Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Байдун, В. А. Загребнов, Диффузия и лапласовский перенос, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 3, 376–388

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6688>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 02:55:48

© 2011 г.

И. Байдун*, В. А. Загребнов*

ДИФФУЗИЯ И ЛАПЛАСОВСКИЙ ПЕРЕНОС

Изучается (стационарный) лапласовский перенос в рамках формализма Дирихле–Неймана. Основные результаты относятся к формальному решению геометрической обратной задачи об определении положения и формы поглощающих областей. Исследование ограничено одномерным и двумерным случаями. Показано, что двумерный случай можно изучать с помощью конформных отображений.

Ключевые слова: лапласовский перенос, операторы Дирихле–Неймана, конформное отображение.

*Посвящается Сергею Владимировичу Тябликову,
с глубоким уважением к той роли, которую он сыграл
в изучении различных аспектов задач многих тел и
которую нельзя переоценить.*

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Известно (см., например, [1]), что задача об определении поля *матрицы проводимости* $\gamma(p) = [\gamma_{i,j}(p)]_{i,j=1}^d$, где p лежит в ограниченной открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, связана с “измерением” *эллиптического отображения Дирихле–Неймана* (переводящего данные Дирихле в данные Неймана) для соответствующего уравнения проводимости. Заметим, что решение этой задачи находит множество практических применений в разнообразных областях: геофизике, электрохимии и т.д. Она является также важным средством диагностики в медицине, например в электрической импедансной томографии, – ткани человеческого тела дают пример сильно анизотропного проводника [2].

При допущении, что нет источников или стоков тока, потенциал $v(p)$, $p \in \Omega$, для заданного напряжения $f(\omega)$, $\omega \in \partial\Omega$, на (гладкой) границе $\partial\Omega$ области Ω является решением задачи Дирихле

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\gamma \nabla v) &= 0 && \text{в области } \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} &= f && \text{на границе } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.1}$$

*Université de la Méditerranée, Centre de Physique Théorique, Marseille, France.
E-mail: Ibrahim.Baydoun@cpt.univ-mrs.fr, Valentin.Zagrebnoy@cpt.univ-mrs.fr

При этом соответствующее задаче (1.1) отображение (оператор) Дирихле–Неймана $\Lambda_{\gamma, \partial\Omega}$ (формально) определено как [3]

$$\Lambda_{\gamma, \partial\Omega}: f \mapsto \frac{\partial v_f}{\partial \nu_\gamma} := \nu \cdot \gamma \nabla v_f|_{\partial\Omega}, \quad (1.2)$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к границе в точке $\omega \in \partial\Omega$, а функция $v := v_f$ является решением задачи Дирихле (1.1).

Оператор Дирихле–Неймана (1.2) называется также *отображением напряжение–ток*, поскольку функция $\Lambda_{\gamma, \partial\Omega} f$ выражает величину индуцированного тока через границу $\partial\Omega$. Главная (обратная) задача состоит в том, можно ли найти матрицу проводимости γ исходя из известных электрических измерений на границе, т. е. получить соответствующий оператор Дирихле–Неймана? В общем случае этот оператор не определяет матрицу γ единственным образом (см., например, [4]).

Основной вопрос в данном контексте состоит в нахождении достаточных условий, обеспечивающих однозначную разрешимость обратной задачи.

1.2. Задача о величине электрического тока в виде (1.2) является примером так называемого *диффузионного* лапласовского переноса [5]. Помимо задачи определения тока по известному напряжению, исследования переноса такого вида мотивируются, например, исследованием переноса через *биологические мембраны* (см., например, работы [6], [7]).

Пусть некоторые “особи” с концентрацией $C(p)$, $x \in \mathbb{R}^d$, стационарно диффундируют в изотропной среде ($\gamma = I$) от (удаленного) источника, локализованного на замкнутой границе $\partial\Omega$, по направлению к *полупроницаемой* компактной границе раздела ∂B клетки $B \subset \Omega$, где они поглощаются с заданной скоростью $W \geq 0$. Тогда стационарное поле концентраций (лапласовский транспорт с коэффициентом диффузии $D \geq 0$) подчиняется системе уравнений

$$\begin{aligned} \Delta C &= 0, & p \in \Omega \setminus \overline{B}, \\ C|_{\partial\Omega}(p) &= C_0, & \text{постоянная концентрация в источнике } \partial\Omega, \\ -D\partial_\nu C|_{\partial B}(\omega) &= W(C - C^*)|_{\partial B}(\omega) & \text{на границе раздела } \omega \in \partial B. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Обычно предполагается, что $C(p) = C^* \geq 0$, $p \in \overline{B}$, – постоянная концентрация “особей” внутри клетки $\overline{B}$.

Этот пример служит мотивировкой следующей абстрактной задачи о стационарном диффузионном лапласовском переносе с поглощением на поверхности ∂B :

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & p \in \Omega \setminus \overline{B}, & \quad u(p) = \text{const}, & p \in \overline{B}, \\ u|_{\partial\Omega}(p) &= f(p), & p \in \partial\Omega, \\ (\alpha u + \partial_\nu u)|_{\partial B}(\omega) &= g(\omega), & \omega \in \partial B. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Эта задача представляет собой задачу Дирихле для области $\Omega \supset B$ с граничными условиями Дирихле–Неймана (или Робина [8]) на поглощающей поверхности ∂B . При изменении α между $\alpha = 0$ и $\alpha = +\infty$ воспроизводятся соответственно граничные условия Неймана и Дирихле.

Аналогично (1.2) с задачей (1.4) можно связать оператор Дирихле–Неймана

$$\Lambda_{\gamma=I, \partial\Omega}: f \mapsto \partial_\nu u_f|_{\partial\Omega}. \quad (1.5)$$

Область $\text{dom}(\Lambda_{I, \partial\Omega})$ принадлежит определенному пространству Соболева функций на границе $\partial\Omega$, которое содержит $u_f := U_f^{(\alpha, g)}$ – решения задачи (1.4) при заданной

функции f с граничными условиями Робина на границе ∂B , фиксированными за счет выбора α и g .

Тогда имеются по крайней мере две (в действительности связанных) геометрических обратных задачи, представляющих интерес:

1) по заданным условиям Дирихле f и соответствующим (измеряемым) данным Неймана (1.5) на доступной внешней границе $\partial\Omega$ восстановить форму внутренней границы ∂B ;

2) более простая обратная задача формулируется как определение положения области (клетки) B заданной формы при фиксированных параметрах α и g .

1.3. Цель настоящей работы состоит в изучении указанных задач 1 и 2 в рамках приложений, обрисованных в задаче (1.3), и в разработке соответствующего формализма, основанного на операторах Дирихле–Неймана.

В разделе 2 мы формулируем математическую постановку этих задач и рассматриваем единственность решения прямой задачи с граничными условиями (1.4). Мы также иллюстрируем наш способ действий на явном примере одномерной обратной задачи, где $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ и $B = (a, b)$.

Основные результаты (раздел 3) относятся к двумерному случаю для компактной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Заметим, что имеются три момента, требующие особого внимания. Во-первых, задачи (1.3) и (1.4) сформулированы для областей $\Omega \setminus \overline{B}$, не являющихся односвязными. Во-вторых, следует отметить особые свойства комбинации граничных условий Дирихле и Робина. В-третьих, необходимо упомянуть, что геометрическая обратная задача относится к классу некорректно поставленных [9].

В настоящей работе представлено прежде всего формальное решение в случае, когда $\alpha = +\infty$, т. е. для граничных условий Дирихле $u|_{\partial B}(\omega) = 0$, $\omega \in \partial B$. В этом случае наш подход мотивирован двумя важными работами [10], [11]. В рамках формализма Дирихле–Неймана мы уточняем полученные там результаты и делаем дополнительные наблюдения в случае фиксированной геометрии областей B и Ω .

При конечном $\alpha \geq 0$ и $g = 0$ мы ограничиваемся лишь несколькими замечаниями (раздел 4) и оставляем подробное исследование для будущих публикаций. То же самое относится и к нашей формальной схеме при $d = 2$, поскольку соответствующая обратная задача является некорректной и требует дополнительного анализа.

Случай $d = 1$ позволяет провести явные вычисления и служит иллюстрацией наших основных идей. Для решения же обратных задач при $d = 2$ мы используем метод конформных отображений для гармонических функций в двусвязных областях $\Omega \setminus B$.

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ

2.1. Ниже предполагается, что Ω и $B \subset \Omega$ – открытые ограниченные области в $\mathbb{R}^d$ с C^2 -гладкими границами $\partial\Omega$ и ∂B без общих точек, т. е. $\partial(\Omega \setminus \overline{B}) = \partial\Omega \cup \partial B$ и $\partial\Omega \cap \partial B = \emptyset$. Тогда корректно определено единичное направленное по внешней нормали к границе $\partial(\Omega \setminus \overline{B})$ векторное поле $\nu(p)_{p \in \partial(\Omega \setminus B)}$, и нормальную производную в (1.4) можно рассматривать как *внутренний предел*:

$$(\partial_\nu u)|_{\partial B}(\omega) := \lim_{p \rightarrow \omega} \nu(\omega) \cdot (\nabla u)(p), \quad p \in \Omega \setminus \overline{B}. \quad (2.1)$$

Существование предела (2.1), как и ограничения $u|_{\partial B}(\omega) := \lim_{p \rightarrow \omega} u(p)$, обеспечено тем, что u должно быть гармоническим решением задачи (1.4) для C^2 -гладких границ $\partial(\Omega \setminus \overline{B})$ [12].

Введем теперь некоторые необходимые для дальнейшего стандартные обозначения и определения [13]. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство $L^2(M)$ на области $M \subset \mathbb{R}^d$, а $\partial\mathcal{H} := L^2(\partial M)$ обозначает соответствующее *граничное пространство*. Через $W_2^s(M)$ обозначим пространство Соболева функций из $L^2(M)$, s -производные которых также лежат в $L^2(M)$; аналогичным образом $W_2^s(\partial M)$ – пространство Соболева функций из $L^2(\partial M)$ на C^2 -гладкой границе ∂M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $f, g \in W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ для C^2 -гладких границ $\partial(\Omega \setminus B)$. Если $\alpha \geq 0$, то задача Дирихле–Робина (1.4) имеет единственное (гармоническое) решение в области $\Omega \setminus \bar{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. О существовании решения можно прочесть в монографии [12]. Чтобы доказать единственность, рассмотрим задачу (1.4) при $f = 0$ и $g = 0$. Тогда по теореме Гаусса–Остроградского получаем, что для соответствующего решения u выполнено

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \bar{B}} dp (\nabla \overline{u(p)} \cdot \nabla u)(p) &= \int_{\Omega \setminus \bar{B}} dp \operatorname{div}(\overline{u(p)}(\nabla u)(p)) = \\ &= \int_{\partial B} d\sigma(\omega) \overline{u(\omega)}(\partial_\nu u)(\omega) = -\alpha \int_{\partial B} d\sigma(\omega) |u(\omega)|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из оценки (2.2) следует, что $u(x \in \Omega \setminus \bar{B}) = \operatorname{const}$. Поэтому в силу граничного условия Робина получаем $(\alpha u)|_{\partial B}(\omega) = 0$, а в силу равенства $u|_{\partial\Omega}(p) = f(x \in \partial\Omega) = 0$ получаем, что при $\alpha \geq 0$ гармоническая функция $u(p) = 0$, если $p \in \Omega \setminus \bar{B}$. ■

Следующее утверждение является ключевым при анализе обратных геометрических задач 1 и 2. Поскольку ниже мы используем его в случае пространства $\mathbb{R}^2$, мы приводим формулировку в двумерном случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Рассмотрим две задачи (1.4), соответствующие ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$ и двумя подмножествами B_1 и B_2 с C^2 -гладкостью границ ∂B_1 и ∂B_2 . Если для решений $u_{f,g}^{(1)}$ и $u_{f,g}^{(2)}$ этих задач выполнено равенство

$$\partial_\nu u_{f,g}^{(1)}|_{\partial\Omega} = \partial_\nu u_{f,g}^{(2)}|_{\partial\Omega}, \quad (2.3)$$

то $\partial B_1 = \partial B_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу $u_{f,g}^{(1)}|_{\partial\Omega} = u_{f,g}^{(2)}|_{\partial\Omega} = f$ и условия (2.3) задача (1.4) имеет два решения при совпадающих внешних (на $\partial\Omega$) и внутренних (на ∂B_1 и ∂B_2) граничных условиях Робина. Тогда, применяя стандартные аргументы, основанные на теореме единственности Хольмгрена [14] для гармонических функций на $\mathbb{R}^2$, получаем, что $\partial B_1 = \partial B_2$. ■

2.2. В завершение данного раздела приведем простой пример явного решения обратных задач 1 и 2 в одномерном случае. Имея в виду в качестве мотивировки задачу о лапласовском переносе (1.3), рассмотрим случай, когда $f = c_0$, $g = \alpha c^*$ и $\alpha = W/D \geq 0$, где $\Omega := (-R, R) \subset \mathbb{R}^1$ и $B := (a, b)$:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad x \in (-R, R) \setminus [a, b], \\ u|_{\partial\Omega}(x)|_{x=\mp R} &= c_0, \\ (\alpha u + \partial_\nu u)|_{\partial[a,b]}(a) &= (\alpha u + \partial_\nu u)|_{\partial[a,b]}(b) = \alpha c^*, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $R > 0$ и $-R < a < b < R$.

Решение задачи 1 следует немедленно, поскольку в одномерном случае форма поглощающей клетки тривиальна: она представляет собой интервал $B := (a, b)$.

Заметим теперь, что общее решение задачи (2.4) является комбинацией линейных функций с носителем в области $\Omega := (-R, R) \setminus [a, b]$ и постоянной функции c^* на интервале $[a, b]$:

$$\begin{aligned} -R < x < a: \quad u(x) &= -\frac{c_0 - c^*}{(R + a) + \alpha^{-1}}(R + x) + c_0, \\ a \leq x \leq b: \quad u(x) &= c^*, \\ b < x < R: \quad u(x) &= -\frac{c_0 - c^*}{(R - b) + \alpha^{-1}}(R - x) + c_0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При фиксированных данных Дирихле c_0 на границе $\partial\Omega$ и измеренных на этой границе данных Неймана, т. е. токов

$$\begin{aligned} j_- &:= -\partial_\nu u|_{\partial\Omega}(x)|_{x=-R} = \frac{c_0 - c^*}{(R + a) + \alpha^{-1}}, \\ j_+ &:= -\partial_\nu u|_{\partial\Omega}(x)|_{x=+R} = -\frac{c_0 - c^*}{(R - b) + \alpha^{-1}}, \end{aligned}$$

можно явно решить обе задачи 1 и 2.

В одномерном случае форма клетки определяется ее размером $b - a$, тогда как положение фиксируется точками

$$a = \frac{c_0 - c^*}{j_-} - R - \alpha^{-1}, \quad b = \frac{c_0 - c^*}{j_+} + R + \alpha^{-1}.$$

3. ДВУМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА: КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ И ФОРМА ГРАНИЦЫ ∂B

3.1. Актуальность конформных отображений в изучении граничных задач для гармонических функций (решений уравнения Лапласа) хорошо известна (см., например, [15], гл. III или [16], гл. 13).

Напомним, что если комплексная функция $w: z \mapsto \mathbb{C}$ голоморфна в открытой области $\{\Omega \subset \mathbb{C}: z = x + iy \in \Omega\}$, то согласно условиям Коши–Римана функции $u(x, y) := (\operatorname{Re} w)(x, y)$ и $v(x, y) := (\operatorname{Im} w)(x, y)$ являются гармоническими в Ω . Здесь $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Имеется элементарная обратная задача комплексного анализа: по заданной гармонической функции $u(x, y)$ в Ω построить в этой области гармоническую функцию $v(x, y)$ (гармонически сопряженную к функции u) такую, что комплексная функция $w = u + iv$ является голоморфной. В действительности гармонически сопряженная функция может быть найдена из условий Коши–Римана

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v, \quad (3.1)$$

поскольку при заданной функции u здесь написана система дифференциальных уравнений в частных производных для функции v . Заметим, что для односвязной области Ω решение этой системы всегда существует и является единственной (с точностью до константы) однозначной функцией, тогда как в неодносвязных областях гармонически сопряженная функция может оказаться неоднозначной. С другой

стороны, в любом односвязном подмножестве $\Omega_0 \subset \Omega$ можно выбрать однозначную ветвь этой функции. Все это означает выбор однозначной ветви полной комплексной функции w .

Применение конформных отображений к анализу гармонических функций и уравнению Лапласа основано на следующих хорошо известных наблюдениях [15], [16].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\zeta: z \mapsto \zeta(z)$ – конформное отображение $\zeta(z): N \rightarrow M$ посредством голоморфной функции $\zeta(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$. Если функция $\tilde{u}(\xi, \eta)$ является гармонической в M , то композиция

$$u(x, y) := (\tilde{u} \circ \zeta)(x, y) = \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y)) \quad (3.2)$$

является гармонической функцией переменных x, y из N .

В частности, имеем

$$(\Delta_z u)(x, y) = |\partial_z \zeta(z)|^2 (\Delta_\zeta \tilde{u})(\xi(x, y), \eta(x, y)). \quad (3.3)$$

(Здесь явно различаются лапласианы в различных координатах: $\Delta_z := \partial_x^2 + \partial_y^2$ и $\Delta_\zeta := \partial_\xi^2 + \partial_\eta^2$, но ниже мы опускаем эти индексы, поскольку это не приводит к недоразумениям.) Заметим, что формула (3.3) основана лишь на непосредственном применении условий Коши–Римана для отображения $\zeta(z)$, т. е. не предполагает существования гармонически сопряженной функции ни для $\tilde{u}$, ни для u . Тем не менее для односвязной области $N_0 \subset N$ можно показать, что каждая гармоническая функция является вещественной частью некоторой ветви голоморфной в N_0 функции.

Еще одно наблюдение связано с формализмом Дирихле–Неймана и ясно иллюстрирует важность понятия *гармонически сопряженной функции* (см. [15], гл. III).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть Ω – открытая односвязная ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда задача Неймана

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & p &\in \Omega \setminus \bar{B}, \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega}(p) &= g(p), & p &\in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.4)$$

редуцируется к задаче Дирихле для функции v , которая является гармонически сопряженной к функции u .

Чтобы сделать это очевидным, заметим прежде всего, что нормальная производная здесь определена в смысле (2.1). Пусть граница $\partial\Omega$ параметризована натуральным параметром τ – длиной дуги $\partial\Omega = \{\Gamma(\tau) \in \mathbb{C}\}_{\tau \in [0, l]}$. Тогда из условий Коши–Римана (3.1) следует, что

$$\partial_\tau v|_{\partial\Omega}(p) = \partial_\nu u|_{\partial\Omega}(p) = g(p). \quad (3.5)$$

Поскольку интегрирование по контуру Γ дает

$$v(p_1) = v(p_0) + \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \partial_\tau v(\Gamma(\tau)) = v(p_0) + \int_{\tau_0}^{\tau_1} ds g(\Gamma(\tau)) =: f(p_1),$$

задача (3.4) эквивалентна задаче Дирихле для функции v с граничным условием f .

3.2. Чтобы очертить основные шаги по восстановлению неизвестной границы ∂B , рассмотрим сначала задачу (1.4) для случая Дирихле $\alpha = +\infty$:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & p &\in \Omega \setminus \bar{B}, \\ u|_{\partial\Omega}(p) &= f(p), & p &\in \partial\Omega, \\ u|_{\partial B}(\omega) &= 0, & \omega &\in \partial B. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Хорошо известно, что двусвязная ограниченная область $\Omega \setminus \bar{B}$ комплексной плоскости является образом кольца

$$A_B := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \rho_B < |z| < 1\} \quad (3.7)$$

при конформном отображении, задаваемом взаимно однозначной голоморфной функцией $\zeta(z)$. Эта функция отображает границы в границы: $\zeta : C_{\rho_B} \rightarrow \partial B$ и $\zeta : C_{r=1} \rightarrow \partial\Omega$.

1. Первый шаг состоит в нахождении следа $\zeta|_{C_1}$ неизвестной функции $\zeta(z)$ на внешней единичной окружности $C_{r=1}$.

2. Следующий шаг состоит в восстановлении функции $\zeta(z)$ во всем кольце A_B , что дает решение геометрической обратной задачи (задача 1 в п. 1.2), поскольку граница ∂B является пределом ζ изнутри кольца: $\partial B = \{\zeta(z)\}_{|z \rightarrow C_{\rho_B}} := \zeta(C_{\rho_B})$.

Пусть внешняя граница в задаче (3.6) параметризована натуральным параметром τ — длиной дуги: $\partial\Omega = \{\Gamma(\tau) \in \mathbb{C}\}_{\tau \in [0, l]}$. Тогда след конформного отображения $\zeta : C_1 \rightarrow \partial\Omega$ посредством уравнения

$$\zeta(e^{i\phi}) = \Gamma(\tau), \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad (3.8)$$

с условием $\zeta(e^{i\phi})|_{\phi=0} = \Gamma(0)$ определяет взаимно однозначную функцию $\phi : \tau \mapsto \phi(\tau) \in [0, 2\pi)$.

Поэтому вычисление следа функции $\zeta(z)$ на внешней единичной окружности $C_{r=1}$ эквивалентно нахождению решения $\phi(\tau)$ уравнения (3.8) или соответствующей обратной функции $\tau(\phi)$.

Для этого предположим, что u_f — решение задачи (3.6). Тогда согласно предложению 3 функция $\tilde{u}_{\tilde{f}} := u_f \circ \zeta$ является гармонической в кольце A_B и представляет собой решение задачи Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} &= 0, & p &\in A_B, \\ \tilde{u}|_{C_1}(p) &= \tilde{f}(p), & p &\in C_1, \\ \tilde{u}|_{C_{\rho_B}}(\omega) &= 0, & \omega &\in C_{\rho_B}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\tilde{f}(p) = (f \circ \zeta)(p) = f(\zeta(p)) = f(\xi(x, y), \eta(x, y))$ и $p = (x, y) \in C_1$.

Рассмотрим решение u_f задачи Дирихле (3.6). Тогда оператор Дирихле–Неймана $\Lambda_{\partial\Omega}$ для внешней границы $\partial\Omega$ определяется аналогично (1.5):

$$\Lambda_{\partial\Omega} f = \partial_\nu u_f|_{\partial\Omega}. \quad (3.10)$$

Пусть v_f — гармонически сопряженная функция к u_f . Тогда в силу (3.5) получаем, что для внешней границы $\partial\Omega$

$$\partial_\tau v_f|_{\partial\Omega}(\tau) = \partial_\tau v_f(\Gamma(\tau)) = \partial_\nu u_f(\Gamma(\tau)) = (\Lambda_{\partial\Omega} f)(\Gamma(\tau)) =$$

$$= (\Lambda_{\partial\Omega} f)(\zeta(e^{i\phi(\tau)})) = (\Lambda_{\partial\Omega} f \circ \zeta)(e^{i\phi(\tau)}). \quad (3.11)$$

С использованием конформного отображения ζ можно переписать (3.11) в виде

$$\partial_\tau v_f(\Gamma(\tau)) = \partial_\tau v_f(\zeta(e^{i\phi(\tau)})) = \partial_\phi(v_f \circ \zeta)(e^{i\phi(\tau)}) \partial_\tau \phi(\tau). \quad (3.12)$$

Поскольку $\tilde{u}_{\tilde{f}} := u_f \circ \zeta$ и $\tilde{v}_{\tilde{f}} := v_f \circ \zeta$ (см. (3.9)), в силу (3.5) получаем

$$\partial_\phi(v_f \circ \zeta)(e^{i\phi}) = \partial_\phi \tilde{v}_{\tilde{f}}(\phi) = \partial_\nu \tilde{u}_{\tilde{f}}|_{C_1}(\phi) = \Lambda_{C_1}(f \circ \zeta)(e^{i\phi}), \quad (3.13)$$

где используется обычное соглашение о нормальной производной $\partial_\nu(\cdot)|_{C_1}$ на единичной окружности C_1 . Здесь $\Lambda_{C_1}: \tilde{f} \mapsto \partial_\nu \tilde{u}_{\tilde{f}}|_{C_1}$ – оператор Дирихле–Неймана, соответствующий задаче (3.9).

Соотношения (3.11)–(3.13) приводят к дифференциальному уравнению для $\phi = \phi(\tau)$:

$$\partial_\tau \phi = \frac{(\Lambda_{\partial\Omega} f \circ \zeta)(e^{i\phi})}{\Lambda_{C_1}(f \circ \zeta)(e^{i\phi})}. \quad (3.14)$$

При заданной границе Γ решение $\phi(\tau)$ уравнения (3.14) задает след функции $\zeta(z)$ на окружности C_1 . Действительно, в силу (3.8) получаем, что на C_1 он определен посредством

$$\zeta(e^{i\phi}) = \Gamma(\tau(\phi)), \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad (3.15)$$

где $\tau(\phi)$ – функция, обратная к $\phi(\tau)$.

3.3. Таким образом, для фиксированной границы Γ в принципе можно найти след $\zeta(z)|_{C_1}$, используя описанную выше схему. Для этого пусть $\tilde{f} \in W_2^1(C_1)$, где мы отождествляем C_1 с $[0, 2\pi]$ (см. задачу (3.9)). Тогда решение этой задачи принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\tilde{f}}(\rho, \phi) &= a_0 \ln \rho + b_0 + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n \rho^n + b_n \rho^{-n}) \cos n\phi + (c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}) \sin n\phi]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Коэффициенты в разложении (3.16) равны

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\tilde{f}_{1,n}}{1 - \rho_B^{2n}}, & b_n &= -\frac{\rho_B^{2n} \tilde{f}_{1,n}}{1 - \rho_B^{2n}}, & a_0 &= -\frac{\tilde{f}_{1,0}}{\ln \rho_B}, & b_0 &= \tilde{f}_{1,0}, \\ c_n &= \frac{\tilde{f}_{2,n}}{1 - \rho_B^{2n}}, & d_n &= -\frac{\rho_B^{2n} \tilde{f}_{2,n}}{1 - \rho_B^{2n}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Они связаны с коэффициентами ряда Фурье для $\tilde{f}(\phi)$:

$$\tilde{f}_{1,0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \tilde{f}(\phi), \quad \tilde{f}_{1,n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \tilde{f}(\phi) \cos n\phi, \quad \tilde{f}_{2,n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \tilde{f}(\phi) \sin n\phi.$$

Тогда соответствующий оператор Дирихле–Неймана (3.13) действует как ограниченный оператор из $W_2^1(C_1)$ в $L^2(C_1)$:

$$\Lambda_{C_1} \tilde{f}(\phi) = \partial_\nu \tilde{u}_{\tilde{f}}|_{C_1}(\phi) =$$

$$= -\frac{\tilde{f}_{1,0}}{\ln \rho_B} + \sum_{n=1}^{\infty} n[(a_n - b_n) \cos n\phi + (c_n - d_n) \sin n\phi]. \quad (3.18)$$

В силу (3.13) и (3.18) получаем тождество

$$\int_0^{2\pi} d\phi \Lambda_{C_1} \tilde{f}(\phi) = -\frac{1}{\ln \rho_B} \int_0^{2\pi} d\phi \tilde{f}(\phi),$$

из которого с учетом (3.11)–(3.13) следует, что радиус внутренней окружности определяется как

$$\begin{aligned} \rho_B &= \exp \left\{ - \left(\int_0^{2\pi} d\phi (f \circ \zeta)(e^{i\phi}) \right) \left(\int_{\partial\Omega} d\tau \partial_\tau \phi(\tau) \partial_\phi (v_f \circ \zeta)(e^{i\phi(\tau)}) \right)^{-1} \right\} = \\ &= \exp \left\{ - \left(\int_0^{2\pi} d\phi (f \circ \zeta)(e^{i\phi}) \right) \left(\int_{\partial\Omega} d\tau \partial_\nu u_f(\Gamma(\tau)) \right)^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Соотношение (3.19) позволяет вычислить ρ_B , если известен след $\zeta(z)|_{C_1}$, но поскольку в силу (3.15) мы имеем $\zeta(e^{i\phi(\tau)}) = \Gamma(\tau)$, то первое уравнение, подлежащее решению, есть (3.14). Заметим, что по определению $\partial\Omega = \{\Gamma(\tau) \in \mathbb{C}\}_{\tau \in [0, l]}$, и в силу (3.8) и (3.14) мы получаем связь

$$l = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\Lambda_{C_{\rho_B}, C_1}(f \circ \zeta)(e^{i\phi})}{(\Lambda_{\partial B, \partial\Omega} f \circ \zeta)(e^{i\phi})}, \quad (3.20)$$

а также видим, что решение $\tau(\phi)$ уравнения (3.14) должно быть 2π -периодической функцией переменной ϕ . Здесь мы явно напоминаем зависимость от внутренней границы для обоих операторов Дирихле–Неймана: $\Lambda_{C_1} = \Lambda_{C_{\rho_B}, C_{\rho=1}}$ и $\Lambda_{\partial\Omega} = \Lambda_{\partial B, \partial\Omega}$.

ПРИМЕР 1. Проиллюстрируем сказанное тривиальным примером круглой поглощающей клетки Дирихле. Пусть границы $\partial\Omega = C_R$ и $\partial B = C_{r_B}$ представляют собой две концентрические окружности радиуса r_B , который является единственным неизвестным параметром, подлежащим определению как решение обратной геометрической задачи.

В рамках нашей схемы область $\Omega \setminus \overline{B}$ является образом кольца (3.7) при конформном отображении, определяемом взаимно однозначной голоморфной функцией $\zeta(z)$. Эта функция отображает границы в границы: $\zeta: C_{\rho_B} \rightarrow \partial B$ и $\zeta: C_{r=1} \rightarrow \partial\Omega$.

В силу вращательной симметрии можно попробовать решить эту задачу для ∂B через (3.6) с граничным условием $u|_{\partial\Omega}(p) = f$, не зависящим от $\arg(p)$. Тогда решение прямой задачи (3.6) соответствует (3.16) при $n = 0$: $u_f(\rho, \phi) = a \ln \rho + b$ при $r_B < \rho < R$. С учетом граничных условий находим коэффициенты a и b и явный вид соответствующего оператора Дирихле–Неймана:

$$\Lambda_{\partial B, \partial\Omega}: f \mapsto \partial_\nu u_f|_{C_R} = \frac{1}{R(\ln R - \ln r_B)} f. \quad (3.21)$$

Заметим, что данный пример настолько прост, что одного измерения пары напряжение–ток $\{f, j := \Lambda_{\partial B, \partial\Omega} f\}$ достаточно для того, чтобы единственным образом определить оператор $\Lambda_{\partial B, \partial\Omega}$, который решает задачу о нахождении r_B явно.

Поскольку конформное отображение дает для внешних границ $\zeta(e^{i\phi}) = Re^{i\phi}$, для $p \in C_1$ (след $\zeta|_{C_1}$) получаем $f(p) := (f \circ \zeta)(p) = f(\zeta(e^{i\phi})) = f(Re^{i\phi}) = f$. Тогда в силу (3.16) оператор Дирихле–Неймана для задачи (3.9) имеет вид

$$\Lambda_{C_{\rho_B}, C_{\rho=1}} : \tilde{f} \mapsto \partial_\nu \tilde{u}_{\tilde{f}}|_{C_1} = -\frac{1}{\ln \rho_B} \tilde{f}. \quad (3.22)$$

Благодаря (3.21) мы получаем числитель в (3.14) в виде

$$(\Lambda_{\partial B, \partial \Omega} f \circ \zeta) = \frac{1}{R(\ln R - \ln r_B)} f \circ \zeta = \left\{ R \ln \frac{R}{r_B} \right\}^{-1} \tilde{f}, \quad (3.23)$$

а в силу (3.22) находим знаменатель в (3.14):

$$\Lambda_{C_{\rho_B}, C_{\rho=1}}(f \circ \zeta) = -\frac{1}{\ln \rho_B} \tilde{f}. \quad (3.24)$$

Подставляя (3.23) и (3.24) в (3.19) (или в (3.20), где $l = 2\pi R$), получаем, что $\rho_B = r_B/R$, т. е. для внутренних границ конформное отображение дает $\zeta(\rho_B e^{i\phi}) = r_B e^{i\phi} = R \rho_B e^{i\phi}$. Отсюда следует, что отображение есть $\zeta(z) = Rz$ (см. шаг 2 в п. 3.2), а также вытекает очевидный окончательный результат, касающийся вида границы ∂B и следа функции $\zeta(z)$ на C_{ρ_B} .

3.4. Приведенный пример показывает, что $\tau(\phi)$ является 2π -периодическим продолжением линейной функции

$$\tau_0(\phi) := \frac{l}{2\pi} \phi, \quad \phi \in [0, 2\pi). \quad (3.25)$$

Причина состоит в простом линейном виде соответствующего конформного отображения. Любое отклонение от концентрических областей $\partial \Omega = C_R$ и $\partial B = C_{r_B}$ приведет к тому, что функция $\tau(\phi)$ станет нелинейной, но будет подчиняться условию (3.20).

В качестве менее тривиального применения представленной выше схемы рассмотрим неконцентрические области $\partial \Omega = C_R$ и $\partial B = C_{r_B}$. В таком случае конформное отображение ζ известно априори – это преобразование Мёбиуса, и можно действовать далее с этой пробной функцией ζ в том же духе, что и в примере 1 (см. [17]). Впрочем, иллюстрация решения обратной геометрической задачи требует полномасштабного применения изложенного выше формализма, поскольку теперь приходится решать два связанных уравнения (3.14) и (3.19) с условием (3.20).

Перепишем эти уравнения (включая связь (3.20)) в виде

$$\rho_B = \exp \left\{ - \left(\int_0^{2\pi} d\phi (f \circ \zeta)(e^{i\phi}) \right) \left(\int_{\partial \Omega} d\tau \partial_\nu u_f(\Gamma(\tau)) \right)^{-1} \right\}, \quad (3.26)$$

$$\partial_\phi \tau = \frac{l}{2\pi} + \frac{\Lambda_{C_{\rho_B}, C_1}(f \circ \zeta)}{(\Lambda_{\partial B, \partial \Omega} f \circ \zeta)} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\Lambda_{C_{\rho_B}, C_1}(f \circ \zeta)(e^{i\phi})}{(\Lambda_{\partial B, \partial \Omega} f \circ \zeta)(e^{i\phi})}. \quad (3.27)$$

Заметим, что в силу (3.23) и (3.24) для концентрических областей $\partial \Omega = C_R$ и $\partial B = C_{r_B}$ последние два члена в (3.27) сокращаются. Поэтому можно рассматривать этот случай как приближение нулевого порядка $\tau = \tau_0(\phi)$ к решению уравнения (3.27) при $\zeta = \zeta_0(z) := z$ и $\rho_B = \rho_0 := r_B/R$. Это наблюдение побуждает нас рассмотреть

уравнения (3.26) и (3.27), вместе с соотношениями $\zeta_n(e^{i\phi}) = \Gamma(\tau_n(\phi))$ (см. (3.15)), как нелинейную итерационную схему для получения ρ_B и функции $\tau(\phi)$ (или $\zeta(z)$) [10]:

$$\rho_n = \exp \left\{ - \left[\int_0^{2\pi} d\phi (f \circ \zeta_n)(e^{i\phi}) \right] \left[\int_{\partial\Omega} d\tau \partial_\nu u_f(\Gamma(\tau)) \right]^{-1} \right\}, \quad (3.28)$$

$$\partial_\phi \tau_{n+1} = \frac{l}{2\pi} + \frac{\Lambda_{C_{\rho_n}, C_1}(f \circ \zeta_n)}{(\Lambda_{\partial B, \partial\Omega} f \circ \zeta_n)} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\Lambda_{C_{\rho_n}, C_1}(f \circ \zeta_n)(e^{i\phi})}{(\Lambda_{\partial B, \partial\Omega} f \circ \zeta_n)(e^{i\phi})}, \quad (3.29)$$

$$\zeta_n(e^{i\phi}) = \Gamma(\tau_n(\phi)). \quad (3.30)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предположим, что при $n \rightarrow \infty$ итерации сходятся: $\rho_n \rightarrow \rho_B$, $\tau_n(\phi) \rightarrow \tau(\phi)$ и для заданной Γ : $\zeta_n(z) \rightarrow \zeta(z)$. Тогда функцию $\Gamma(\tau(\phi))$ можно представить в виде ряда Фурье:

$$\Gamma(\tau(\phi)) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \gamma_s e^{is\phi}. \quad (3.31)$$

Поскольку $\Gamma(\tau(\phi))$ – образ внешней границы C_1 , полученный при помощи искомой функции $\zeta(z)$, то коэффициенты γ_s такие же, как и в ряде Лорана для этой функции в кольце A_B :

$$\zeta(z) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \gamma_s z^s. \quad (3.32)$$

Теперь окончательный шаг состоит в том, чтобы заметить, что неизвестная внутренняя граница ∂B совпадает с конформным образом $\{\Gamma_{\partial B}(\phi)\}_{0 \leq \phi < 2\pi} = \zeta(C_{\rho_B})$ внутренней A_B -окружности C_{ρ_B} с радиусом $\rho_B < 1$, вычисляемым посредством итераций (3.28):

$$\Gamma_{\partial B}(\phi) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} (\rho_B)^s \gamma_s e^{is\phi}. \quad (3.33)$$

Соотношение (3.33) формально решает обратную геометрическую задачу для граничных условий Дирихле на неизвестном контуре $\partial B = \{\Gamma_{\partial B}(\phi)\}_{0 \leq \phi < 2\pi}$.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

4.1. Пусть $\alpha = 0$, т.е. примем граничные условия Неймана на поглощающей клетке ∂B (см. (1.4)). Тогда задача (3.6) преобразуется в задачу

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & p &\in \Omega \setminus \overline{B}, \\ u|_{\partial\Omega}(p) &= f(p), & p &\in \partial\Omega, \\ \partial_\nu u|_{\partial B}(\omega) &= g(\omega), & \omega &\in \partial B. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Чтобы отобразить область $\Omega \setminus \overline{B}$ на кольцо (3.7), используем ту же голоморфную функцию $\zeta(z)$. Поскольку конформные отображения сохраняют углы, соответствующая задача принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} &= 0, & p &\in A_B, \\ \tilde{u}|_{C_1}(p) &= \tilde{f}(p), & p &\in C_1, \\ \partial_\nu \tilde{u}|_{C_{\rho_B}}(\omega) &= |\partial_z \zeta(\omega)| \tilde{g}(\omega), & \omega &\in C_{\rho_B}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь $\partial_\nu(\cdot)|_{C_{\rho_B}}$ – внешняя *нормальная* производная в точке $\omega \in C_{\rho_B} = \zeta(\partial B)$ со значением, пропорциональным $\tilde{g}(\omega) = (g \circ \zeta)(\omega)$.

Ясно, что нашу схему следует теперь значительно модифицировать (упростить), поскольку реальные граничные условия зависят от неизвестного конформного отображения ζ . Заметим, что предложение 4 не помогает в плане редукции граничных условий Неймана к условиям Дирихле, поскольку наша область не является односвязной. Внешние данные для решения обратной геометрической задачи отвечают $\tilde{f}(p)$. Итак, мы предпочитаем упростить условия на поверхности клетки ∂B и положить $g = 0$, за счет чего исключается появление зависимости граничного условия Неймана от производной $\partial_z \zeta$.

4.2. Рассмотрим задачу (4.2) при $\tilde{g} = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} &= 0, & p &\in A_B, \\ \tilde{u}|_{C_1}(p) &= \tilde{f}(p), & p &\in C_1, \\ \partial_\nu \tilde{u}|_{C_{\rho_B}}(\omega) &= 0, & \omega &\in C_{\rho_B}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

ПРИМЕР 2. Как и выше (см. пример 1), сначала проиллюстрируем возможный способ действий для решения задачи (4.3) простым примером круглой поглощающей клетки Неймана.

Пусть границы $\partial\Omega = C_R$ и $\partial B = C_{r_B}$ представляют собой две концентрические окружности, где радиус r_B является единственным неизвестным параметром, подлежащим определению как решение обратной геометрической задачи. Далее, поскольку $\zeta: C_{\rho_B} \rightarrow \partial B = C_{r_B}$ и $\zeta: C_{r=1} \rightarrow \partial\Omega = C_R$, находим, что это конформное отображение совпадает с тем же линейным отображением $\zeta(z) = Rz$, что и в примере 1, т. е. $\rho_B = r_B/R$.

Заметим, что из постоянного внешнего условия $\tilde{f}(p) = (f \circ \zeta)(p) = f(Re^{i\phi}) = f$, $p \in C_1$, следует тривиальное постоянное решение $u_f = \tilde{u}_f = f$. Поэтому рассмотрим одномодовое граничное условие, определенное посредством $\tilde{f}(e^{i\phi}) = (f \circ \zeta)(e^{i\phi}) = f(Re^{i\phi}) = a(\phi) := f \cos \phi$. Тогда на основе общего решения (3.16) в кольце получаем оператор Дирихле–Неймана (4.1) при $g = 0$:

$$\Lambda_{\partial B, \partial\Omega}: f(\phi) \mapsto \partial_\nu u_f|_{C_R} = \frac{R^2 - r_B^2}{R(R^2 + r_B^2)} f(\phi). \quad (4.4)$$

Аналогичным образом получаем для задачи (4.3)

$$\Lambda_{C_{\rho_B}, C_{\rho=1}}: f(\phi) \mapsto \partial_\nu \tilde{u}_f|_{C_1} = \frac{1 - \rho_B^2}{1 + \rho_B^2} f(\phi). \quad (4.5)$$

Поскольку $\rho_B = r_B/R$, из (4.4) и (4.5) следует, что соотношения (3.19) и (3.20), где $l = 2\pi R$, верны для решения (3.25).

Этот пример показывает, что, следуя аргументам из п. 3.4, мы получаем ту же самую итерационную схему (3.28)–(3.30), но с операторами Дирихле–Неймана, которые определяются задачами Неймана (4.1) и (4.3). Пример 2 дает приближение нулевого порядка к полному решению.

4.3. Напомним, что наша цель состояла в получении формального решения некоторых двумерных обратных геометрических задач (см., например, замечание 2). Поскольку ошибка в вычислениях коэффициентов $\{\gamma_s\}_{s \in \mathbb{Z}}$ (см. (3.31)) может экспоненциально усиливаться в выражении (3.33) для границы ∂B , ясно, что задача является некорректно поставленной и требует дальнейшего анализа. Мы планируем вернуться к численным реализациям данной формальной итерационной схемы в другой работе, для чего потребуются исследование различных регуляризаций, а также их возможных обобщений на граничные условия Робина.

Благодарности. Авторы благодарны Н.М. Плакиде и Ю.Г. Рудому за приглашение представить данную работу в специальный выпуск ТМФ, посвященный профессору С.В. Тябликову.

Список литературы

- [1] J. Lee, G. Uhlmann, *Comm. Pure Appl. Math.*, **42**:8 (1989), 1097–1112.
- [2] D. C. Barber, B. H. Brown, *J. Phys. E*, **17**:9 (1984), 723–733.
- [3] M. E. Taylor, *Pseudodifferential Operators*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1996.
- [4] A. Greenleaf, G. Uhlmann, *Duke Math. J.*, **108** (2001), 559–617.
- [5] V. A. Zagrebnov, *J. Math. Phys. Anal. Geom.*, **4**:4 (2008), 551–568.
- [6] B. Sapoval, *Phys. Rev. Lett.*, **73**:24 (1994), 3314–3316.
- [7] D. S. Grebenkov, M. Filoche, B. Sapoval, *Phys. Rev. E*, **73**:2 (2006), 021103, 9 pp.
- [8] O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, Dover, New York, 1954.
- [9] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1979.
- [10] Jiaqi Liu, Yingwei Lu, “A new algorithm for solving the geometrical inverse problems for a partial differential equation and its numerical semulation”, *Proceedings of XI IMACS World Congress on System Simulation and Scientific Computation* (Oslo, Norway, 5–9 August 1985), eds. B. Wahlstrom et al., Moberg & Helli A/S, Oslo, Norway, 1985, 221–224.
- [11] A. G. Ramm, *Inverse Probl.*, **2**:2 (1986), L19–L21.
- [12] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations II: Qualitative Studies of Linear Equations*, Appl. Math. Sci., **116**, Springer, New York, 1996.
- [13] J. K. Hunter, B. Nachtergaele, *Applied Analysis*, World Scientific, Singapore, 2001.
- [14] D. Tataru, *Commun. Partial Differ. Equations*, **20**:5–6 (1995), 855–884.
- [15] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, М., 1987.
- [16] С. Г. Михлин, *Курс математической физики*, Наука, М., 1968.
- [17] I. Baydoun, V. A. Zagrebnov, *Localisation of absorbing cells*, Preprint Centre de Physique Théorique – HAL (2011), Centre de Physique Théorique UMR 6207, Marseille, 2011.

Поступила в редакцию 15.03.2011