Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Ташпулатов, О спектрах и связанных состояниях оператора энергии двух-магнонных систем в негейзенберговском ферромагнетике спина единица со взаимодействием ближайших соседей, *ТМФ*, 2000, том 125, номер 2, 282–296

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf669>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 04:15:48

© 2000 г.

С. М. Ташпулатов*

**О СПЕКТРАХ И СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ
ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ДВУХМАГНОННЫХ
СИСТЕМ В НЕГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОМ
ФЕРРОМАГНЕТИКЕ СПИНА ЕДИНИЦА
СО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ**

Рассматривается оператор энергии двухмагнонных систем в негейзенберговском ферромагнетике со взаимодействием ближайших соседей и значением спина $s = 1$. Изучаются спектр и связанные состояния систем в ν -мерной решетке.

Двухмагнонные системы уже давно привлекают внимание многих исследователей. Впервые такие системы, по-видимому, были рассмотрены в одномерных целочисленных решетках в работе Бете [1]. Бете доказал, что в этом случае существует не более одного связанного состояния (СС) системы.

В работе [2] также рассматривалась двухмагнонная система в одномерном случае и были подтверждены результаты Бете.

Уортис [3] рассмотрел двухмагнонную систему на d -мерной целочисленной решетке для произвольного d . Он доказал, что в этом случае система имеет $0, 1, 2, \dots, d$ СС.

Маямдар [4] изучал двухмагнонную систему на одномерной целочисленной решетке уже со взаимодействием ближайших и вторых соседей для значения полного квазиимпульса $\Lambda = \pi$ и численно нашел спектр и СС системы.

В работе [5] такая система была рассмотрена в одномерном ферромагнетике Гейзенберга со взаимодействием ближайших и вторых соседей уже для значений $\Lambda = \pi$ и $\Lambda = \pi/2$. Авторы статьи [5] изучили спектр и СС системы для этих значений Λ с помощью численных методов.

Гочев рассмотрел двухмагнонную систему в одномерном ферромагнетике Гейзенберга со взаимодействием ближайших и вторых соседей для всех значений полного квазиимпульса системы [6]. Он доказал, что при $\Lambda = \pi$ система имеет единственное СС ниже области непрерывного спектра для значений $\alpha < 1/2$, а при $\alpha \geq 1/2$ такое СС исчезает (α ($0 \leq \alpha \leq 1$) – отношение параметра обменного билинейного взаимодействия для

*Институт ядерной физики Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, пос. Улугбек, Республика Узбекистан. E-mail: root@Suninp.tashkent.su

вторых соседей к параметру обменного билинейного взаимодействия для ближайших соседей). Кроме того, при $\Lambda = \pi/2$ существует единственное СС системы для всех значений α , лежащих ниже области непрерывного спектра, а при $\Lambda = 0$ СС системы отсутствует. Для остальных же значений Λ ($-\pi < \Lambda < \pi$) установлено, что существует такое α , обозначаемое $\alpha_{кр}$, что при фиксированном полном квазиимпульсе Λ и $0 < \alpha < \alpha_{кр}$ в системе существует единственное СС, а при $\alpha \geq \alpha_{кр}$ оно исчезает.

Двухмагнитные системы в анизотропной модели Гейзенберга со взаимодействием ближайших соседей были рассмотрены в работе [7].

В работе автора [8] двухмагнитная система рассматривалась в одномерном анизотропном ферромагнетике Гейзенберга со взаимодействием ближайших и вторых соседей и были изучены спектр и СС этой системы для всех значений полного квазиимпульса.

В работах [9–11] рассматривалась двухмагнитная система в одномерном изотропном и анизотропном ферромагнетиках Гейзенберга со взаимодействием ближайших, вторых и третьих соседей для значений полного квазиимпульса $\Lambda = \pi$. Изучены спектр и СС системы, найдены условия существования СС системы.

В теоретических исследованиях магнитоупорядоченных веществ обычно исходили из гейзенберговского обменного гамильтониана (для произвольного значения спина s)

$$H = J \sum_{m,\tau} (\mathbf{S}_m \mathbf{S}_{m+\tau}), \quad (1)$$

где J – параметр билинейного обменного взаимодействия между атомами ближайших соседей, $\mathbf{S}_m = (S_m^x; S_m^y; S_m^z)$ – оператор атомного спина узла m ν -мерной целочисленной решетки Z^ν , а τ означает суммирование по ближайшим соседям.

В действительности же для произвольного значения спина s изотропный спиновый обменный гамильтониан имеет вид [12]

$$H = \sum_{m,\tau} \sum_{n=1}^{2s} J_n (\mathbf{S}_m \mathbf{S}_{m+\tau})^n, \quad (2)$$

где J_n – параметры мультипольных обменных взаимодействий между атомами ближайших соседей. Гамильтониан (2) совпадает с гамильтонианом (1) только при $s = 1/2$, а при $s > 1/2$ появляются члены более высоких степеней $\mathbf{S}_m \mathbf{S}_{m+\tau}$ до $(\mathbf{S}_m \mathbf{S}_{m+\tau})^{2s}$ включительно, которые необходимо учитывать при исследовании. Гамильтониан (2) называется негейзенберговским.

В работах [13–19] описаны ферромагнитные свойства магнетиков с билинейным и биквадратичным обменными взаимодействиями.

В работах [13–17] были изучены спектр и СС двухмагнитных систем в негейзенберговском ферромагнетике со взаимодействием ближайших соседей с билинейными и биквадратичными взаимодействиями. Авторы этих работ для изучения спектра и СС двухмагнитных систем применяли различные методы: метод функции Грина, метод приближения молекулярного поля, метод приближения случайных фаз, численные методы,

метод перехода к операторам рождения и уничтожения бозонов с помощью преобразований Гольштейна–Примакова, Дайсона, Дайсона–Малеева, Гольдхирча и др.

В работах [18, 19] спектр и СС вышеупомянутой системы исследованы в одномерном негейзенберговском ферромагнетике со значением спина $s = 1$ со взаимодействием вторых и третьих соседей соответственно. Показано, при каких значениях параметров гамильтониана существуют СС, и вычислены энергии этих СС.

Насколько нам известно, спектр и СС системы с билинейными и биквадратичными взаимодействиями не изучены в двумерном случае и при $\nu > 3$, а также не исследованы для всех значений параметров гамильтониана даже для случаев $\nu = 1$ и $\nu = 3$.

В данной работе изучаются спектр и СС двухмагнонных систем в негейзенберговском ферромагнетике со взаимодействием ближайших соседей спина $s = 1$ в ν -мерной целочисленной решетке Z^ν для произвольного ν и произвольных значений параметров гамильтониана $J > 0$, $J_1 > 0$ и $\Lambda \in T^\nu$.

Методы проводимого ниже исследования своей простотой и полнотой полученных результатов отличаются от методов исследований в других работах, результаты которых являются только частными случаями результатов, полученных нами.

Применяемые методы исследования опираются на отыскание нулей детерминанта Фредгольма изучаемого гамильтониана.

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = -J \sum_{m, \tau} (\mathbf{S}_m \mathbf{S}_{m+\tau}) - J_1 \sum_{m, \tau} (\mathbf{S}_m \mathbf{S}_{m+\tau})^2 \quad (3)$$

и действует в пространстве магнонных состояний: $\mathcal{H}_{\text{магн}} = \bigotimes_k \mathbb{C}_k^3$, где $\mathbb{C}_k^3 \equiv \mathbb{C}^3$ для произвольного $k \in Z^\nu$. Здесь $\mathbf{S}_m$ – оператор атомного спина величины $s = 1$ в узле m , J и J_1 – параметры билинейного и биквадратичного обменных взаимодействий между ближайшими атомами решетки, $J > 0$, $J_1 > 0$; по τ идет суммирование по ближайшим соседям. Положим $S_m^\pm = S_m^x \pm iS_m^y$. Обозначим через φ_0 вектор, называемый вакуумным и однозначно определяемый условиями $S_m^+ \varphi_0 = 0$, $S_m^z \varphi_0 = \varphi_0$, $\|\varphi_0\| = 1$. Векторы $S_m^- S_n^- \varphi_0$ описывают состояние системы двух магнонов, находящихся в узлах m и n . Закрытие пространства, образованного всевозможными линейными комбинациями этих векторов, обозначим через $\mathcal{H}_2$. Оно называется двухмагнонным пространством оператора H .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пространство $\mathcal{H}_2$ инвариантно относительно оператора H . Оператор $H_2 = H|_{\mathcal{H}_2}$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор $\overline{H}_2$, действующий в пространстве $l_2(Z^\nu \times Z^\nu)$ по формуле*

$$\begin{aligned} (\overline{H}_2 f)(p; q) = & -J \sum_{\tau} \sum_{p, q} \left[(\delta_{p, q+\tau} + \delta_{p+\tau, q} - 4) f(p; q) - \frac{1}{2} \delta_{p-\tau, q} f(p-\tau; q) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \delta_{p+\tau, q} f(p+\tau; q) - \frac{1}{2} \delta_{p, q-\tau} f(p-\tau; q) - \frac{1}{2} \delta_{p, q+\tau} f(p; q+\tau) + f(p+\tau; q) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f(p - \tau; q) + f(p; q + \tau) + f(p; q - \tau) \Big] - \\
& - J_1 \sum_{\tau} \sum_{p, q} \left[(2\delta_{p, q} - 2\delta_{p+\tau, q} - 2\delta_{p, q+\tau} + 8)f(p; q) + \delta_{p, q+\tau} f(p - \tau; q + \tau) + \right. \\
& + \delta_{p+\tau, q} f(p + \tau; q - \tau) - 2f(p - \tau; q) - 2f(p + \tau; q) + \delta_{p, q} f(p - \tau; q - \tau) + \\
& + \delta_{p+\tau, q} f(p + \tau; q + \tau) + \frac{1}{2}\delta_{p, q+\tau} f(p - \tau; q) - \delta_{p, q} f(p - \tau; q) - 2f(p; q + \tau) - \\
& - 2f(p; q - \tau) + \frac{1}{2}\delta_{p+\tau, q} f(p; q + \tau) - \delta_{p, q} f(p; q - \tau) + \frac{1}{2}\delta_{p, q+\tau} f(p; q + \tau) + \\
& \left. + \frac{1}{2}\delta_{p+\tau, q} f(p + \tau; q) - \delta_{p, q} f(p; q + \tau) - \delta_{p, q} f(p + \tau; q) \right], \quad (4)
\end{aligned}$$

где $\delta_{k,j}$ – кронекеровский символ. Сам оператор H_2 действует на вектор $\psi \in \mathcal{H}_2$ по формуле

$$H_2 \psi = \sum_{p, q} (\overline{H}_2 f)(p; q) S_p^- S_q^- \varphi_0. \quad (5)$$

Доказательство предложения проводится непосредственно с использованием известных коммутационных соотношений между операторами S_m^+ , S_p^- и S_m^z .

ЛЕММА 1. Спектры операторов H_2 и $\overline{H}_2$ совпадают.

Лемма 1 доказывается с использованием критерия Вейля (см. [20]).

Цель данной работы – изучить спектр и СС оператора $\overline{H}_2$. Это удобно сделать в импульсном представлении.

Обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье

$$\mathcal{F}: l_2(Z^\nu \times Z^\nu) \rightarrow L_2(T^\nu \times T^\nu) \equiv \tilde{\mathcal{H}}_2,$$

где $T = [0; 2\pi)$ – одномерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$: $\lambda(T^\nu) = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Преобразование Фурье переводит оператор $\overline{H}_2$ в ограниченный самосопряженный оператор $\tilde{H}_2$, действующий в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_2$ по формуле

$$(\tilde{H}_2 f)(x; y) = h(x; y) f(x; y) + \int_{T^\nu} h_1(x; y; t) f(t; x + y - t) dt, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
h(x; y) &= 8(J - 2J_1) \sum_{i=1}^{\nu} \left[1 - \cos \frac{x_i + y_i}{2} \cos \frac{x_i - y_i}{2} \right], \\
h_1(x; y; t) &= -4(J - J_1) \sum_{i=1}^{\nu} \left[\cos \frac{x_i - y_i}{2} - \cos \frac{x_i + y_i}{2} \right] \cos \frac{x_i + y_i - 2t_i}{2} - \\
&\quad - 4J_1 \sum_{i=1}^{\nu} \left[1 - \cos \frac{x_i + y_i}{2} \cos \frac{x_i - y_i}{2} + \cos(x_i + y_i) \right], \quad x, y, t \in T^\nu.
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится непосредственным применением в формуле (4) преобразования Фурье.

Из леммы 1 и предложения 2 следует, что для изучения спектра оператора H_2 в пространстве $\mathcal{H}_2$ достаточно изучить спектр оператора $\tilde{H}_2$, действующего в пространстве $L_2(T^\nu \times T^\nu)$ по формуле (6).

Следующий факт является важным для последующих исследований спектра оператора $\tilde{H}_2$. Пусть фиксирован полный квазиимпульс системы $x + y = \Lambda$. Обозначим через $L_2(\Gamma_\Lambda)$ пространство функций, квадратично интегрируемых по многообразию $\Gamma_\Lambda = \{(x; y): x + y = \Lambda\}$. Известно [21], что оператор $\tilde{H}_2$ и пространство $\tilde{\mathcal{H}}_2$ можно разложить в прямой интеграл

$$\tilde{H}_2 = \int_{T^\nu} \oplus \tilde{H}_{2\Lambda} d\Lambda, \quad \tilde{\mathcal{H}}_2 = \int_{T^\nu} \oplus \tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda} d\Lambda$$

операторов $\tilde{H}_{2\Lambda}$ и пространств $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ так, что пространства $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ окажутся инвариантными относительно операторов $\tilde{H}_{2\Lambda}$, а операторы $\tilde{H}_{2\Lambda}$ в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ действуют по формуле

$$(\tilde{H}_{2\Lambda} f_\Lambda)(x) = h_\Lambda(x) f_\Lambda(x) + \int_{T^\nu} h_{1\Lambda}(x; t) f_\Lambda(t) dt,$$

здесь $h_\Lambda(x) = h(x; \Lambda - x)$, $h_{1\Lambda}(x; t) = h_1(x; \Lambda - x; t)$ и $f_\Lambda(x) = f(x; \Lambda - x)$.

Известно, что непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$ не зависит от функций $h_{1\Lambda}(x; t)$ и состоит из отрезков $[m_\Lambda; \mathcal{M}_\Lambda] = G_\Lambda$, где $m_\Lambda = \inf_x h_\Lambda(x)$ и $\mathcal{M}_\Lambda = \sup_x h_\Lambda(x)$.

Собственная функция $\varphi_\Lambda \in L_2(T^\nu)$ оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$, отвечающая собственному значению $z_\Lambda \in G_\Lambda$, называется СС оператора $\tilde{H}_2$, а величина z_Λ — энергией этого СС.

Рассмотрим оператор K_Λ ,

$$(K_\Lambda(z) f_\Lambda)(x) = \int_{T^\nu} \frac{h_{1\Lambda}(x; t)}{h_\Lambda(t) - z} f_\Lambda(t) dt.$$

Он является вполне непрерывным оператором в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ для значений z , лежащих вне множества $G_\Lambda = \text{Im } h_\Lambda(x) = [m_\Lambda; \mathcal{M}_\Lambda]$. Обозначим через $\Delta_\Lambda(z)$ определитель Фредгольма оператора $E_\Lambda + K_\Lambda(z)$, где E_Λ — единичный оператор в $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$,

$$\Delta_\Lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} d_{n\Lambda}(z),$$

$$d_{n\Lambda}(z) = \int_{T^\nu} \cdots \int_{T^\nu} \frac{\det \|h_{1\Lambda}(t_k; t_j)\|_{k=1, n}^{j=1, n}}{\prod_{j=1}^n (h_\Lambda(t_j) - z)} dt_1 \cdots dt_n.$$

ЛЕММА 2. Число $z = z_0 \in G_\Lambda$ является собственным значением оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$ тогда и только тогда, когда оно является нулем функции $\Delta_\Lambda(z)$, т.е. $\Delta_\Lambda(z_0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть число $z = z_0$ — собственное значение оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$, а $\varphi_\Lambda(x)$ — соответствующая собственная функция, т.е.

$$h_\Lambda(x)\varphi_\Lambda(x) - \int_{T^\nu} h_{1\Lambda}(x; t)\varphi_\Lambda(t) dt = z\varphi_\Lambda(x).$$

Обозначим $\psi_\Lambda(x) = [h_\Lambda(x) - z]\varphi_\Lambda(x)$. Тогда

$$\psi_\Lambda(x) - \int_{T^\nu} \frac{h_{1\Lambda}(x; t)}{\varphi_\Lambda(t) - z} \psi_\Lambda(t) dt = 0,$$

т.е. число $\mu = 1$ есть собственное значение оператора $K_\Lambda(z)$. Отсюда следует, что $\Delta_\Lambda(z_0) = 1$.

Пусть теперь $z = z_0$ является нулем функции $\Delta_\Lambda(z)$, т.е. $\Delta_\Lambda(z_0) = 0$. Из теоремы Фредгольма следует, что однородное уравнение

$$\psi_\Lambda(x) - \int_{T^\nu} \frac{h_{1\Lambda}(x; t)}{h_\Lambda(t) - z} \psi_\Lambda(t) dt = 0$$

имеет нетривиальное решение. Это означает, что число $z = z_0$ является собственным значением оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $J = 2J_1$ и ν произвольно. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет ровно два СС φ_1 и φ_2 (без учета кратности вырождений их энергии) со значениями энергии

$$z_1 = -2J_1, \quad z_2 = -(4\nu + 2)J_1 - 4J_1 \sum_{i=1}^{\nu} \cos \Lambda_i,$$

причем z_1 имеет кратность вырождения $\nu - 1$, а z_2 не вырождено и $z_i < m_\Lambda$, $i = 1, 2$, для всех $\Lambda \in T^\nu$, т.е. энергии этих СС лежат ниже области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $J = 2J_1$ имеем $h_\Lambda(s) \equiv 0$, а

$$\Delta_\Lambda^\nu(z) = \left(1 + \frac{2J_1}{z}\right)^{\nu-1} \left\{ \left(1 + \frac{2J_1}{z}\right) \left[1 + \frac{4J_1}{z} \sum_{i=1}^{\nu} (1 + \cos \Lambda_i)\right] - \frac{16J_1^2}{z^2} \sum_{i=1}^{\nu} \cos^2 \frac{\Lambda_i}{2} \right\}.$$

Решая уравнение $\Delta_\Lambda^\nu(z) = 0$, получаем доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. В теореме нуль-кратная вырожденность означает, что в данном случае это СС отсутствует.

Введем обозначение $\pi = (\pi, \pi, \dots, \pi) \in T^\nu$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Lambda = \pi$, $J \neq J_1$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное СС φ со значением энергии

$$z = 8\nu(J - 2J_1) - 2(J - J_1),$$

причем уровень этой энергии ν -кратно вырожден. Кроме того, если $J > J_1$, то $z < m_\Lambda$, а если $J < J_1$, то $z > M_\Lambda$. При $J = J_1$ это СС исчезает, поглощаясь непрерывным спектром.

Для доказательства используется равенство $h_\Lambda(x) = 8\nu(J - 2J_1)$ при $\Lambda = \pi$, а также соответствующий вид определителя Фредгольма $\Delta_\Lambda^\nu(z)$.

В случае, если $\nu = 1$, изменение энергетического спектра описывается нижеследующими теоремами.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $J < J_1$ и $\Lambda \in]0; \pi[$ ($\Lambda \in]\pi; 2\pi[$):

а) если

$$\cos \frac{\Lambda}{2} > -\frac{J - J_1}{2J_1} \quad \left(\cos \frac{\Lambda}{2} < \frac{J - J_1}{2J_1} \right),$$

то оператор $\tilde{H}_2$ имеет ровно два СС φ_1 и φ_2 со значениями энергии, соответственно равными z_1 и z_2 , причем $z_i < m_\Lambda$, $i = 1, 2$;

б) если

$$\cos \frac{\Lambda}{2} \leq -\frac{J - J_1}{2J_1} \quad \left(\cos \frac{\Lambda}{2} \geq \frac{J - J_1}{2J_1} \right),$$

то оператор $\tilde{H}_2$ обладает единственным СС φ_1 со значением энергии, равным z_1 , при этом $z_1 < m_\Lambda$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $J = J_1$ и $\Lambda \in]0; \pi[$ ($\Lambda \in]\pi; 2\pi[$):

а) если $0 < \Lambda < \alpha_1$ ($\alpha_2 < \Lambda < 2\pi$), то оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное СС φ со значением энергии, равным $z < m_\Lambda$;

б) если же $\Lambda \in [\alpha_1; \pi[\cup]\pi; \alpha_2[$, то оператор $\tilde{H}_2$ не имеет СС. Здесь $\alpha_1 \approx 100^\circ$, $\alpha_2 \approx 260^\circ$ и

$$z = -8J_1 - \frac{8J_1 \cos^2 \frac{\Lambda}{2} (1 + 2\sqrt{3 + \cos^2 \frac{\Lambda}{2}})}{3}.$$

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $J_1 < J < 2J_1$ и $\Lambda \in]0; \pi[$ ($\Lambda \in]\pi; 2\pi[$):

а) если

$$\cos \frac{\Lambda}{2} \leq \frac{J - J_1}{2J_1} \quad \left(\cos \frac{\Lambda}{2} \geq -\frac{J - J_1}{2J_1} \right),$$

то оператор $\tilde{H}_2$ имеет ровно два СС φ_1 и φ_2 со значениями энергии, соответственно равными z_1 и z_2 , причем $z_1 < m_\Lambda$, а $z_2 > M_\Lambda$;

б) если же

$$\cos \frac{\Lambda}{2} > \frac{J - J_1}{2J_1} \quad \left(\cos \frac{\Lambda}{2} < -\frac{J - J_1}{2J_1} \right),$$

то оператор $\tilde{H}_2$ имеет ровно три СС $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ со значениями энергии, соответственно равными z_1, z_2, z_3 , при этом $z_1 < m_\Lambda$, а $z_i > M_\Lambda$, $i = 2, 3$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $2J_1 < J < 3J_1$ и $\Lambda \in]0; \pi[$ ($\Lambda \in]\pi; 2\pi[$):

а) если

$$\cos \frac{\Lambda}{2} > \frac{J - J_1}{2J_1} \quad \left(\cos \frac{\Lambda}{2} < -\frac{J - J_1}{2J_1} \right),$$

то оператор $\tilde{H}_2$ обладает ровно двумя СС φ_1 и φ_2 со значениями энергии, соответственно равными z_1 и z_2 , где $z_i < m_\Lambda$, $i = 1, 2$;

б) если же

$$\cos \frac{\Lambda}{2} \leq \frac{J - J_1}{2J_1} \quad \left(\cos \frac{\Lambda}{2} \geq -\frac{J - J_1}{2J_1} \right),$$

то оператор $\tilde{H}_2$ обладает единственным СС φ_1 со значением энергии, равным $z_1 < m_\Lambda$. В этом случае второе СС исчезает, поглощаясь непрерывным спектром.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $J = 3J_1$ и $\Lambda \neq 0$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное СС φ со значением энергии

$$z = 4J_1 \left(1 - \cos^2 \frac{\Lambda}{2} \right) < m_\Lambda.$$

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть $J > 3J_1$ и $\Lambda \neq 0$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет ровно два СС φ_1 и φ_2 со значениями энергии, соответственно равными z_1 и z_2 , причем $z_1 < m_\Lambda$, а $z_2 > M_\Lambda$.

В случае $\nu = 1$ и $\Lambda = 0$ описание изменения энергетического спектра дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. 1) если $J < J_1$ и $\Lambda = 0$, то оператор $\tilde{H}_2$ обладает ровно двумя СС φ_1 и φ_2 со значениями энергии, соответственно равными z_1 и z_2 , причем $z_i < m_\Lambda$, $i = 1, 2$;

2) если $J = J_1$ и $\Lambda = 0$, то оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное СС φ со значением энергии

$$z = -\frac{64}{3}J_1 < m_\Lambda;$$

3) пусть $J_1 < J < 2J_1$ и $\Lambda = 0$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет ровно два СС φ_1 и φ_2 со значениями энергии, соответственно равными z_1 и z_2 , при этом $z_1 < m_\Lambda$, а $z_2 > M_\Lambda$;

4) пусть $2J_1 < J < 3J_1$ и $\Lambda = 0$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ обладает ровно двумя СС φ_1 и φ_2 со значениями энергии, соответственно равными z_1 и z_2 , где $z_i < m_\Lambda$, $i = 1, 2$;

5) пусть $J = 3J_1$ и $\Lambda = 0$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ не имеет СС;

6) если $J > 3J_1$ и $\Lambda = 0$, то оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное СС φ со значением энергии $z > M_\Lambda$.

Приведем эскиз доказательства теорем 3 и 4. В нашем случае уравнение для собственных значений является интегральным уравнением с вырожденным ядром. Поэтому

оно эквивалентно системе линейных однородных алгебраических уравнений. Известно, что система линейных однородных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда детерминант системы равен нулю. Поэтому в рассматриваемом случае уравнение $\Delta_\Lambda(z) = 0$ эквивалентно равенству нулю детерминанта этой системы. Выражая все интегралы, входящие в уравнение $\Delta_\Lambda(z) = 0$, через интеграл

$$J^*(z) = \int_T \frac{dt}{h_\Lambda(t) - z},$$

получаем, что уравнение $\Delta_\Lambda(z) = 0$ эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} J^*(z) = & \left\{ 8(J - 2J_1)(J - 5J_1) \cos^2 \frac{\Lambda}{2} - (J - J_1)[z - 8(J - 2J_1)] \right\} \times \\ & \times \left\{ 128J_1(J - 2J_1)^2 \cos^4 \frac{\Lambda}{2} + 8(J - 2J_1)(J + J_1) \cos^2 \frac{\Lambda}{2} [z - 8(J - 2J_1)] + \right. \\ & \left. + (J - J_1)[z - 8(J - 2J_1)]^2 \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку $1/(h_\Lambda(t) - z)$ — непрерывная функция при $z \in [m_\Lambda; \mathcal{M}_\Lambda]$ и

$$[J^*(z)]' = \int_T \frac{dt}{[h_\Lambda(t) - z]^2} > 0,$$

функция $J^*(z)$ является возрастающей функцией z при $z \in [m_\Lambda; \mathcal{M}_\Lambda]$. Кроме того, $J^*(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$, $J^*(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow m_\Lambda - 0$, $J^*(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow \mathcal{M}_\Lambda + 0$ и $J^*(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow +\infty$. Исследуя теперь уравнение (7) вне множества $G_\Lambda = [m_\Lambda; \mathcal{M}_\Lambda]$, получим доказательство теорем 3 и 4.

Рассмотрим случай $\nu = 2$ и опишем изменение энергетического спектра системы для значений полного квазиимпульса, имеющих вид $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2) = (\Lambda_0, \Lambda_0)$. Если параметры J, J_1 и Λ_0 удовлетворяют условиям теорем 3 и 4, то нетрудно видеть, что имеют место соответствующие утверждения этих теорем. Появляется лишь одно дополнительное СС $\tilde{\varphi}$ со значением энергии, равным $\tilde{z}$, причем $\tilde{z} < m_\Lambda$ ($\tilde{z} > \mathcal{M}_\Lambda$), если $J > J_1$ ($J < J_1$). Если же $J = J_1$, то оператор $\tilde{H}_2$ не имеет дополнительного СС.

Для доказательства этого утверждения заметим, что в случае, если $\nu = 2$ и $\Lambda = (\Lambda_0, \Lambda_0)$, функция $\Delta'_\Lambda(z)$ имеет вид

$$\Delta'_\Lambda(z) = \left[1 - 2(J - J_1) \int_{T^2} \frac{[\cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_1) - \cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_2)]^2 dt_1 dt_2}{h_\Lambda(t_1; t_2) - z} \right] \psi(z), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \psi(z) = & \left\{ 1 - 8J_1 \int_{T^2} \frac{1 + \cos \Lambda_0 - \cos \frac{\Lambda_0}{2} [\cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_1) + \cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_2)]}{h_\Lambda(t) - z} dt \right\} \times \\ & \times \left[1 - 4(J - J_1) \int_{T^2} \frac{\cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_1) [\cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_1) + \cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_2) - 2 \cos \frac{\Lambda_0}{2}]}{h_\Lambda(t) - z} dt \right] - \\ & - 64(J - J_1)J_1 \times \\ & \times \int_{T^2} \frac{\{1 + \cos \Lambda_0 - \cos \frac{\Lambda_0}{2} [\cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_1) + \cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_2)]\} \cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_1)}{h_\Lambda(t) - z} dt_1 dt_2 \times \\ & \times \int_{T^2} \frac{\cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_1) - \cos \frac{\Lambda_0}{2}}{h_\Lambda(t) - z} dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение $\Delta'_\Lambda(z) = 0$ эквивалентно уравнению

$$1 - 2(J - J_1) \int_{T^2} \frac{[\cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_1) - \cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_2)]^2 dt_1 dt_2}{h_\Lambda(t_1; t_2) - z} = 0 \quad (9)$$

и

$$\psi_\Lambda(z) = 0. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (9) имеет единственное решение $\tilde{z} < m_\Lambda$ при условии $J > J_1$; если же $J < J_1$, то это решение удовлетворяет условию $\tilde{z} > \mathcal{M}_\Lambda$. При $J = J_1$ уравнение (9) решения не имеет. Выражая все интегралы, входящие в (10), через интеграл

$$J^*(z) = \int_{T^2} \frac{dt_1 dt_2}{h_\Lambda(t_1; t_2) - z},$$

получаем уравнение вида

$$\eta_\Lambda(z)J^*(z) = \xi_\Lambda(z),$$

где

$$\eta_\Lambda(z) = (J - J_1)\tilde{z}^2 + 16(J - 2J_1)(J + J_1) \cos^2 \frac{\Lambda_0}{2} \tilde{z} + 512J_1(J - 2J_1) \cos^4 \frac{\Lambda_0}{2},$$

а

$$\xi_\Lambda(z) = 16(J - 2J_1)(J - 5J_1) \cos^2 \frac{\Lambda_0}{2} - (J - J_1)\tilde{z}.$$

Здесь $\tilde{z} = z - 16(J - 2J_1)$. В свою очередь, это уравнение при $\eta_\Lambda(z) \neq 0$ эквивалентно уравнению вида

$$J^*(z) = \frac{\xi_\Lambda(z)}{\eta_\Lambda(z)}. \quad (11)$$

Используя монотонность функции $J^*(z)$ при $z \in [m_\Lambda; \mathcal{M}_\Lambda]$ и исследуя уравнение (11) вне множества G_Λ , получим утверждения, аналогичные утверждениям теорем 3 и 4.

При остальных значениях полного квазиимпульса $\Lambda = (\Lambda_1; \Lambda_2)$, $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, существуют такие множества параметров J , J_1 и Λ , обозначаемые G_j , $j = \overline{0, 5}$, что в каждом

множестве G_j оператор $\tilde{H}_2$ имеет ровно j СС (с учетом кратности вырождений их энергии) со значениями энергии, соответственно равными z_k , $k = \overline{1, 5}$, и $z_k \in G_\Lambda$.

Действительно, в этом случае при $\nu = 2$ функция $\Delta_\Lambda^\nu(z)$ имеет вид

$$\Delta_\Lambda^\nu(z) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - 4J_1 \int_{T^2} \frac{g_\Lambda(t) dt}{h_\Lambda(t) - z}, \\ a_{k+1} &= -4(J - J_1) \int_{T^2} \frac{f_{\Lambda_k}(t_k) dt}{h_\Lambda(t) - z}, \quad k = 1, 2; \\ b_1 &= -4J_1 \int_{T^2} \frac{g_\Lambda(t) \varphi_{\Lambda_1}(t_1) dt}{h_\Lambda(t) - z}, \\ b_2 &= 1 - 4(J - J_1) \int_{T^2} \frac{\varphi_{\Lambda_1}(t_1) f_{\Lambda_1}(t_1) dt}{h_\Lambda(t) - z}, \\ b_3 &= -4(J - J_1) \int_{T^2} \frac{\varphi_{\Lambda_1}(t_1) f_{\Lambda_2}(t_2) dt}{h_\Lambda(t) - z}, \\ c_1 &= -4J_1 \int_{T^2} \frac{g_\Lambda(t) \varphi_{\Lambda_2}(t_2) dt}{h_\Lambda(t) - z}, \\ c_2 &= -4(J - J_1) \int_{T^2} \frac{\varphi_{\Lambda_2}(t_2) f_{\Lambda_1}(t_1) dt}{h_\Lambda(t) - z}, \\ c_3 &= 1 - 4(J - J_1) \int_{T^2} \frac{\varphi_{\Lambda_2}(t_2) f_{\Lambda_2}(t_2) dt}{h_\Lambda(t) - z}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} g_\Lambda(t) &= \sum_{i=1}^2 \left[1 + \cos \Lambda_i - 2 \cos \frac{\Lambda_i}{2} \cos \left(\frac{\Lambda_i}{2} - t_i \right) \right], \\ f_{\Lambda_k}(t_k) &= \cos \left(\frac{\Lambda_k}{2} - t_k \right) - \cos \frac{\Lambda_k}{2}, \\ \varphi_{\Lambda_k}(t_k) &= \cos \left(\frac{\Lambda_k}{2} - t_k \right), \quad k = 1, 2; \quad \Lambda \in T^2, \quad t \in T^2. \end{aligned}$$

Выражая все интегралы, входящие в уравнение $\Delta_\Lambda^\nu(z) = 0$, через $J^*(z)$, после некоторых алгебраических преобразований его можно свести к уравнению вида

$$\theta_\Lambda(z) J^*(z) = \chi_\Lambda(z), \quad (12)$$

где $\theta_\Lambda(z)$ является многочленом пятой степени от z , а $\chi_\Lambda(z)$ — многочлен более низкой степени от z . Используя монотонность $J^*(z)$ при $z \in [m_\Lambda; \mathcal{M}_\Lambda]$ и исследуя уравнение (12) вне множества G_Λ , убедимся, что оно имеет не более пяти решений вне множества G_Λ .

Теперь рассмотрим случай $\nu = 3$. Сначала предположим, что полный квазиимпульс имеет вид $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = (\Lambda_0, \Lambda_0, \Lambda_0)$. Если параметры Λ_0 , J и J_1 удовлетворяют условиям теорем 3 и 4, то имеют место аналогичные утверждения этих теорем. Появляется лишь одно дополнительное СС $\tilde{\tilde{\varphi}}$ со значением энергии, равным $\tilde{\tilde{z}}$. Причем уровень этой энергии двукратно вырожден и $\tilde{\tilde{z}} < m_\Lambda$ ($\tilde{\tilde{z}} > \mathcal{M}_\Lambda$), если $J > J_1$ ($J < J_1$). При $J = J_1$ это дополнительное СС исчезает, поглощаясь непрерывным спектром.

Для доказательства заметим лишь, что в этом случае функция $\Delta_\Lambda^\nu(z)$ имеет вид

$$\Delta_\Lambda^\nu(z) = \left[1 - 2(J - J_1) \int_{T^3} \frac{[\cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_1) - \cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_2)]^2 dt_1 dt_2 dt_3}{h_\Lambda(t) - z} \right]^2 \tilde{\psi}_\Lambda(z),$$

$$t \in T^3,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\Lambda(z) = & \left[1 - 4J_1 \int_{T^3} \frac{[3 + 3\cos\Lambda_0 - 2\cos\frac{\Lambda_0}{2}(\sum_{i=1}^3 \cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_i))] dt}{h_\Lambda(t) - z} \right] \times \\ & \times \left\{ 1 - 4(J - J_1) \int_{T^3} \frac{\cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_1) [\sum_{i=1}^3 \cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_i) - 3\cos\frac{\Lambda_0}{2}] dt}{h_\Lambda(t) - z} \right\} - \\ & - 48J_1(J - J_1) \int_{T^3} \frac{[\cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_1) - \cos\frac{\Lambda_0}{2}] dt}{h_\Lambda(t) - z} \times \\ & \times \int_{T^3} \frac{\{3 + 3\cos\Lambda_0 - 2\cos\frac{\Lambda_0}{2}[\sum_{i=1}^3 \cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_i)]\} \cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_1) dt}{h_\Lambda(t) - z}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение $\Delta_\Lambda^\nu(z) = 0$ эквивалентно уравнениям

$$\left[1 - 2(J - J_1) \int_{T^3} \frac{[\cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_1) - \cos(\frac{\Lambda_0}{2} - t_2)]^2 dt_1 dt_2 dt_3}{h_\Lambda(t) - z} \right]^2 = 0 \quad (13)$$

и

$$\tilde{\psi}_\Lambda(z) = 0. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (13) имеет единственное двукратное решение z' , если $J \neq J_1$, причем $z' < m_\Lambda$ ($z' > \mathcal{M}_\Lambda$), если $J > J_1$ ($J < J_1$). Выражая все интегралы, входящие в уравнение (14), через

$$J^*(z) = \int_{T^3} \frac{dt_1 dt_2 dt_3}{h_\Lambda(t_1; t_2; t_3) - z},$$

получаем уравнение

$$\tilde{\eta}_\Lambda(z) J^*(z) = \tilde{\theta}_\Lambda(z), \quad (15)$$

где

$$\tilde{\eta}_\Lambda(z) = (J - J_1)\tilde{z}^2 + 24(J + J_1)(J - 2J_1)\cos^2\frac{\Lambda_0}{2}\tilde{z} + 1152J_1(J - 2J_1)^2\cos^4\frac{\Lambda_0}{2},$$

а

$$\tilde{\theta}_\Lambda(z) = 24(J - 2J_1)(J - 5J_1) \cos^2 \frac{\Lambda_0}{2} - (J - J_1)\tilde{z}.$$

Здесь $\tilde{z} = z - 24(J - 2J_1)$. В свою очередь, уравнение (15) при условии, что $\tilde{\eta}_\Lambda(z) \neq 0$, эквивалентно уравнению

$$J^*(z) = \frac{\tilde{\theta}_\Lambda(z)}{\tilde{\eta}_\Lambda(z)}. \quad (16)$$

Исследуя уравнение (16) вне множества G_Λ и используя монотонность $J^*(z)$ при $z \in G_\Lambda$, получим доказательство приведенных выше утверждений.

В случае $\Lambda \neq (\Lambda_0, \Lambda_0, \Lambda_0)$ система обладает не более чем семью СС (с учетом кратности вырождений их энергии), при этом существуют такие множества G_k , $k = \overline{0, 7}$, параметров Λ , J и J_1 , что в каждом множестве G_k , $k = \overline{0, 7}$, система имеет ровно k СС. Энергии этих СС лежат вне множества G_Λ . При переходе от одного из этих множеств к другому у оператора $\tilde{H}_2$ возникают либо дополнительные СС, либо некоторые существующие СС исчезают. В этом случае функция $\Delta_\Lambda^\nu(z)$ имеет вид

$$\Delta_\Lambda^\nu(z) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - 4J_1 \int_{T^3} \frac{g_\Lambda(t) dt_1 dt_2 dt_3}{h_\Lambda(t_1; t_2; t_3) - z}, \\ a_{k+1} &= -4(J - J_1) \int_{T^3} \frac{f_{\Lambda_k}(t_k) dt_1 dt_2 dt_3}{h_\Lambda(t_1; t_2; t_3) - z}, \quad k = 1, 2, 3; \\ b_1 &= -4J_1 \int_{T^3} \frac{g_\Lambda(t) \varphi_{\Lambda_1}(t_1) dt_1 dt_2 dt_3}{h_\Lambda(t_1; t_2; t_3) - z}, \\ b_2 &= 1 - 4(J - J_1) \int_{T^3} \frac{\varphi_{\Lambda_1}(t_1) f_{\Lambda_1}(t_1) dt_1 dt_2 dt_3}{h_\Lambda(t_1; t_2; t_3) - z}, \\ b_{k+1} &= -4(J - J_1) \int_{T^3} \frac{\varphi_{\Lambda_1}(t_1) f_{\Lambda_k}(t_k) dt_1 dt_2 dt_3}{h_\Lambda(t_1; t_2; t_3) - z}, \quad k = 2, 3; \\ c_1 &= -4J_1 \int_{T^3} \frac{g_\Lambda(t) \varphi_{\Lambda_2}(t_2) dt_1 dt_2 dt_3}{h_\Lambda(t_1; t_2; t_3) - z}, \\ c_{k+1} &= -4(J - J_1) \int_{T^3} \frac{\varphi_{\Lambda_2}(t_2) f_{\Lambda_k}(t_k) dt_1 dt_2 dt_3}{h_\Lambda(t_1; t_2; t_3) - z}, \quad k = 1, 3; \\ c_3 &= 1 - 4(J - J_1) \int_{T^3} \frac{\varphi_{\Lambda_2}(t_2) f_{\Lambda_2}(t_2) dt_1 dt_2 dt_3}{h_\Lambda(t_1; t_2; t_3) - z}, \\ d_1 &= -4J_1 \int_{T^3} \frac{g_\Lambda(t) \varphi_{\Lambda_3}(t_3) dt_1 dt_2 dt_3}{h_\Lambda(t_1; t_2; t_3) - z}, \\ d_{k+1} &= -4(J - J_1) \int_{T^3} \frac{\varphi_{\Lambda_3}(t_3) f_{\Lambda_k}(t_k) dt_1 dt_2 dt_3}{h_\Lambda(t_1; t_2; t_3) - z}, \quad k = 1, 2; \end{aligned}$$

$$d_4 = 1 - 4(J - J_1) \int_{T^3} \frac{\varphi_{\Lambda_3}(t_3) f_{\Lambda_3}(t_3) dt_1 dt_2 dt_3}{h_{\Lambda}(t_1; t_2; t_3) - z}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} g_{\Lambda}(t) &= \sum_{i=1}^3 \left[1 + \cos \Lambda_i - 2 \cos \frac{\Lambda_i}{2} \cos \left(\frac{\Lambda_i}{2} - t_i \right) \right], \\ f_{\Lambda_k}(t_k) &= \cos \left(\frac{\Lambda_k}{2} - t_k \right) - \cos \frac{\Lambda_k}{2}, \\ \varphi_{\Lambda_k}(t_k) &= \cos \left(\frac{\Lambda_k}{2} - t_k \right), \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Выражая все интегралы, входящие в уравнение $\Delta_{\Lambda}^{\nu}(z) = 0$, через $J^*(z)$, после некоторых алгебраических преобразований данное уравнение можно свести к уравнению вида

$$J^*(z) = \frac{\mathcal{A}_{\Lambda}(z)}{\mathcal{B}_{\Lambda}(z)},$$

где $\mathcal{B}_{\Lambda}(z)$ является многочленом седьмой степени от z , а $\mathcal{A}_{\Lambda}(z)$ — многочлен более низкой степени от z . Поэтому это уравнение имеет не более семи решений вне множества G_{Λ} .

Для произвольного $\nu > 3$ и $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{\nu}) = (\Lambda_0, \Lambda_0, \dots, \Lambda_0)$ в случае, если параметры J , J_1 и Λ_0 удовлетворяют условиям теорем 3 и 4, имеют место аналогичные утверждения этих теорем. В этой ситуации у оператора $\tilde{H}_2$ есть лишь одно дополнительное СС при $J \neq J_1$. Причем энергия этого дополнительного СС z $(\nu - 1)$ -кратно вырождена. Кроме того, $z < m_{\Lambda}$ ($z > M_{\Lambda}$), если $J > J_1$ ($J < J_1$). При остальных же значениях полного квазиимпульса системы Λ оператор $\tilde{H}_2$ имеет не более чем $2\nu + 1$ СС (с учетом кратности вырождений их энергии) со значениями энергии, лежащими вне множества G_{Λ} .

Доказательство этих утверждений опирается на отыскание нулей детерминантов Фредгольма рассматриваемых операторов. Выражая все интегралы в $\Delta_{\Lambda}^{\nu}(z)$ через $J^*(z)$, можно привести уравнение $\Delta_{\Lambda}^{\nu}(z) = 0$ к виду

$$J^*(z) = \frac{\mathcal{C}_{\Lambda}(z)}{\mathcal{D}_{\Lambda}(z)}, \quad (17)$$

где $\mathcal{D}_{\Lambda}(z)$ является многочленом $(2\nu + 1)$ -степени от z , а $\mathcal{C}_{\Lambda}(z)$ также является многочленом z более низкой степени относительно $\mathcal{D}_{\Lambda}(z)$. Исследование уравнения (17) вне множества G_{Λ} дает доказательство вышеприведенных утверждений.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $J = J_1$ и число ν произвольно. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет не более одного СС, причем уровень энергии z невырожден и $z < m_{\Lambda}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при $J = J_1$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} h_{1\Lambda}(x; t) &= -4J_1 \sum_{i=1}^{\nu} \left[1 - \cos \frac{\Lambda_i}{2} \cos \left(\frac{\Lambda_i}{2} - x_i \right) + \cos \Lambda_i \right], \\ h_{\Lambda}(x) &= -8J_1 \sum_{i=1}^{\nu} \left[1 - \cos \frac{\Lambda_i}{2} \cos \left(\frac{\Lambda_i}{2} - x_i \right) \right]. \end{aligned}$$

Используя вид определителя Фредгольма $\Delta_{\Lambda}^{\nu}(z)$ и решая соответствующее уравнение, получаем утверждение теоремы 5.

Список литературы

- [1] *H. A. Bethe.* Z. Phys. 1931. V. 71. P. 205.
- [2] *N. Fukuda, M. Wortis.* J. Phys. Chem. Solids. 1963. V. 24. P. 1675.
- [3] *M. Wortis.* Phys. Rev. 1963. V. 132. № 1. P. 85.
- [4] *I. Majumdar.* J. Math. Phys. 1969. V. 132. № 10. P. 85.
- [5] *I. Ono, S. Mikado, T. Oguchi.* J. Phys. Soc. Japan. 1971. V. 30. № 2. P. 358.
- [6] *И. Г. Гочев.* ТМФ. 1973. Т. 15. № 1. С. 120.
- [7] *И. Г. Гочев.* ЖЭТФ. 1971. Т. 61. № 10. С. 1674.
- [8] *С. М. Ташпулатов.* ТМФ. 1996. Т. 107. № 1. С. 155.
- [9] *С. М. Ташпулатов.* ДАН РУз. 1994. № 1. С. 7.
- [10] *С. М. Ташпулатов.* ДАН РУз. 1994. № 4. С. 7.
- [11] *С. М. Ташпулатов.* ДАН РУз. 1996. № 12. С. 4.
- [12] *E. Schrödinger.* Proc. Roy Irish. Acad. A. 1941. V. 48. P. 39.
- [13] *R. Micnas.* Phys. Stat. Sol. (b). 1974. V. 66. № 2. P. 75.
- [14] *A. A. Brown.* Phys. Rev. B. 1971. V. 4. № 1. P. 115.
- [15] *H. H. Chen, P. Levy.* Phys. Rev. Lett. 1971. V. 27. № 20. P. 1383.
- [16] *D. A. Pink, R. Ballard.* Can J. Phys. 1974. V. 52. № 1. P. 33.
- [17] *D. A. Pink, P. Tremblay.* Can. J. Phys. 1972. V. 50. № 15. P. 1728–1735.
- [18] *С. М. Ташпулатов.* ТМФ. 1996. Т. 107. № 2. С. 251.
- [19] *С. М. Ташпулатов.* ТМФ. 1996. Т. 107. № 2. С. 262.
- [20] *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
- [21] *М. А. Наймарк.* Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 13.IV.2000 г.