Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Морозов, Г. Рёпке, Двухвременные корреляционные функции в точно решаемой спин-бозонной модели, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 3, 482–489

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6695>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:52:25

© 2011 г.

В. Г. Морозов*, Г. Рёпке†

ДВУХВРЕМЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ В ТОЧНО РЕШАЕМОЙ СПИН-БОЗОННОЙ МОДЕЛИ

Рассматривается спин-бозонная модель, описывающая процесс дефазировки в открытой квантовой системе. Получены точные выражения для двухвременной спиновой корреляционной функции и функции дефазировки, справедливые при любых значениях констант связи. Показано, что начальные статистические корреляции между динамической системой и термостатом существенно влияют на зависимость функции дефазировки от времени.

Ключевые слова: открытые квантовые системы, дефазировка в квантовых системах, спин-бозонные модели.

Посвящается памяти С. В. Тябликова

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод двухвременных функций Грина, разработанный Боголюбовым и Тябликовым [1], обычно используется при изучении спектра квазичастиц и вычислении равновесных величин многочастичных систем. Отметим, однако, что функции Грина и связанные с ними различные корреляционные функции оказываются удобными и для описания неравновесных релаксационных процессов, если отклонение состояния системы от равновесия мало [2], [3]. В настоящей работе мы обсудим применение метода двухвременных корреляционных функций к процессу релаксации в одной из так называемых спин-бозонных моделей [4]–[6].

Любая спин-бозонная модель описывает двухуровневую квантовую систему, взаимодействующую с равновесной макроскопической системой (термостатом), которая представляет собой совокупность осцилляторов. Такого рода модели давно применяются в задачах о квантовом туннелировании в диссипативной среде [4] и в квантовой оптике [7]. В последние двадцать лет интерес к спин-бозонным моделям значительно вырос в связи с тем, что открытая двухуровневая система может играть роль материального носителя единицы квантовой информации – кубита (qubit) –

*Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (Технический университет), Москва, Россия. E-mail: vladmorozov45@gmail.com

†Institut für Physik, Universität Rostock, Rostock, Germany.
E-mail: gerd.roepke@uni-rostock.de

в квантовом компьютере (см., например, обзоры [8], [9] и приведенные в них ссылки на оригинальные работы).

Несмотря на формальную простоту спин-бозонных моделей, их динамика оказалась весьма сложной из-за влияния статистических корреляций между двухуровневой системой и термостатом, эффектов памяти и т. д. С фундаментальной и практической точек зрения одним из наиболее интересных процессов в открытых квантовых системах является процесс *дефазировки* – затухание недиагональных элементов матрицы плотности со временем, в результате чего поведение системы становится квазиклассическим¹⁾. В работах [10], [11] была предложена простая спин-бозонная модель, которая описывает процесс дефазировки “в чистом виде”, так как в ней отсутствует *диссипативный* механизм релаксации, приводящий к тепловому равновесию между двухуровневой системой и термостатом. Важным достоинством этой модели является то, что для некоторых начальных состояний матрицу плотности двухуровневой системы удастся вычислить точно. Точные решения были найдены и для некоторых других спин-бозонных моделей [4], [6], однако все известные точные решения соответствуют начальному состоянию, в котором отсутствуют статистические корреляции между динамической системой и термостатом.

В настоящей работе на основе метода двухвременных корреляционных функций мы получим *точное* выражение для матрицы плотности двухуровневой системы в линейном режиме дефазировки с учетом начальных корреляций между динамической системой и термостатом.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Для двухуровневой квантовой системы с базисными состояниями $|0\rangle$ и $|1\rangle$ наиболее удобным является “спиновое” представление, где

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

а все операторы выражаются через матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

В частности, матрицу плотности такой системы с элементами $\varrho_{ij}(t)$, $i, j = 0, 1$, можно записать в виде

$$\varrho(t) = \frac{1}{2}[1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}(t)], \quad (2.3)$$

где

$$\mathbf{v}(t) = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^t \equiv \text{Tr}\{\boldsymbol{\sigma} \varrho(t)\} \quad (2.4)$$

– так называемый *вектор Блоха* [12], [13].

Гамильтонианы спин-бозонных моделей, которые встречаются в литературе (см., например, работы [4]–[6]), являются частными случаями следующего гамильтониана

¹⁾В англоязычной литературе наряду с термином “дефазировка” (dephasing) часто употребляется термин “decoherence” – потеря когерентности. Буквальный русский перевод последнего термина – декогерентизация [9] – на наш взгляд, не очень удачен.

(здесь и далее используется система единиц, в которой $\hbar = 1$):

$$H = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h} + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_i \sigma_i \sum_k (g_{ik} b_k^\dagger + g_{ik}^* b_k), \quad (2.5)$$

где $\mathbf{h}$ – классический вектор, ω_k – частоты мод окружения (термостата), $b_k^\dagger$ и b_k – бозонные операторы рождения и уничтожения для k -й моды. Величины g_{ik} – константы связи, характеризующие взаимодействие двухуровневой системы с термостатом.

Мы рассмотрим вариант спин-бозонной модели (2.5) с гамильтонианом [10], [11]

$$H = \frac{\omega_0}{2} \sigma_3 + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \sigma_3 \sum_k (g_k b_k^\dagger + g_k^* b_k), \quad (2.6)$$

где ω_0 – разность энергий возбужденного ($|1\rangle$) и основного ($|0\rangle$) состояний. Следует отметить, что модель (2.6) *неэргодическая*, так как оператор σ_3 коммутирует с гамильтонианом и, следовательно, среднее значение $\langle \sigma_3 \rangle^t$ (разность заселенностей уровней) является интегралом движения.

3. ЛИНЕЙНЫЙ РЕЖИМ ДЕФАЗИРОВКИ

В модели (2.6) приведенная матрица плотности $\varrho(t)$ двухуровневой системы (S) точно вычисляется [6], [10], [11], если в начальный момент времени $t = 0$ отсутствуют корреляции между системой и термостатом (B), т. е. начальная матрица плотности $\varrho_{SB}(0)$ составной системы имеет вид прямого произведения:

$$\varrho_{SB}(0) = \varrho(0) \otimes \varrho_B, \quad \varrho_B = \frac{e^{-\beta H_B}}{Z_B}, \quad (3.1)$$

где $\beta = 1/k_B T$, H_B и Z_B – гамильтониан и статистическая сумма термостата. В более реалистичной постановке задачи следует учесть начальные статистические корреляции, которые могут существенно влиять на процесс дефазировки.

С помощью соотношения (2.3) легко проверить, что недиагональные элементы матрицы плотности подсистемы S можно записать в виде

$$\varrho_{01}(t) = \langle \sigma_+ \rangle^t, \quad \varrho_{10}(t) = \langle \sigma_- \rangle^t, \quad (3.2)$$

где введены операторы $\sigma_\pm = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$. Таким образом, поскольку $\varrho_{10}(t) = \varrho_{01}^*(t)$, процесс дефазировки полностью описывается зависимостью среднего $\langle \sigma_+ \rangle^t$ от времени.

Если подсистемы S и B находятся в равновесии друг с другом, то из структуры гамильтониана (2.6) следует, что $\langle \sigma_\pm \rangle = 0$. Мы рассмотрим *линейный* процесс дефазировки, когда неравновесные средние $\langle \sigma_\pm \rangle^t$ достаточно малы и могут быть вычислены в рамках теории линейной реакции [3]. Предположим, что начальное коррелированное состояние составной системы с $\langle \sigma_\pm \rangle \neq 0$ описывается матрицей плотности

$$\varrho_{SB}(0) = \frac{e^{-\beta(H - f^* \sigma_+ - f \sigma_-)}}{Z_{SB}}, \quad (3.3)$$

где Z_{SB} – нормировочная постоянная, а вспомогательные “внешние поля” f и f^* находятся из условий

$$\langle \sigma_{\pm} \rangle|_{t=0} = \text{Tr}\{\varrho_{SB}(0)\sigma_{\pm}\}. \quad (3.4)$$

В линейном приближении по f и f^* имеем [3]

$$\langle \sigma_+ \rangle^t|_{t=0} = \beta(\sigma_+, \sigma_-)f. \quad (3.5)$$

Равновесная корреляционная функция (σ_+, σ_-) является частным случаем двухвременной корреляционной функции, которая определяется для произвольных гейзенберговских операторов $A(t)$ и $B(t')$ выражением

$$(A(t), B(t')) = \int_0^1 dx \langle \Delta A(t - i\beta x) \Delta B(t') \rangle, \quad (3.6)$$

где $\Delta A(t) = A(t) - \langle A \rangle$ и $\Delta B(t') = B(t') - \langle B \rangle$. Усреднение в формуле (3.6) производится с равновесной матрицей плотности составной системы

$$\varrho_{SB}^{(\text{eq})} = \frac{e^{-\beta H}}{Z_{SB}^{(\text{eq})}}. \quad (3.7)$$

В любой момент времени $t > 0$ линейное приближение для среднего $\langle \sigma_+ \rangle^t$ имеет вид [3]

$$\langle \sigma_+ \rangle^t = \beta(\sigma_+(t), \sigma_-)f. \quad (3.8)$$

Исключая вспомогательное поле f в соотношениях (3.5) и (3.8), получаем

$$\langle \sigma_+ \rangle^t = \frac{(\sigma_+(t), \sigma_-)}{(\sigma_+, \sigma_-)} \cdot \langle \sigma_+ \rangle^t|_{t=0}. \quad (3.9)$$

Таким образом, линейный режим дефазировки в двухуровневой системе S полностью описывается корреляционной функцией операторов $\sigma_+(t)$ и σ_- в равновесном состоянии составной системы.

4. СПИНОВАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

В этом разделе мы получим точное выражение для временной корреляционной функции $(\sigma_+(t), \sigma_-)$ в модели (2.6).

Введем унитарный оператор

$$U = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_3 K\right), \quad (4.1)$$

где

$$K = 2 \sum_k \frac{1}{\omega_k} (g_k b_k^\dagger - g_k^* b_k) \quad (4.2)$$

– оператор, действующий только на состояния термостата. Для произвольного оператора A введем преобразованный оператор

$$\tilde{A} = U A U^{-1}. \quad (4.3)$$

Используя определение (4.1), получаем выражения для преобразованных бозонных операторов:

$$\tilde{b}_k = b_k - \frac{g_k}{\omega_k} \sigma_3, \quad \tilde{b}_k^\dagger = b_k^\dagger - \frac{g_k^*}{\omega_k} \sigma_3. \quad (4.4)$$

Очевидно, что $\tilde{\sigma}_3 = \sigma_3$, поэтому с помощью соотношений (4.4) легко находится преобразованный гамильтониан составной системы (2.6):

$$\tilde{H} = - \sum_k \frac{|g_k|^2}{\omega_k} + \frac{\omega_0}{2} \sigma_3 + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k \equiv E_0 + H_S + H_B. \quad (4.5)$$

Заметим, что преобразованный гамильтониан описывает *невозмущающие подсистемы*.

Рассмотрим теперь корреляционную функцию $(A(t), B(t'))$, где A и B – некоторые операторы. С помощью соотношений (4.3) и (4.5) легко проверить, что

$$(A(t), B(t')) = (\tilde{A}(t), \tilde{B}(t'))_0, \quad (4.6)$$

причем корреляционная функция в правой части вычисляется с матрицей плотности

$$\varrho_0 \equiv \tilde{\varrho}_{SB}^{(\text{eq})} = \varrho_S \otimes \varrho_B, \quad (4.7)$$

где

$$\varrho_S = \frac{e^{-\beta H_S}}{Z_S}, \quad \varrho_B = \frac{e^{-\beta H_B}}{Z_B}, \quad (4.8)$$

а зависимость от времени преобразованного оператора Гейзенберга определяется соотношением

$$\tilde{A}(t) = e^{it(H_S + H_B)} \tilde{A} e^{-it(H_S + H_B)}. \quad (4.9)$$

Применим формулу (4.6) к равновесной корреляционной функции $(\sigma_+(t), \sigma_-)$. Предварительно с помощью выражения (4.1) найдем правила преобразования для спиновых операторов: $\tilde{\sigma}_\pm = e^{\pm K} \sigma_\pm$. После этого формула (4.6) дает

$$(\sigma_+(t), \sigma_-) = \int_0^1 dx \langle \sigma_+(t - i\beta x) \sigma_- \rangle_S \langle e^{K(t - i\beta x)} e^{-K} \rangle_B, \quad (4.10)$$

где средние значения $\langle \cdot \rangle_S$ и $\langle \cdot \rangle_B$ находятся соответственно с матрицами плотности ϱ_S и ϱ_B , а представление Гейзенберга для операторов определяется гамильтонианами подсистем H_S и H_B .

Средние значения в правой части соотношения (4.10) точно вычисляются, так как для произвольного комплексного z имеем

$$\sigma_+(z) = e^{iz\omega_0} \sigma_+, \quad b_k(z) = e^{-iz\omega_k} b_k, \quad b_k^\dagger(z) = e^{iz\omega_k} b_k^\dagger, \quad (4.11)$$

а оператор (4.2) линеен по бозонным операторам b_k и $b_k^\dagger$. Опуская элементарные преобразования, приведем окончательное выражение для спиновой корреляционной функции:

$$(\sigma_+(t), \sigma_-) = \frac{e^{i\omega_0 t}}{e^{\beta\omega_0} + 1} \int_0^1 dx e^{\beta\omega_0 x - R(t - i\beta x)}, \quad (4.12)$$

где

$$R(z) = \sum_k \frac{4|g_k|^2}{\omega_k^2} \left[(1 - \cos(\omega_k z)) \operatorname{cth} \frac{\beta \omega_k}{2} + i \sin(\omega_k z) \right]. \quad (4.13)$$

Спектр мод термостата ω_k практически непрерывен. Поэтому, вводя спектральную плотность термостата $J(\omega)$ с помощью равенства

$$\sum_k 4|g_k|^2 f(\omega_k) = \int_0^\infty d\omega J(\omega) f(\omega), \quad (4.14)$$

мы можем записать формулу (4.13) в виде

$$R(z) = \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega^2} \left[(1 - \cos(\omega z)) \operatorname{cth} \frac{\beta \omega}{2} + i \sin(\omega z) \right]. \quad (4.15)$$

Полагая здесь $z = t - i\beta x$, из (4.12) получаем выражение

$$(\sigma_+(t), \sigma_-) = \frac{e^{i\omega_0 t}}{e^{\beta \omega_0} + 1} \int_0^1 dx e^{\beta \omega_0 x - F(t, x) + i\Phi(t, x)} \quad (4.16)$$

с действительными функциями

$$F(t, x) = \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega^2} \left[1 - e^{-\omega \beta x} - \frac{4 \operatorname{sh}^2(\omega \beta x / 2)}{e^{\beta \omega} - 1} \right] + \\ + \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega^2} \left[\frac{2 \operatorname{ch}(\omega \beta x)}{e^{\beta \omega} - 1} + e^{-\omega \beta x} \right] (1 - \cos(\omega t)), \quad (4.17)$$

$$\Phi(t, x) = \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega^2} \left[\frac{2 \operatorname{sh}(\omega \beta x)}{e^{\beta \omega} - 1} - e^{-\omega \beta x} \right] \sin(\omega t). \quad (4.18)$$

Подчеркнем, что в рамках модели (2.6) результат (4.16) является *точным*. Чтобы найти явную зависимость корреляционной функции от времени, требуется задать конкретное выражение для спектральной плотности термостата $J(\omega)$.

5. ДЕФАЗИРОВКА В ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ

Напомним, что согласно соотношению (3.9) спиновая корреляционная функция $(\sigma_+(t), \sigma_-)$ описывает процесс дефазировки в подсистеме S . Соотношение (3.9) удобно представить в форме

$$\langle \sigma_+ \rangle^t = e^{-\Gamma(t)} e^{i[\omega_0 t + \chi(t)]} \cdot \langle \sigma_+ \rangle^t|_{t=0}, \quad (5.1)$$

где $\Gamma(t)$ называется функцией дефазировки (decoherence function) [6]. Выражения для $\Gamma(t)$ и зависящего от времени фазового сдвига $\chi(t)$ легко найти с помощью формулы (4.16):

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{I_0^2}{I_c^2(t) + I_s^2(t)} \right], \quad \chi(t) = \operatorname{arctg} \frac{I_s(t)}{I_c(t)}, \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 dx e^{\beta\omega_0 x} e^{-F(0,x)}, \\ I_c(t) &= \int_0^1 dx e^{\beta\omega_0 x} e^{-F(t,x)} \cos[\Phi(t,x)], \\ I_s(t) &= \int_0^1 dx e^{\beta\omega_0 x} e^{-F(t,x)} \sin[\Phi(t,x)]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ранее функция дефазировки $\Gamma(t)$ в спин-бозонной модели (2.6) вычислялась для начального состояния (3.1), в котором отсутствуют статистические корреляции между подсистемой S и термостатом [6], [10], [11], а для спектральной плотности термостата $J(\omega)$ использовалось модельное выражение

$$J(\omega) = \lambda \omega e^{-\omega/\Omega}, \quad (5.4)$$

где λ – безразмерная константа связи, а Ω – некоторая “обрезающая” частота для спектра мод термостата. В этом случае, если $\beta\Omega \gg 1$, функцию дефазировки удастся найти в явном виде (см., например, [6]):

$$\Gamma(t) = \frac{\lambda}{2} \ln(1 + \Omega^2 t^2) + \lambda \ln \left[\frac{\text{sh}(t/\tau_B)}{t/\tau_B} \right]. \quad (5.5)$$

Величина

$$\tau_B = \frac{\beta}{\pi} \equiv \frac{\hbar}{\pi k_B T} \quad (5.6)$$

– так называемое “тепловое время корреляции”. Первый член в формуле (5.5) соответствует “вакуумным” квантовым флуктуациям в термостате и является основным на временах $0 < t \ll \tau_B$. Второй член учитывает вклад тепловых возбуждений и определяет поведение функции дефазировки при $t \gtrsim \tau_B$.

Для коррелированного начального состояния зависимость функции дефазировки от времени является более сложной. Хотя явный вид $\Gamma(t)$ (см. формулу (5.2)) можно найти только численно, легко заметить некоторые важные качественные различия между процессами дефазировки в двух указанных случаях. Во-первых, для коррелированного начального состояния невозможно разделить в $\Gamma(t)$ вклады “вакуумных” флуктуаций и тепловых возбуждений термостата. Во-вторых, в этом случае поведение функции дефазировки зависит от значения параметра $\beta\omega_0$, который вообще не входит в выражение (5.5). Наконец, начальные корреляции между двухуровневой подсистемой и термостатом приводят к появлению зависящего от времени фазового сдвига $\chi(t)$ в недиагональных элементах матрицы плотности подсистемы. Наличие этого фазового сдвига может существенно влиять, например, на свойства квантовых регистров, состоящих из нескольких двухуровневых систем – кубитов [11], так как различие фазовых сдвигов $\chi(t)$ в кубитах является дополнительным механизмом дефазировки всего регистра.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели пример вычисления двухвременной корреляционной функции непосредственно в t -представлении без использования обычного подхода – построения цепочки уравнений для корреляционных функций высших порядков, зависящих

от частоты. Ключевым моментом, позволившим получить точное выражение для корреляционной функции в модели (2.6), является применение унитарного преобразования (4.3) с оператором (4.1), в результате чего задача свелась к вычислению средних для двух не взаимодействующих подсистем. В более общих спин-бозонных моделях (2.5) указанное унитарное преобразование не позволяет полностью исключить оператор взаимодействия в гамильтониане, однако оно может оказаться полезным для анализа тех моделей, где основное взаимодействие между динамической системой и термостатом описывается таким же оператором, как и в гамильтониане (2.6) (см., например, статью [4]). В подобных случаях преобразование корреляционных функций, аналогичное (4.6), упрощает применение теории возмущений по “остаточному” слабому взаимодействию. Мы планируем рассмотреть этот вопрос более подробно в отдельной работе.

Благодарности. Работа поддержана грантом Deutsche Forschungsgemeinschaft и Sonderforschungsbereich – Collective Research Center 652.

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов, *Докл. АН СССР*, **126**:1 (1959), 53–56.
- [2] Д. Н. Зубарев, *Неравновесная статистическая термодинамика*, Наука, М., 1971.
- [3] Д. Н. Зубарев, В. Г. Морозов, Г. Рёпке, *Статистическая механика неравновесных процессов*, Физматлит, М., 2002.
- [4] A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A. Garg, W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.*, **59**:1 (1987), 1–85; Erratum **67** (1995), 725–726.
- [5] U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, Ser. Modern Condens. Matter Phys. 10, World Scientific, Singapore, 1999.
- [6] H.-P. Breuer, F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.
- [7] M. O. Scully, M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [8] D. Bouwmeester, A. Ekert, A. Zeilinger (eds.), *The Physics of Quantum Information. Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum computation*, Springer, Berlin, 2000.
- [9] К. А. Валиев, *УФН*, **175**:1 (2005), 3–39.
- [10] W. G. Unruh, *Phys. Rev. A*, **51**:2 (1995), 992–997.
- [11] G. M. Palma, K.-A. Suominen, A. K. Ekert, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **452**:1946 (1996), 567–584.
- [12] L. Allen, J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-level Atoms*, Dover, New York, 1975.
- [13] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Wiley, New York, 1977.

Поступила в редакцию 8.03.2011