из условия D2 для функционала (6.3) и ковариационного оператора A_η , заданного в (4.5) с $x \in L^{\bar{q}}$. Введем следующие величины:

$$c_1 = c_1(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\omega_1^2} \right)^{1/(2-\alpha)}, \quad e_1(t) := c_1 e_0(t) \equiv c_1, \quad t \in [0, 1], \quad (6.8)$$

$$c_0 = c_0(p, \alpha) = \left(\frac{\alpha}{\lambda_0 p} \right)^{1/(2-\alpha)}, \quad p > p_0, \quad (6.9)$$

где числа p_0 , λ_0 заданы в формулах (1.2), (1.10), а функция $e_0(t)$ – в формуле (5.5). Положим

$$\tilde{q}_0 = \tilde{q}_0(p, \alpha) = \frac{2-\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_1^2} \right)^{\alpha/(2-\alpha)} > 0, \quad (6.10)$$

$$\tilde{q}_1 = \tilde{q}_1(p, \alpha) = \frac{2-\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{\lambda_0 p} \right)^{\alpha/(2-\alpha)} > 0. \quad (6.11)$$

Отметим, что число $\tilde{q}_0$ получается из числа q_0 , заданного в (1.13), если в (1.13) положить $t = 1$, $\beta = 1$, $\omega = \omega_1$. Аналогичным образом число $\tilde{q}_1$ получается из числа q_1 , заданного в (1.18). Эти два факта согласуются со связью между процессами $\xi(t)$ и $\eta(t)$, описанной в предложении 3.

ЛЕММА 18. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть фиксированы числа $0 < p \leq p_0$ и $0 < \alpha < 2$. Тогда минимум в экстремальной задаче

$$\Lambda(x) \equiv \frac{1}{2} \langle x, A_\eta^{-1} x \rangle + \Psi(x) \rightarrow \inf, \quad x \in \text{Dom}(A_\eta^{-1}), \quad (6.12)$$

равен $-\tilde{q}_0$ и достигается на двух функциях $\pm e_1(t)$. При этом минимум

$$\inf_{x \in H_{A_\eta}} \left[\Psi(x) + \frac{1}{2} \|x\|_{A_\eta}^2 \right] \quad (6.13)$$

также достигается только в двух точках $\pm e_1(t)$.

2. Пусть фиксированы числа $p > p_0$ и $0 < \alpha < 2$. Тогда минимум в экстремальной задаче (6.12) равен $-\tilde{q}_1$ и достигается на одномерном компактном четырехсвязном многообразии

$$\mathcal{S} := c_0 \mathcal{M} = \{c_0 x : x \in \mathcal{M}\} \subset \text{Ran}(A_\eta), \quad (6.14)$$

где $\mathcal{M}$ задано в формуле (5.16). Минимум (6.13) также достигается только на множестве $\mathcal{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вывод обоих утверждений леммы основан на лемме 10 и проводится единым образом. Переходя к условной экстремальной задаче, убеждаемся, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} T &:= \inf_{x \in \text{Dom}(A_\eta^{-1})} \left[\frac{1}{2} \langle x, A_\eta^{-1} x \rangle - \|x\|_p^\alpha \right] = \inf_{c > 0} \inf_{\substack{x \in \text{Dom}(A_\eta^{-1}), \\ \|x\|_p = c}} \left[\frac{1}{2} \langle x, A_\eta^{-1} x \rangle - \|x\|_p^\alpha \right] = \\ &= \inf_{c > 0} \inf_{\substack{x \in \text{Dom}(A_\eta^{-1}), \\ \|x\|_p = c}} \left[\frac{1}{2} \langle x, A_\eta^{-1} x \rangle - c^\alpha \right]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Решим внутреннюю экстремальную задачу в последнем выражении в (6.15). Согласно лемме 10 при фиксированном $c > 0$ имеют место равенства

$$\inf_{\substack{x \in \text{Dom}(A_\eta^{-1}), \\ \|x\|_p = c}} \frac{1}{2} \langle x, A_\eta^{-1} x \rangle = \inf_{\substack{z \in \text{Dom}(A_\eta^{-1}), \\ \|z\|_p = 1}} \frac{c^2}{2} \langle z, A_\eta^{-1} z \rangle = \frac{c^2}{2\sigma^2}, \quad (6.16)$$

где:

1) при $0 < p \leq p_0$ минимум в первой экстремальной задаче в (6.16) достигается на двух функциях $\pm x^c(t) := \pm c e_0(t)$, а $\sigma^2 = \sigma_1^2 := 1/\omega_1^2$;

2) при $p > p_0$ минимум в первой экстремальной задаче в (6.16) достигается на одномерном многообразии $\mathcal{S}_c := c\mathcal{M} = \{cx : x \in \mathcal{M}\} \subset \text{Ran}(A_\eta)$ и $\sigma^2 = \sigma_0^2 := 1/\lambda_0 p$.

Таким образом, из соотношений (6.15), (6.16) получаем равенства

$$T = \inf_{c>0} \left(\frac{c^2}{2\sigma^2} - c^\alpha \right) = \frac{c_{\min}^2}{2\sigma^2} - c_{\min}^\alpha = -\frac{2-\alpha}{2} (\alpha\sigma^2)^{\alpha/(2-\alpha)}, \quad (6.17)$$

где $c_{\min} = (\alpha\sigma^2)^{1/(2-\alpha)}$. Используя формулы (6.8)–(6.11) и (6.14)–(6.17), убеждаемся, что при $0 < p \leq p_0$ мы имеем $c_{\min} = c_1$, $T = -\tilde{q}_0$, а при $p > p_0$ выполнены равенства $c_{\min} = c_0$, $T = -\tilde{q}_1$, $\mathcal{S}_{c_0} = \mathcal{S}$. Отсюда с учетом хороших свойств гильбертова пространства H_{A_η} и свойства гладкости функционала Ψ вытекают оба утверждения леммы.

6.4. Завершение доказательств п. 3 и п. 4 теоремы 1. Дальнейшее доказательство п. 3 теоремы 1 проводится так же, как доказательство п. 3 теоремы 1 из статьи [30] с учетом формул (6.1), (6.4), (6.5), утверждения 1 леммы 18 и условия $2 < p < p_0$.

Докажем п. 4 теоремы 1 при $p > p_0$, используя утверждение 3 теоремы 9, где мы положим $E = L^p[0, 1]$, $P_A = \mu_\eta$, $A = A_\eta$, $F = \Psi$. Как указано в лемме 17, функционал Ψ из формулы (6.3) удовлетворяет условию D1, поэтому для него выполнено соотношение (2.5). Применяя его с учетом замечания 7, формул (6.1), (6.3), (6.5), (6.11) и п. 2 леммы 18, получаем цепочку равенств при $p > p_0$ и $u \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta |\xi(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} &= \ln \int_{L^p} e^{-v^2 \Psi(x)} d\mu_\eta(vx) = \\ &= - \inf_{x \in L^p} [\Psi(x) + I_{A_\eta}(x)] v^2 (1 + o(1)) = \tilde{q}_1 v^2 (1 + o(1)) = \\ &= \frac{2-\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{\lambda_0 p} \right)^{\alpha/(2-\alpha)} v^2 (1 + o(1)) = \frac{2-\alpha}{2} \left(\frac{\alpha \beta^{(2+p)/p}}{\lambda_0 p m} \right)^{\alpha/(2-\alpha)} u^{2/(2-\alpha)} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Мы получили соотношение (1.18). Четвертое утверждение теоремы 1 доказано.

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 5, 6 И ПРЕДЛОЖЕНИЙ 1 И 2

Доказательство теоремы 5 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. При этом, как будет видно из приведенного ниже изложения, ключевые рассуждения и выводы, используемые при доказательстве теоремы 5, очень близки к соответствующим рассуждениям и выводам, полученным при доказательстве теоремы 1. Мы докажем теорему 5, применяя теоремы 7 и 9. Используем масштабное свойство процесса Боголюбова из предложения 3 для интегралов из теоремы 5. Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 19. Для любых $p > 0$, $u > 0$ выполнено равенство

$$\mathbf{E} \left[\int_0^\beta |\xi(t)|^p dt \right]^u = \left(\frac{\beta}{m} \right)^{up/2} \beta^u \mathbf{E} \left[\int_0^1 |\eta(s)|^p ds \right]^u. \quad (7.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделав в первом интеграле в (7.1) замену переменной $t = \beta s$ и используя формулу (4.1), получаем равенство (7.1).

Таким образом, нам достаточно доказать вариант теоремы 5 для процесса Боголюбова $\eta(t)$ с параметрами $(1, 1, \omega_1)$.

7.1. Выбор банахова функционального пространства. Выбор пространства для доказательства теоремы 5 мы осуществляем точно так же, как в п. 6.1 при доказательстве теоремы 1. Ниже мы используем обозначения и соглашения п. 6.1, в частности формулу (6.2). Таким образом, в данном разделе мы вновь рассматриваем гауссовскую меру Боголюбова μ_η , заданную в пространстве $L^{\tilde{p}}[0, 1]$, имея в виду, что эта мера сосредоточена на $C^0[0, 1]$. Как уже было сказано, в этом случае, мера μ_η имеет нулевое среднее значение и инъективный ковариационный оператор $A_\eta: L^{\tilde{q}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$ интегрального типа, который определяется по формуле (4.5) для $x \in L^{\tilde{q}}$.

7.2. Выбор основного функционала. Мы докажем теорему 5, применяя теоремы 7 и 9, где мы будем полагать $E = L^{\tilde{p}}$, $P_A = \mu_\eta$, $A = A_\eta$ и $f \equiv 1$.

Возьмем в качестве функционала F из теорем 7 и 9 следующий функционал:

$$F(x) := -p \ln \|x\|_p \equiv -\ln \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right), \quad p > 0, \quad x \in L^{\tilde{p}}. \quad (7.2)$$

Наша цель – применить теоремы 7 и 9 к данному функционалу и гауссовской мере Боголюбова μ_η . Используя определение (7.2) и свойство однородности, запишем последнее среднее из формулы (7.1) в виде модельного интеграла Лапласа:

$$\mathbf{E} \left[\int_0^1 |\eta(t)|^p dt \right]^u = u^{up/2} \mathbf{E} \exp \left\{ -uF \left(\frac{\eta}{\sqrt{u}} \right) \right\}. \quad (7.3)$$

Видно, что роль большого параметра из теорем 7 и 9 теперь играет число $\sqrt{u}$.

ЛЕММА 20. Для функционала (7.2) и ковариационного оператора A_η , заданного в (4.5) для $x \in L^{\tilde{q}}$, выполнено условие D1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО несложно провести, используя неравенства (1.51) при $\beta = 1$.

Функционал $-F(x)$ согласно (7.2) представляет собой логарифм интегрального функционала. Как уже было указано в разделе 6, интегральные функционалы дифференцируемы по Фреше [42], [56], [57]. Как и ранее, через $\mathcal{X}$ обозначено множество функций из $C^0[0, 1]$, имеющих конечное число нулей.

ЛЕММА 21. Функционал (7.2) трижды дифференцируем по Фреше в каждой точке $x \in \mathcal{X}$, при этом первые две производные имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -p \|x\|_p^{-p} |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t), \\ F''(x)g &= p(1-p) \|x\|_p^{-p} |x(t)|^{p-2} g + \\ &\quad + p^2 \|x\|_p^{-2p} |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t) \langle g, |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t) \rangle, \quad g \in L^{\tilde{p}}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

При $p \geq 2$ операторы (7.4) являются ограниченными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получаем, применяя теорему о суперпозиции дифференцируемых отображений [57] и известные формулы для первых двух производных функционала $\hat{F}(x) = \int_0^1 |x(t)|^p dt$.

7.3. Решение экстремальной задачи. Решим экстремальную задачу из условия **D2** для функционала (7.2) и ковариационного оператора A_η . По аналогии с (6.8)–(6.11) введем следующие величины:

$$c_2 = c_2(p) = \frac{\sqrt{p}}{\omega_1}, \quad e_2(t) := c_2 e_0(t) \equiv \frac{\sqrt{p}}{\omega_1}, \quad 0 < p \leq p_0, \quad t \in [0, 1], \quad (7.5)$$

$$c_3 = c_3(p) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}, \quad p > p_0, \quad (7.6)$$

где числа p_0 , λ_0 заданы в формулах (1.2), (1.10), а функции $e_0(t)$ – в формуле (5.5). Положим для $p > 0$

$$\tilde{q}_2 = \tilde{q}_2(p) = \frac{p}{2} - \frac{p}{2} \ln \left(\frac{p}{\omega_1^2} \right). \quad (7.7)$$

Отметим, что число $\tilde{q}_2$ получается из числа q_2 , заданного в (1.37), если в (1.37) положить $m = 1$, $\beta = 1$, $\omega = \omega_1$. Этот факт согласуется со связью между процессами $\xi(t)$ и $\eta(t)$, установленной в предложении 3.

ЛЕММА 22. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть фиксировано число $0 < p \leq p_0$. Тогда минимум в экстремальной задаче

$$\frac{1}{2} \langle x, A_\eta^{-1} x \rangle + F(x) \rightarrow \inf, \quad x \in \text{Dom}(A_\eta^{-1}), \quad (7.8)$$

равен $\tilde{q}_2$ и достигается на двух функциях $\pm e_2(t)$. При этом минимум

$$\inf_{x \in H_{A_\eta}} \left[F(x) + \frac{1}{2} \|x\|_{A_\eta}^2 \right] \quad (7.9)$$

также достигается только в двух точках $\pm e_2(t)$.

2. Пусть фиксировано число $p > p_0$. Тогда минимум в экстремальной задаче (7.8) равен q_3 и достигается на одномерном компактном четырехсвязном многообразии

$$\mathcal{V} := c_3 \mathcal{M} = \{c_3 x : x \in \mathcal{M}\} \subset \text{Ran}(A_\eta), \quad (7.10)$$

где q_3 задано в формуле (1.44), а многообразие $\mathcal{M}$ – в (5.16). Минимум (7.9) также достигается только на множестве $\mathcal{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 18. Изложим его. Вывод обоих утверждений леммы основан на лемме 10 и проводится единым образом. Переходя к условной экстремальной задаче, убеждаемся, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} U &:= \inf_{x \in \text{Dom}(A_\eta^{-1})} \left[\frac{1}{2} \langle x, A_\eta^{-1} x \rangle - p \ln \|x\|_p \right] = \\ &= \inf_{c>0} \inf_{\substack{x \in \text{Dom}(A_\eta^{-1}), \\ \|x\|_p = c}} \left[\frac{1}{2} \langle x, A_\eta^{-1} x \rangle - p \ln \|x\|_p \right] = \inf_{c>0} \inf_{\substack{x \in \text{Dom}(A_\eta^{-1}), \\ \|x\|_p = c}} \left[\frac{1}{2} \langle x, A_\eta^{-1} x \rangle - p \ln c \right]. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Внутренняя экстремальная задача в последнем выражении в (7.11) решена в (6.16), поэтому в силу (6.16) при фиксированном $c > 0$ имеет место равенство

$$\inf_{\substack{x \in \text{Dom}(A_\eta^{-1}), \\ \|x\|_p = c}} \frac{1}{2} \langle x, A_\eta^{-1} x \rangle = \frac{c^2}{2\sigma^2}, \quad (7.12)$$

где:

1) при $0 < p \leq p_0$ минимум в экстремальной задаче в (7.12) достигается на двух функциях $\pm x^c(t) := \pm c e_0(t)$, а $\sigma^2 = \sigma_1^2 := 1/\omega_1^2$;

2) при $p > p_0$ минимум в экстремальной задаче в (7.12) достигается на одномерном многообразии $\mathcal{S}_c := c\mathcal{M} = \{cx : x \in \mathcal{M}\} \subset \text{Ran}(A_\eta)$, а $\sigma^2 = \sigma_0^2 := 1/\lambda_0 p$. Таким образом, из соотношений (7.11), (7.12) получаем равенства

$$U = \inf_{c>0} \left(\frac{c^2}{2\sigma^2} - p \ln c \right) = \frac{c_{\min}^2}{2\sigma^2} - p \ln c_{\min} = \frac{p}{2} - \frac{p}{2} \ln(p\sigma^2), \quad (7.13)$$

где $c_{\min} = \sigma\sqrt{p}$. Используя формулы (1.44), (7.5)–(7.7) и (7.10)–(7.13), убеждаемся, что при $0 < p \leq p_0$ мы имеем $c_{\min} = c_2$, $U = \tilde{q}_2$, а при $p > p_0$ выполнены равенства $c_{\min} = c_3$, $U = q_3$, $\mathcal{S}_{c_3} = \mathcal{V}$. Отсюда с учетом хороших свойств гильбертова пространства H_{A_η} и свойства гладкости функционала F вытекают оба утверждения леммы.

7.4. Спектр интегрального оператора $A_\eta F''(e_2)$ при $0 < p \leq p_0$. При $0 < p \leq p_0$ вследствие лемм 20–22 гауссовская мера Боголюбова μ_η и функционал (7.2) удовлетворяют условиям **D1–D3** теоремы 7 при $E = L^{\tilde{p}}$, $f \equiv 1$ и с двумя экстремальными точками $\pm e_2$.

Рассмотрим условие **D4**. Согласно (7.5) мы имеем $F''(e_2) = F'''(-e_2)$, поэтому достаточно исследовать спектр интегрального оператора $A_\eta F'''(e_2) : L^{\tilde{p}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$. Этот оператор является ядерным как композиция ядерного оператора A_η и ограниченного оператора $F'''(e_2)$ [60].

Учитывая формулы (7.4), (7.5), получаем соотношение

$$[F'''(e_2)z](t) = (1-p)\omega_1^2 z(t) + p\omega_1^2 \int_0^1 z(s) ds, \quad t \in [0, 1], \quad z \in L^{\tilde{p}}. \quad (7.14)$$

ЛЕММА 23. При $0 < p \leq p_0$ собственные числа $\{\gamma_n\}_{n=-\infty}^\infty$ ядерного интегрального оператора $A_\eta F'''(e_2)$ имеют следующий вид:

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_n = \frac{(1-p)\omega_1^2}{\omega_1^2 + (2\pi n)^2}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству леммы 5 из [30] при помощи леммы 7 и формул (4.7), (7.14).

Определим оператор $R = I + A_\eta F'''(e_2) : L^{\tilde{p}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$; этот оператор в рассматриваемой нами задаче играет роль оператора R_1 из условия **D4**.

7.5. Вычисление определителя оператора R .

ЛЕММА 24. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Предположим, что фиксировано число $0 < p < 2$. Тогда имеет место равенство*

$$\det R \equiv \prod_{n=-\infty}^{\infty} (1 + \gamma_n) = \frac{2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{\omega_1}{2} \sqrt{2-p}\right)}{(2-p) \operatorname{sh}^2 \frac{\omega_1}{2}}.$$

2. *При $p = 2$ выполнено равенство*

$$\det R = \frac{\omega_1^2}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{\omega_1}{2}}.$$

3. *Пусть фиксировано число $0 < p \leq p_0$. Тогда*

$$\det R = \frac{2 \sin^2\left(\frac{\omega_1}{2} \sqrt{p-2}\right)}{(p-2) \operatorname{sh}^2 \frac{\omega_1}{2}}. \quad (7.15)$$

4. *Для оператора $A_\eta F''(e_2)$ выполнено условие **D4** при всех $0 < p < p_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО первых трех утверждений проводится аналогично доказательству леммы 15 из [30]. Четвертое утверждение вытекает из первых трех и того факта, что детерминант (7.15) равен нулю при $p = p_0$.

7.6. Доказательство п. 1–3 теоремы 5. Найдем точную асимптотику при $u \rightarrow \infty$ для последнего интеграла Лапласа в (7.3). Пусть фиксировано число $0 < p < p_0$. Тогда вследствие лемм 20–24 гауссовская мера Боголюбова μ_η и функционал (7.2) удовлетворяют условиям **D1–D4** теоремы 7 при $E = L^{\bar{p}}$, $f \equiv 1$, $m = 2$, $x^1 = e_2$ и $x^2 = -e_2$. Таким образом, к последнему интегралу из формулы (7.3) применима теорема 7, и мы можем использовать соотношение (2.1) с большим параметром $\sqrt{u}$ вместо u . Несложно видеть, что константы из правой части формулы (2.1) для обеих экстремальных функций совпадают, поэтому достаточно провести вычисления только для точки e_2 . Используя леммы 22, 24 и формулы (2.1), (7.3), (7.7), мы получаем утверждения 1–3 теоремы 5 для гауссовского процесса Боголюбова $\eta(t)$. Затем, учитывая уже доказанные формулы и равенства (4.2), (7.1), мы получаем соотношения (1.38)–(1.42) теоремы 5. Тем самым три первых утверждения теоремы 5 доказаны.

7.7. Доказательство п. 4 теоремы 5. Докажем четвертое утверждение теоремы 5 при $p > p_0$, используя п. 3 теоремы 9, где $E = L^p[0, 1]$, $P_A = \mu_\eta$, $A = A_\eta$, а функционал F задан в (7.2). Как указано в лемме 20, функционал F удовлетворяет условию **D1**, поэтому для него выполнено соотношение (2.5). Применяя соотношение (2.5) с учетом замечания 7, формул (1.44), (7.1), (7.3) и п. 2 леммы 22, получаем следующую цепочку равенств при $p > p_0$ и $u \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\int_0^\beta |\xi(t)|^p dt \right]^u &= \left(\frac{\beta u}{m} \right)^{up/2} \beta^u \mathbf{E} \exp \left\{ -u F \left(\frac{\eta}{\sqrt{u}} \right) \right\} = \\ &= \left(\frac{\beta u}{m} \right)^{up/2} \beta^u \exp \left\{ -u \inf_{x \in L^p} [F(x) + I_{A_\eta}(x)] (1 + o(1)) \right\} = \\ &= \left(\frac{\beta u}{m} \right)^{up/2} \beta^u e^{-u q_3(p)(1+o(1))}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Мы получили соотношение (1.43). Четвертое утверждение теоремы 5 доказано.

7.8. Доказательство теоремы 6. Доказательство теоремы 6 проводится по той же схеме, что и доказательство первых трех утверждений теоремы 5 на основе теоремы 7. При этом существенным образом используются утверждения, уже полученные в настоящем разделе. Укажем основные моменты. Пусть выполнены условия теоремы 6. В качестве банахова пространства E , участвующего в формулировке теоремы 7, возьмем вновь пространство $L^{\tilde{p}}$, где число $\tilde{p}$ задано в формуле (6.2). В качестве функционала F возьмем функционал

$$F_1(x) := -\ln \left| \int_0^1 x^p(t) dt \right|, \quad 0 < p < p_0, \quad x \in L^{\tilde{p}}. \quad (7.17)$$

Тогда в силу предложения 3 справедлив следующий аналог первого равенства в (7.16) при $u = 2k$:

$$\mathbf{E} \left[\int_0^\beta \xi^p(t) dt \right]^{2k} = \mathbf{E} \left| \int_0^\beta \xi^p(t) dt \right|^{2k} = \left(\frac{2k\beta}{m} \right)^{kp} \beta^{2k} \mathbf{E} \exp \left\{ -2kF_1 \left(\frac{\eta}{\sqrt{2k}} \right) \right\}. \quad (7.18)$$

Функционал F_1 трижды дифференцируем по Фреше в каждой точке $x \in \mathcal{X}_0$, где

$$\mathcal{X}_0 := \left\{ x \in \mathcal{X} : \int_0^1 x^p(t) dt \neq 0 \right\}.$$

В случае функционала (7.17) минимум в экстремальной задаче из условия **D2**, т. е. в задаче

$$\frac{1}{2} \langle x, A_\eta^{-1} x \rangle + F_1(x) \rightarrow \inf, \quad x \in \text{Dom}(A_\eta^{-1}), \quad (7.19)$$

равен $\tilde{q}_2$ и достигается на двух функциях $\pm e_2(t)$. В этом можно убедиться, просматривая доказательство леммы 22 и учитывая, что $F_1(e_2) = F_1(-e_2) = F(e_2)$, $F'_1(e_2) = -F'_1(-e_2) = F'(e_2)$, где функционал F задан в (7.2). Кроме того, для функционалов (7.2) и (7.18) справедливы равенства $F''_1(e_2) = F''_1(-e_2) = F''(e_2)$, поэтому утверждения лемм 23, 24 остаются справедливыми и для оператора $R_1 := I + A_\eta F''_1(e_2) \equiv R$. Таким образом, в условиях теоремы 6 применима теорема 7 с $E = L^{\tilde{p}}$, $f \equiv 1$, $F = F_1$, $m = 2$, $x^1 = e_2$, $x^2 = -e_2$ и большим параметром $u = \sqrt{2k} \rightarrow \infty$. Далее в условиях теоремы 6 следует рассмотреть отдельно три случая значений параметра p , а именно $0 < p < 2$, $p = 2$, $2 < p < p_0$. Применяя во всех трех случаях теорему 7 и учитывая теорему 5, приходим к формуле (1.45). Теорема 6 доказана.

7.9. Доказательство предложений 1 и 2. Доказательство соотношений (1.33), (1.35) и (1.49) проводится при помощи формул (2.4), (2.5) из теоремы 9 и первых пунктов лемм 10, 18, 22 аналогично доказательству четвертых утверждений теорем 1, 2 и 5. Доказательство соотношений (1.34), (1.36) и (1.50) проводится также при помощи формул (2.4), (2.5) из теоремы 9 с учетом первых утверждений лемм 10, 18, 22 аналогично доказательству теоремы 6 с использованием функционалов

$$G_1(x) := \int_0^1 x^p(t) dt - 1, \quad \Psi_1(x) := - \left(\int_0^1 x^p(t) dt \right)^{\alpha/p}$$

и $F_1(x)$ из (7.17) (ср. с (5.1) и (6.3)). Некоторые подробности для случаев функционалов $G_1(x)$ и $\Psi_1(x)$ изложены в статье [30].

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Доказательство теоремы 3 основано на следующем асимптотическом результате для гауссовских процессов типа винеровского [15].

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$, – гауссовский стационарный процесс с п.н. непрерывными траекториями, нулевым средним значением и единичной дисперсией. Предположим, что его ковариационная функция $R_\zeta(t-s) = \mathbf{E} \zeta(t)\zeta(s)$, $t, s \in [0, T]$, удовлетворяет при некотором $c > 0$ условиям

$$R_\zeta(t) = 1 - c|t| + o(|t|), \quad t \rightarrow 0, \quad -1 < R_\zeta(t) < 1, \quad t \in (0, T]. \quad (8.1)$$

Тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнены соотношения

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |\zeta(t)| > u \right\} = 2 \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, T]} \zeta(t) > u \right\} (1 + o(1)) = e^{-u^2/2} u \frac{cT\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} (1 + o(1)). \quad (8.2)$$

Доказательство данной теоремы можно получить, используя следствие 6.4 и теорему 7.1 из монографии [15] при $n = 1$, $\alpha = 1$, учитывая что $H_1 = 1$.

8.1. Доказательство соотношения (1.28) из теоремы 3. Пусть фиксировано число $0 < \beta_0 < \beta$. Используя масштабное свойство процесса Боголюбова из предложения 3, получаем следующее равенство для $u > 0$:

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, \beta_0]} \xi(t) > u \right\} = \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, \beta_0/\beta]} \eta(t) > v \right\}, \quad v = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\beta}} u. \quad (8.3)$$

Учитывая равенства (4.2), (4.3), получаем формулу для дисперсии стационарного гауссовского процесса $\eta(t)$,

$$\sigma_\eta^2 := \mathbf{E} \eta^2(t) = \frac{\operatorname{ch} \frac{\omega_1}{2}}{2\omega_1 \operatorname{sh} \frac{\omega_1}{2}}, \quad t \in [0, 1], \quad (8.4)$$

и его корреляционной функции,

$$r_\eta(t-s) := \frac{\mathbf{E} \eta(t)\eta(s)}{\sigma_\eta^2} = \frac{\operatorname{ch}(\omega_1|t-s| - \frac{\omega_1}{2})}{\operatorname{ch} \frac{\omega_1}{2}}, \quad t, s \in [0, 1]. \quad (8.5)$$

Используя последнее соотношение, несложно получить разложение

$$r_\eta(t) = 1 - \frac{|t|}{2\sigma_\eta^2} + o(|t|), \quad t \rightarrow 0, \quad (8.6)$$

и оценку $0 < r_\eta(t) < 1$, $t \in (0, \beta_0/\beta]$. Отсюда мы заключаем, что к процессу $\eta(t)/\sigma_\eta$, $t \in [0, \beta_0/\beta]$, применима теорема 10 при $T = \beta_0/\beta$, $c = 1/2\sigma_\eta^2$. Используя формулы (8.2) и (8.3), получаем следующие соотношения при $u \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, \beta_0]} \xi(t) > u \right\} = \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, \beta_0/\beta]} \frac{\eta(t)}{\sigma_\eta} > \frac{v}{\sigma_\eta} \right\} = e^{-v^2/2\sigma_\eta^2} v \frac{\beta_0}{2\beta\sigma_\eta^3\sqrt{2\pi}} (1 + o(1)). \quad (8.7)$$

Учитывая формулы (8.4), (8.7) и равенство $v = (\sqrt{m}/\sqrt{\beta})u$, убеждаемся, что при $u \rightarrow \infty$ справедливо второе соотношение в формуле (1.28). Первое соотношение в (1.28) вытекает из формулы

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, \beta_0]} |\xi(t)| > u \right\} = \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, \beta_0/\beta]} |\eta(t)| > v \right\} = \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, \beta_0/\beta]} \eta(t) > v \right\} (1 + o(1))$$

и соотношения (8.7). Утверждение (1.28) доказано.

Брать в формуле (1.28) в качестве β_0 число β , вообще говоря, нельзя. Это объясняется тем, что $r_\eta(1) = 1$ согласно формуле (8.5), и теорема 10 неприменима к процессу $\eta(t)/\sigma_\eta$ при $t \in [0, 1]$, так как в этом случае нарушается условие (8.1) в крайней точке $t = 1$.

8.2. Доказательство соотношения (1.29) из теоремы 3. Используя масштабное свойство процесса Боголюбова из предложения 3, получаем следующее равенство для $u > 0$:

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, \beta]} \xi(t) > u \right\} = \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, 1]} \eta(t) > v \right\}, \quad v = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\beta}} u. \quad (8.8)$$

Применяя известный результат Ландау–Маркуса–Шенпа (см., например, [61]), получаем соотношение

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v^2} \ln \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, 1]} \eta(t) > v \right\} = -\frac{1}{2 \mathbf{E} \eta^2(t)}. \quad (8.9)$$

Учитывая формулы (8.4), (8.8), (8.9), убеждаемся, что справедливо равенство

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, \beta]} \xi(t) > u \right\} = -m\omega \operatorname{th} \left(\frac{\beta\omega}{2} \right).$$

Аналогично доказывается второе равенство в (1.29). Теорема 3 доказана.

Список литературы

- [1] Р. Фейнман, “Пространственно-временной поход к нерелятивистской квантовой механике”, *Вопросы причинности в квантовой механике*, ред. Я. П. Терлецкий, А. А. Гусев, ИЛ, М., 1955, 167–207.
- [2] Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, М., 1968.
- [3] S. Albeverio et al. (eds.), *Feynman Path integrals*, Proc. International Colloquium (Marseille, May 1978), Lect. Notes Phys., **106**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.
- [4] F. W. Wiegel, *Phys. Rep.*, **16:2** (1975), 57–114.
- [5] В. Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике*, Атомиздат, М., 1976.
- [6] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Lect. Notes Pure Appl. Math., **86**, Academic Press, New York, London, 1979.
- [7] L. S. Schulman, *Techniques and applications of path integration*, Wiley, New York, 1981.
- [8] Дж. Глимм, А. Джаффе, *Математические методы квантовой физики. Подход с использованием континуальных интегралов*, Мир, М., 1984.

- [9] G. W. Johnson, M. L. Lapidus, *The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus*, Clarendon Press, Oxford, 2000.
- [10] П. Л. Рубин, *ТМФ*, **156**:2 (2008), 184–188.
- [11] Л. А. Янович, *Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам*, Наука и техника, Минск, 1976.
- [12] И. М. Ковальчик, Л. А. Янович, *Обобщенный винеровский интеграл и некоторые его приложения*, Наука и техника, Минск, 1989.
- [13] R. S. Ellis, J. S. Rosen, *Comm. Math. Phys.*, **82**:2 (1981), 153–181.
- [14] R. S. Ellis, J. S. Rosen, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **273**:2 (1982), 447–481.
- [15] В. И. Питербарг, *Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей*, Изд-во МГУ, М., 1988.
- [16] В. И. Питербарг, В. Р. Фаталов, *УМН*, **50**:6 (1995), 57–150.
- [17] В. Р. Фаталов, “Точные асимптотики винеровских интегралов типа Лапласа для L^p -функционалов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:1 (2010), 197–224.
- [18] Н. Н. Боголюбов, *Докл. АН СССР*, **99**:2 (1954), 225–226; *Собр. научных трудов*, т. 9: *Квантовая теория поля*, ред. А. Д. Суханов, Наука, М., 2007.
- [19] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Аспекты теории полярона*, Физматлит, М., 2004.
- [20] Д. П. Санкович, *ТМФ*, **119**:2 (1999), 345–352.
- [21] Д. П. Санкович, *ТМФ*, **126**:1 (2001), 149–163.
- [22] Д. П. Санкович, *ТМФ*, **127**:1 (2001), 125–142.
- [23] Д. П. Санкович, “Функциональный интеграл Боголюбова”, *Нелинейная динамика*, Сборник статей, Тр. МИАН, **251**, Наука, М., 2005, 223–256.
- [24] Г. Крамер, М. Лидбеттер, *Стационарные случайные процессы*, Мир, М., 1969.
- [25] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 1, Наука, М., 1971.
- [26] М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции*, ТВиМС, Киев, 1995.
- [27] Х.-С. Го, *Гауссовские меры в банаховых пространствах*, Мир, М., 1979.
- [28] В. И. Богачев, *Гауссовские меры*, Физматлит, М., 1997.
- [29] Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*, Наука, М., 1985.
- [30] В. Р. Фаталов, *ТМФ*, **157**:2 (2008), 286–308.
- [31] E. Brézin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. D*, **15**:6 (1997), 1544–1557.
- [32] В. Р. Фаталов, *Проблемы перед. информац.*, **42**:1 (2006), 52–71.
- [33] В. Р. Фаталов, *Проблемы перед. информац.*, **46**:1 (2010), 68–93.
- [34] М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.
- [35] N. Bleistein, R. A. Handelsman, *Asymptotic Expansions of Integrals*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975.
- [36] K. W. Breitung, *Asymptotic Approximations for Probability Integrals*, Lect. Notes Math., **1592**, Springer, Berlin, 1994.
- [37] В. Р. Фаталов, “Метод Лапласа для гауссовских мер в банаховом пространстве (многообразии точек минимума) с применением к статистике Ватсона”, *ТВП*, в печати.
- [38] М. Кац, *Вероятность и смежные вопросы в физике*, Наука, М., 1965.
- [39] А. Н. Ширяев, *Вероятность – 1*, Изд-во МЦНМО, М., 2004.
- [40] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям*, Наука, М., 1979.
- [41] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977.
- [42] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.

- [43] В. Р. Фаталов, “Моменты L^p -функционалов от гауссовских процессов: точные асимптотики”, в печати.
- [44] V. R. Fatalov, *J. Contemp. Math. Anal.*, **27**:5 (1992), 36–50.
- [45] S. R. S. Varadhan, *Commun. Pure Appl. Math.*, **19**:3 (1966), 261–286.
- [46] S. R. S. Varadhan, *Ann. Probab.*, **36**:2 (2008), 397–419.
- [47] J.-D. Deuschel, D. W. Stroock, *Large Deviations*, Pure Appl. Math., **137**, Acad. Press, Boston, MA, 1989.
- [48] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Appl. Math., **38**, Springer, New York, 1998.
- [49] J. A. Bucklew, *Large Deviation Techniques in Decision, Simulation and Estimation*, Wiley, New York, 1990.
- [50] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, М., 1992.
- [51] С.-Е. Pfister, “Thermodynamical aspects of classical lattice systems”, *In and Out of Equilibrium*, 4th Brazilian school of probability (Mambucaba, Brazil, August 14–19, 2000), Progr. Probab., **51**, ed. V. Sidoravicius, Birkhäuser, Boston, 2002, 393–472.
- [52] E. Olivieri, M. E. Vares, *Large Deviations and Metastability*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **100**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [53] R. S. Ellis, *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*, Springer, Berlin, 2006.
- [54] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1961.
- [55] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2007.
- [56] М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*, Наука, М., 1972.
- [57] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979.
- [58] С. Г. Крейн (ред.), *Функциональный анализ*, Наука, М., 1972.
- [59] Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979.
- [60] А. Пич, *Операторные идеалы*, Мир, М., 1982.
- [61] R. J. Adler, *An Introduction to Continuity, Extrema, and Related Topics for General Gaussian Processes*, IMS Lect. Notes, **12**, Hayward, CA, IMS, 1990.

Поступила в редакцию 3.11.2010