Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Рудой, Метод функций Грина Боголюбова–Тябликова в квантовой теории магнетизма, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 3, 536–550

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6699>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:16:45

© 2011 г.

Ю. Г. Рудой*

МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА БОГОЛЮБОВА–ТЯБЛИКОВА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МАГНЕТИЗМА

Дан краткий обзор полувекового периода (1959–2009 гг.) создания, развития и применения метода двухвременных температурных запаздывающих и опережающих функций Грина, введенных Н. Н. Боголюбовым и С. В. Тябликовым в 1959 г. Указанный метод далеко не исчерпал свои возможности, о чем свидетельствует его эффективная модификация, построенная Н. М. Плакидой в 1970 г. и Ю. А. Церковниковым в 1971 г., а затем в значительно более усовершенствованной форме Ю. А. Церковниковым в 1981 г. К настоящему времени на основе метода функций Грина в формулировке Боголюбова–Тябликова–Плакиды–Церковникова получено самосогласованное описание как одночастичных (поперечных), так и коллективных (продольных) функций Грина и корреляционных функций.

Ключевые слова: функции Грина, корреляционные функции, квантовая теория магнетизма.

К 90-летию со дня рождения Сергея Владимировича Тябликова

1. ВВЕДЕНИЕ

Автору настоящей статьи довелось проводить научную работу в области квантовой теории магнетизма под непосредственным руководством Сергея Владимировича Тябликова в период с мая 1961 г. по декабрь 1967 г., позднее – в период с 1971 г. по 1975 г. – продолжить ее совместно с Ю. А. Церковниковым и завершить циклом работ в 1976–1979 гг.

Цель статьи – дать сжатый ретроспективный очерк трех этапов развития квантовой теории магнетизма на основе метода функций Грина. Наибольшего развития этот метод достиг в работах Н. М. Плакиды и Ю. А. Церковникова в период с 1971 г. по 2008 г. Подробные сведения о методе функций Грина в квантовой теории магнетизма в период до 1965 г. включительно можно найти в монографии Тябликова [1], а за период с 1965 г. по 1975 г. – во втором (дополненном) издании указанной монографии [2]; подробный обзор современной литературы дан также в работе [3].

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия. E-mail: rudikar@mail.ru

В настоящей статье мы ограничимся в основном теми работами, которые были выполнены на основе метода двухвременных температурных запаздывающих и опережающих функций Грина учениками и сотрудниками Н.Н. Боголюбова и С.В. Тябликова на базе Отдела статистической механики Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР (с 1991 г. – РАН). Более полное представление о результатах, полученных в области квантовой теории магнетизма рядом других авторов как в России, так и за рубежом, можно получить по литературным ссылкам в цитируемых нами работах.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ГРИНА (1959 г.)

Метод двухвременных температурных запаздывающих и опережающих функций Грина был введен в 1959 г. Боголюбовым и Тябликовым [4] и быстро стал одним из наиболее широко применяемых методов теоретического описания в квантовой статистической механике и физике твердого тела. Ранний этап развития этого метода отражен, например, в обзоре Зубарева [5], а также в монографии Бонч-Бруевича и Тябликова [6]. Эффективность метода функций Грина в формулировке Боголюбова–Тябликова основана на его относительной простоте и универсальности, а также на возможности проведения гибких и в принципе достаточно хорошо контролируемых (в смысле оценки точности) аппроксимаций.

Напомним кратко основные положения метода. Пусть квантовая система описывается набором наблюдаемых – базисных операторов $A, B, H, \dots$ (не обязательно эрмитовых). Эти операторы образуют конечномерную алгебру с перестановочными соотношениями $[A, B]_{\pm} \equiv AB \pm BA$, где $[A, B]_{\pm}$ – (анти)коммутаторы. Квантовая динамика такой системы описывается уравнениями движения Гейзенберга $i\hbar\dot{A} = [A, H]_{-}$, где H – гамильтониан системы, а точка обозначает операцию дифференцирования по времени d/dt .

Квантовое уравнение движения обычно имеет вид

$$i\hbar\dot{A} = [A, H]_{-} = \omega A + J, \quad (1)$$

где ω – c -число, имеющее смысл “собственной частоты”, тогда как J имеет, например, вид произведения двух или более операторов $A, B, \dots$.

Простейшая аппроксимация состоит в отбрасывании оператора взаимодействия J , что означает моделирование системы идеальным газом квазичастиц, рождение и уничтожение которых описывается операторами A и $A^{\dagger}$. Следующим естественным шагом является линеаризация оператора J и представление его в виде $J \approx (\Delta\omega)A$, где $\Delta\omega$ – c -число, зависящее от внешних параметров, например температуры термостата.

Это приближение принято называть приближением среднего поля для спектра (или, что не вполне точно, обобщенным приближением Хартри–Фока), в котором вводится эффективная частота $\tilde{\omega} = \omega + \Delta\omega$, где $\Delta\omega$ – ренормирующий фактор, описывающий усредненное воздействие системы на одну квазичастицу. В этом приближении газ квазичастиц остается идеальным, поскольку для индивидуальных возбуждений отсутствует затухание, а коллективные возбуждения в этом приближении вообще не могут быть описаны.

Метод функций Грина в формулировке Боголюбова–Тябликова открывает значительно более широкие возможности для построения аппроксимаций. Для каждой пары операторов в гейзенберговском представлении $A(t)$, $B(t')$ вводится зависящая от двух времен t , t' функция $G_{AB}^{\pm}(t, t') = \theta(t - t') \langle [A(t), B(t')]_{\pm} \rangle$. Квантовое уравнение движения для $G_{AB}^{\pm}(t, t')$ имеет вид (здесь и ниже полагаем $\hbar = 1$)

$$iG_{AB}^{\pm}(t, t') = \delta(t - t') \langle [A(t), B(t')]_{\pm} \rangle + G_{(i\dot{A})B}^{\pm}(t, t'), \quad (2)$$

$$\delta(t - t') = \frac{d}{dt}\theta(t - t') = -\frac{d}{dt'}\theta(t - t');$$

аналогичный результат (с заменой $\dot{A}$ в правой части (2) на $-\dot{B}$) имеет место и при дифференцировании $G_{AB}^{\pm}(t, t')$ по “второму времени” t' . Одновременный (при $t = t'$) усредненный (анти)коммутатор $\langle [A, B]_{\pm} \rangle$ играет роль неоднородного члена (источника) в дифференциальном уравнении (2).

Помимо временной квантовой динамики операторов A и B функция Грина $G_{AB}^{\pm}(t, t')$ определяется также и статистическими свойствами системы, которые описываются матрицей плотности ρ (вообще говоря, неравновесной). Символ $\langle \cdot \rangle$ в уравнении (2) означает операцию статистического усреднения в обычном смысле $\text{Sp } \rho \dots$, или в метрике Кубо–Мартина–Швингера¹⁾; при наличии в системе квантового вырождения усреднение следует проводить в смысле квазисредних Боголюбова [7].

В рамках равновесной теории в качестве ρ обычно используется нормированный статистический оператор фон Неймана–Гиббса $\rho = [1/Z(\beta)]e^{-\beta H}$, где $Z(\beta) = \text{Sp}\{e^{-\beta H}\}$ – статистическая сумма системы, $\beta = 1/k_B T$, T – абсолютная температура Кельвина, k_B – постоянная Больцмана; в этом случае H коммутирует с ρ , так что функция $G_{AB}^{\pm}(t, t')$ зависит от разности $t - t'$.

В результате фурье-преобразования по переменной $t - t'$ уравнение (2) принимает вид

$$EG_{AB}^{\pm}(E) = \langle [A, B]_{\pm} \rangle + G_{(i\dot{A})B}^{\pm}, \quad G(E) = \int G(t - t')e^{iE(t - t')} d(t - t'). \quad (3)$$

Проводя аналогичную процедуру для функций Грина $G_{(i\dot{A})B}^{\pm}(E)$ или $G_{A(-i\dot{B})}^{\pm}(E)$, нетрудно прийти к цепочке зацепляющихся уравнений (точнее говоря, тождеств), вообще говоря, бесконечного порядка. Для получения физической информации следует превратить эту бесконечную систему тождеств в конечную систему уравнений, что, в свою очередь, требует как-либо оборвать, или “расцепить”, эту систему.

Аналитическая структура функции Грина $G_{AB}^{\pm}(E)$ определяет энергетический спектр возбуждений системы; как правило, особенности функции Грина имеют характер комплексных полюсов, но могут быть и значительно сложнее (например, линия разреза и т. п.). Особую ценность методу функций Грина в формулировке Боголюбова–Тябликова придает наличие доказанной в работе [4] спектральной теоремы

$$K_{AB}(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (e^{\beta\hbar\omega} \pm 1)^{-1} \{G_{AB}^{\pm}(\omega + i\varepsilon) - G_{AB}^{\pm}(\omega - i\varepsilon)\}, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (4)$$

¹⁾ Более подробное обсуждение вопроса о возможном выборе метрики при усреднении см. ниже в разделе 5.

связывающей аналитическую структуру функций $G_{AB}^{\pm}(E)$ с одновременной корреляционной функцией $K_{AB} = \langle AB \rangle = \text{Sp}\{\rho AB\}$, зависящей от входящего в ρ параметра $\beta = 1/k_B T$.

Таким образом, метод функций Грина в формулировке Боголюбова–Тябликова обладает важным свойством внутренней самосогласованности динамических и термодинамических свойств, в большинстве других методов подобное согласование приходится проводить дополнительно. Выбор подходящих базисных операторов $A, B, \dots$, равно как и способ обрыва цепочки уравнений, полностью определяется физическими соображениями – в первую очередь, искомой точностью приближений.

Вычисления в методе двухвременных температурных функций Грина могут осложняться рядом факторов: например, если система не обладает эргодическими свойствами, когда операторы A и/или B являются интегралами движения и коммутируют с гамильтонианом H , имеем $G_{(i\dot{A})B}^{\pm}(E) = 0$. Тогда согласно (3) цепочка уравнений для $G_{AB}^{\pm}(E)$ обрывается на первом шаге и дает “фиктивный” нулевой полюс при $E = 0$.

Аналогично, если операторы A и B (анти)коммутируют друг с другом, т.е. $\langle [A, B]_{\pm} \rangle = 0$, то в силу (3) это также влечет появление “фиктивного” нулевого полюса. Наконец, наличие у системы каких-либо дополнительных “кинематических” ограничений (например, спиновых правил сумм) требует, чтобы результаты приближенного вычисления функций Грина были максимально совместимы с этими ограничениями.

3. ПЕРВЫЙ ПЕРИОД РАЗВИТИЯ МЕТОДА (1959–1968 гг.)

Квантовая теория магнетизма стала первой из областей физики, в которых применение метода двухвременных температурных запаздывающих и опережающих функций Грина оказалось наиболее продуктивным. основополагающая работа Тябликова [8] в этой области была выполнена практически одновременно с работой Боголюбова и Тябликова [4]. Эти работы вызвали большой резонанс в научном обществе, чему способствовал и первый в мировой литературе обзор Зубарева [5] по методу функций Грина в статистической физике.

Эффективность применения этого метода в квантовой теории магнетизма обусловлена тем, что перестановочные соотношения для спиновых операторов значительно сложнее, чем для бозе- и ферми-систем; для спиновых систем характерно также наличие кинематических ограничений, обусловленных конечной размерностью $2S + 1$ пространства спиновых состояний, где S – спиновое квантовое число.

Для спиновых операторов обычные методы приближенных вычислений средних значений и корреляционных функций – прежде всего диаграммная техника фейнмановского типа – нуждаются в модификации. Различные варианты подобной модификации были реализованы в работах Вакса, Ларкина, Пикина [9] и Изюмова, Скрыбина, Кассан-Оглы [10] (см. монографию [11] этих авторов), а в дальнейшем также Барьяхтара, Криворучко и Яблонского [12] (см. монографию [13] этих авторов).

Для произвольного квантового спинового числа S спиновые операторы образуют алгебру $SU(2)$, которая только в предельном случае $S \rightarrow \infty$ переходит в более простую алгебру Гейзенберга–Вейля $H(1)$ с бозевскими перестановочными соотношениями для одночастичных операторов рождения и уничтожения; в принципе возможны (и частично реализованы) также схемы, построенные на фермиевских операторах.

3.1. Низкие температуры и квазибозонные представления. В целях упрощения задач квантовой теории магнетизма в литературе неоднократно предпринимались попытки их “бозонизации”, наиболее известные из них можно найти в работах Гольштейна и Примакова [14], Дайсона [15] и Огучи [16], а также в работе Тябликова и Яковлева [17].

В этих работах и их дальнейших обобщениях строилась ренормированная одночастичная теория спиновых волн Блоха [18], причем наряду с динамикой спиновых моделей рассматривалась также их термодинамика при температурах, низких по сравнению с точкой Кюри T_C или Нееля T_N для ферро- или антиферромагнитных моделей. В этих условиях спиновая система гейзенберговского ферромагнетика весьма сходна с неидеальным газом магнонов, который характеризуется эффективным потенциалом взаимодействия.

Позднее Дембиньски [19] предложил в качестве алгебраической реализации спиновых операторов $S_f^\pm = S_f^x \pm iS_f^y$ и S_f^z (f – узел решетки, x, y, z – оси координат, $S \geq 1/2$ – спиновое квантовое число) однопараметрическое семейство нелинейных преобразований:

$$\begin{aligned} S_f^+ &= (2S)^{1/2} \varphi_f^{1-\lambda} a_f, & S_f^- &= (2S)^{1/2} S a_f^* \varphi_f^\lambda, & S_f^z &= S - n_f; \\ n_f &= a_f^* a_f, & [a_f^*, a_{f'}]_- &= \delta_{ff'}, & \varphi_f &= 1 - \frac{\varepsilon n_f}{2S}, & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Очевидно, что при $\lambda \neq 1/2$ это преобразование неунитарно, а бозе-операторы a_f^*, a_f сопряжены друг другу в смысле, отличном от обычного эрмитова сопряжения и требующем специального выбора метрики в гильбертовом пространстве состояний спиновой системы. Множитель ε (строго говоря, равный единице) может быть использован в качестве формального малого параметра при отношении $n_f/2S \ll 1$, малом в области низких температур ($\langle S_f^z \rangle = S$, $\langle n_f \rangle = 0$ при $T = 0$, $\langle S_f^z \rangle = 0$, $\langle n_f \rangle = 2S$ при $T = T_C$). При $\lambda \neq 0$ преобразование (5) является не только нелинейным, но иррациональным, и потому в практических приложениях оно требует разложения (вообще говоря, бесконечного) по степеням $\varepsilon n_f/2S$.

В наиболее употребительных случаях $\lambda = 1/2$ и $\lambda = 0$ преобразования (5) совпадают с преобразованиями Гольштейна–Примакова–Огучи и Дайсона–Малеева соответственно. При $\lambda = 1/2$ преобразование (5) является симметричным и унитарным, тогда как при $\lambda = 0$ – максимально несимметричным и неунитарным, но зато рациональным и потому единственным преобразованием, которое не требует разложения по $n_f/2S \ll 1$.

Из общих соображений следует, что физические результаты в квантовой теории магнетизма не должны зависеть от выбора конкретного квазибозонного представления (или, что то же самое, конкретного значения λ в (5)), приводящего к различным

модификациям потенциала взаимодействия магновов в исходном спиновом гамильтониане; к сожалению, в литературе еще недостаточно подобных вычислений²⁾.

3.2. Высокие температуры и термодинамическая теория возмущений.

В области высоких температур $T \geq T_c$ в теории магнетизма были давно известны полуфеноменологические подходы типа эффективного (“молекулярного”, среднего) поля Кюри–Вейсса (см., например, [21]), позволяющие в принципе описать явление фазового перехода (анти)ферромагнетизм–парамагнетизм и найти точку Кюри (Нееля). К этому же классу теорий относятся и более точные (“кластерные”) теории Бете–Паейрлса–Вейсса, а также высокотемпературные разложения Опеховского [22]. Эти разложения были позднее обобщены Рудым [23] на основе специального варианта диаграммной техники для спиновых операторов, развитого значительно ранее, чем в работах [9], [10].

Однако более или менее строгие и общие подходы к описанию фазовых переходов вообще, и магнитных фазовых переходов в частности, в тот период практически отсутствовали. Редкими исключениями на этом фоне можно считать работу Квасникова [24] по применению вариационного принципа Боголюбова для свободной энергии к расчету уравнения магнитного состояния в модели Изинга, а также построенную Ландау и Лифшицем [25] термодинамическую теорию фазовых переходов, в которой отсутствует различие между моделями Изинга и Гейзенберга. Заметим, что по своему физическому содержанию обе теории [24] и [25], по существу, эквивалентны приближению самосогласованного, или среднего поля Вейсса.

3.3. Приближение Тябликова. Актуальной задачей в квантовой теории магнетизма в течение многих лет оставалось построение самосогласованной теории гейзенберговского магнетика с произвольным спином, удовлетворительно описывающей области как низких, так и высоких температур (в том числе и температур $T \geq T_c$) при наличии внешнего магнитного поля $H \neq 0$. Эту задачу впервые удалось решить Тябликову [8] посредством правильно подобранного расщепления цепочки уравнений для одночастичной (поперечной) функции Грина; это приближение вошло в литературу под названием *расщепления Тябликова*.

Физическая идея приближения Тябликова состояла в том, что энергии блоховских спиновых волн $E_{\mathbf{k}}$ с квазиимпульсом $\mathbf{k}$ (без учета затухания) ренормировались множителем, равным спонтанной намагниченности $\sigma(T)$, где T – абсолютная температура, причем $\sigma(T) \rightarrow 1$ при $T \rightarrow 0$ и $\sigma(T) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow T_c$. Для $\sigma(T)$ в теории Тябликова получалось трансцендентное уравнение, аналогичное уравнениям для параметра порядка в теориях других вырожденных квантовых систем (например, сверхтекучести и сверхпроводимости).

Одной из трудностей, сопровождавших применение метода функций Грина в квантовой теории магнетизма на раннем этапе, было рассогласование приближения Тябликова со спин-волновой теорией Дайсона. Рассогласование имело место только для $S = 1/2$ и затрагивало всего одно слагаемое в низкотемпературных

²⁾Укажем в этой связи на работу автора [20], где искомая независимость результата от значения λ была доказана для коллективной функции Грина в динамическом приближении случайных фаз при $T \ll T_c$.

разложениях для спонтанной намагниченности $\sigma(T)$ изотропного гейзенберговского ферромагнетика.

Речь шла о том, с какого слагаемого – T^3 (С. В. Тябликов) или T^4 (Ф. Дайсон) – начинаются поправки, отличающие $\sigma(T)$ от разложения σ по полупелым степеням T (Ф. Блох). Анализ этого вопроса было отдано много усилий, и в одной из последних работ³⁾ Тябликова [27] (совместно Е. М. Сорокиной) был найден способ компенсации “кинематического” члена ($\sim T^3$) в рамках метода функций Грина; этот результат получил подтверждение также в ряде последующих работ (см. ниже раздел 4).

Работы в области квантовой теории магнетизма, выполненные методом функций Грина в период с 1959 г. по 1965 г., нашли освещение в монографии Тябликова [1]. В 1967 г. эта монография была переведена на английский язык, а в 1970 г. за эту монографию С. В. Тябликов был удостоен Государственной премии СССР (посмертно); второе издание этой монографии [2], существенно дополненное его коллегами и учениками, было опубликовано в 1975 г. Безвременный уход из жизни С. В. Тябликова в марте 1968 г. несколько приостановил деятельность в области применения метода двухвременных температурных функций Грина в квантовой теории магнетизма.

4. ВТОРОЙ ПЕРИОД РАЗВИТИЯ МЕТОДА (1970–1978 гг.)

4.1. Неприводимые функции Грина и массовый оператор. Новый импульс этой деятельности был придан работой Плакиды [28], где был получен аналог уравнения Дайсона, хорошо известного в диаграммной технике (современное состояние ее связи с методом функций Грина см. в статье Плакиды [29] в настоящем выпуске журнала). Этот результат был достигнут посредством более общего определения массового оператора и выделения неприводимой части функции Грина любого порядка за счет проведения всевозможных одно- и разновременных спариваний⁴⁾.

На этой основе Н. М. Плакида с сотрудниками построили самосогласованную теорию динамических и термодинамических свойств гейзенберговских ферромагнетиков с сильным (ангармоническим) спин-фононным взаимодействием. Результаты этих работ подробно изложены в обзоре Плакиды [31], а также в написанной им гл. V Дополнения к монографии [2]. Полученное в работе [28] выражение для массового оператора позволило выйти за рамки приближения Тябликова в одночастичной функции Грина и учесть флуктуации продольной компоненты спина в ренормирующем факторе для блоховских спиновых волн.

Аналогичный результат был также получен в работе Рудого [32], где было показано, что ренормировка блоховских спиновых волн определяется не только параметром дальнего порядка $\sigma(T)$ (что имеет место в приближении Тябликова), но и корреляционными функциями ближнего порядка – как поперечных, так и продольных компонент спина. Это особенно существенно в парамагнитной области температур выше точки Кюри, где наличие квазиколлективных спиновых волн подтверждено в экспериментах по рассеянию нейтронов.

³⁾Последняя работа Тябликова [26] была выполнена совместно с Г. Конвентом и посвящена спин-фононному взаимодействию.

⁴⁾Заметим, что обобщение теоремы Блоха–Вика, известной для бозе- и ферми-операторов, на случай операторов Паули было получено ранее Тябликовым и Москаленко в работе [30].

4.2. Формально точное решение. Другой способ перестройки цепочки уравнений для функций Грина был получен Церковниковым [33] посредством дифференцирования не по одному, а по обоим временам; особенно эффективен этот способ для однокомпонентной (скалярной) функции Грина, построенной на операторах A и B , подчиняющихся уравнениям движения вида (1).

Согласно работе [33] уравнение движения (2) можно рассматривать в исходном временном представлении, записав его формально в виде дифференциального уравнения первого порядка по t (для простоты записи мы опускаем здесь индексы $\pm$ и полагаем $t' = 0$)

$$\begin{aligned} i\dot{G}_{AB}(t) &= \delta(t)\langle[A, B]\rangle + \{\omega_A + R_{AB}(t)\}G_{AB}(t), \\ R_{AB}(t) &= \langle[J_A(t), B]\rangle\langle[A(t), B]\rangle^{-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $R_{AB}(t)$ – коэффициент, зависящий от t , вообще говоря неизвестный. Формальное решение уравнения (6) первого порядка по t выражается через интеграл Дюамеля:

$$G_{AB}(t) = -i\theta(t)\langle[A, B]\rangle e^{-itE_{AB}(t)}, \quad E_{AB}(t) = \omega_A + \frac{1}{t} \int_0^t d\tau R_{AB}(t - \tau), \quad (7)$$

или, после интегрирования по частям,

$$\begin{aligned} E_{AB}(t) &= \Omega_A + \frac{1}{t} \int_0^t d\tau \tau \frac{d}{d\tau} R_{AB}(t - \tau), \\ \Omega_A &= \omega_A + R_{AB}(0) = \omega_A + \langle[J_A, B]\rangle\langle[A, B]\rangle^{-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

причем

$$-i \frac{d}{d\tau} R_{AB}(t - \tau) = \frac{\langle[J_A(t), B]\rangle}{\langle[A, B]\rangle} - \frac{\langle[J_A(t), B]\rangle}{\langle[A, B]\rangle} \frac{\langle[A, J_B(t)]\rangle}{\langle[A, B]\rangle}. \quad (9)$$

Существенно, что $E_{AB}(t)$ в (8) имеет смысл обычной комплексной энергии возбуждения только в пределе $t \rightarrow \infty$, причем именно учет зависимости $E_{AB}(t)$ при всех t дает вклад в термодинамические величины, позволяющий, в частности, учесть кинематические (небозевские) свойства спиновых операторов.

Заметим, что посредством формально точного решения (7)–(9) нельзя представить матричную функцию Грина, построенную на векторных операторах $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots)$ и $\mathbf{A}^+ = (A_1^+, A_2^+, \dots)^{\text{tr}}$, где tr обозначает операцию транспонирования вектор-строки в вектор-столбец; обобщение на этот случай было дано Ю. А. Церковниковым в работе [34].

На базе работы [33] Рудым и Церковниковым в течение 1973–1975 гг. был выполнен цикл работ [35]–[38], в которых на основе одночастичной функции Грина была построена теория анизотропного гейзенберговского ферромагнетика типа “легкая ось” (скалярный вариант) и типа “легкая плоскость” (матричный вариант размерности 2×2) как в продольном, так и в поперечном внешнем магнитном поле. Для всех этих случаев построено самосогласованное приближение Тябликова, эквивалентное приближению среднего поля для спектра и описывающее фазовый переход.

Как показано в [35] (см. также [3], § 7, гл. 1 Дополнения), в частном (но наиболее важном) случае $S = 1/2$, когда A и $B = A^\dagger$ – операторы Паули со свойством

$\langle [A, A^\dagger] \rangle = 2\sigma$, вклад интегрального члена в (8) при конечных временах в точности компенсирует кинематический вклад в уравнение магнитного состояния, приводящий к появлению в нем недайсоновского члена ($\sim T^3$), так что теория Дайсона [15] сохраняет справедливость. Заметим, что эта теория в настоящее время сохраняет значение эталонной для модели Гейзенберга в области низких температур $T/T_c \ll 1$, поскольку по сделанным в работах [15] оценкам вклад нефизических состояний в этой области экспоненциально мал по параметру T/T_c .

Таким образом, оказывается, что небозевская кинематика может играть существенную роль в термодинамике спиновых систем, в особенности при низких температурах $T \ll T_c$, когда формальным малым параметром является не взаимодействие между возбужденными спиновыми волнами, а их полное число $n(T) \ll 1$.

Далее, в работе [36] в рамках метода функций Грина было показано, что более точная, чем в [35], оценка интегрального члена в (8) приводит к интегральному уравнению для T -матрицы двухчастичного рассеяния магнонов, причем это уравнение эквивалентно результатам теории Дайсона (см. также [3], § 3, 4, гл. 3 Дополнения). При этом не возникает необходимости в использовании неунитарного преобразования Дайсона–Малеева, приводящего к неэрмитову квазибозонному гамильтониану (см. раздел 3); указанное преобразование дает динамическую реализацию кинематических свойств спиновых операторов, полностью оправданную в области низких температур.

В работах [37], [38] была рассмотрена модель гейзенберговского магнетика типа “легкая плоскость”, причем в отсутствие внешнего поля в работе [37] был предложен способ исключения щели в одночастичном спектре элементарных возбуждений. Это необходимо в свете требований теоремы Голдстоуна–Боголюбова с учетом того, что модель магнетика типа “легкая плоскость” изоморфна модели вырожденного слабо неидеального бозе-газа. Согласно теореме Гугенгольца–Пайнса щель для указанной модели является “нефизической”, и в рамках метода функций Грина она была исключена в работе Церковникова [39] за счет учета вкладов уравнений цепочки более высокого порядка.

Несколько позднее, в течение 1974–1978 гг., в цикле работ Рудого и Лымаря [40] аналогичная методика была применена для описания анизотропного гейзенберговского антиферромагнетика, а также слабо ферромагнетика с учетом взаимодействия Мория–Дзялошинского; в этих работах удалось построить приближение Тябликова как для спин-флуп, так и для парамагнитной фазы.

Основные результаты двух указанных циклов работ по квантовой теории магнетизма, выполненных методом двухвременных функций Грина, нашли отражение в Дополнении ко второму изданию монографии Тябликова [2], вышедшей в 1975 г. Несколько ранее Рудым [3] был опубликован обзор по применению этого метода, охватывающий более чем 200 отечественных и зарубежных работ.

5. ТРЕТИЙ ПЕРИОД РАЗВИТИЯ МЕТОДА (1979–2009 гг.)

Третьим периодом развития метода функций Грина в формулировке Боголюбова–Тябликова и его применения в квантовой теории магнетизма можно считать период с 1979 г. по 2009 г., когда проводилось систематическое изучение не только

теорий первого порядка для одночастичной функции Грина поперечных компонент спина, но и теорий более высокого порядка для них.

Кроме того, в этот период рассматривалась также и коллективная функция Грина продольных компонент спина; в частности, практически одновременно вышли посвященные этой проблеме цикл из четырех работ Рудого [41], [20] и работа Церковникова [42]. В работе [20] рассматривался вопрос о том, не может ли в результате λ -модифицированного взаимодействия между магнонами возникнуть коллективное возбуждение типа “нулевого магнона”, связанного с осцилляциями спиновой плотности. Ответ оказался отрицательным, поскольку в результате преобразования Дембиньского (5) при любом λ эффективный потенциал при малых импульсах сохраняет характер короткодействующего отталкивания. Заметим, что в конденсированных бозе- и ферми-системах подобное взаимодействие имеет, напротив, характер притяжения и может привести к возникновению нулевого звука или плазменного колебания при низких температурах.

5.1. Обобщенный метод функций Грина в формулировке Церковникова. В цикле работ Церковникова [42]–[45], выполненном в период с 1979 г. по 2008 г., был успешно преодолен ряд трудностей, присущих первоначальной формулировке метода функций Грина (см. в этой связи также статью Плакиды [29] в этом выпуске журнала). Существенное продвижение стало возможным благодаря объединению нескольких альтернативных подходов, построенных на различных видах двухвременных корреляционных функций, которые удовлетворяют уравнениям с различными начальными условиями.

Полезный анализ этого круга вопросов дан в работах Калашникова [46], который одним из первых обратил внимание на различную алгебраическую структуру функций отклика, или, что то же самое, линейных адмиттансов, на механические и термические возмущения, а также на структуры массовых операторов соответствующих функций Грина в статическом пределе $E \rightarrow 0$.

В частности, имеет место простая связь между коммутаторной запаздывающей функцией Грина $G_{AB}^-(t, t')$ и функцией релаксации Кубо $\chi_{AB}^S(t)$, имеющей смысл функции адиабатического (изэнтропического, $S = \text{const}$) отклика изолированной системы:

$$\chi_{AB}^S(t) = i \int_{-\infty}^{\infty} G_{AB}^-(t, t') dt' = i \int_t^{\infty} \langle [A(t), B(t')]_- \rangle dt'. \quad (10)$$

Для замыкания цепочки уравнений для функций Грина в ряде случаев нужны одновременные корреляционные функции, описываемые функцией χ_{AB}^T , которая имеет смысл изотермического ($\beta = (k_B T)^{-1} = \text{const}$) отклика открытой системы в тепловом равновесии с термостатом [47]:

$$\chi_{AB}^T(\beta) = \int_0^{\beta} \langle A(0)B(i\tau) \rangle d\tau. \quad (11)$$

Функции восприимчивости (10) и (11) связаны простым и важным соотношением⁵⁾

$$\chi_{AB}^T - \chi_{AB}^S = C_{AB}(\beta), \quad C_{AB}(\beta) = \beta \lim_{t' - t \rightarrow \infty} \langle B(t')A(t) \rangle, \quad (12)$$

⁵⁾ Проблема, обусловленная различием восприимчивостей χ^S и χ^T , имеет длительную историю, восходящую к 1930-м годам, и связана с именами Х. Казимира, Ф. Дюпре и Л. Розенфельда (см., например, [48]).

причем наличие у системы свойства эргодичности обращает в нуль величину C_{AB} . Кроме того, после перехода в фурье-представление для обеих функций восприимчивости (10) и (11) и для $G_{AB}^-(t, t')$ имеются полезные соотношения:

$$G_{AB}^-(E = 0) = -\chi_{AB}^S, \quad \chi_{AB}^S(E) = \frac{1}{E} \{G_{AB}^-(E) - G_{AB}^-(E = 0)\}. \quad (13)$$

Использование функций χ_{AB}^T наряду с χ_{AB}^S и G_{AB}^- в уравнениях движения (в t -или E -представлении) особенно целесообразно в качестве начального условия в том случае, если операторы A и B коммутируют, например когда $A = S_q^z$, $B = S_{-q}^z$, где S_q^z – оператор z -компоненты спина в импульсном представлении. В этом случае целесообразно использование антикоммутаторных функций Грина G_{AB}^+ наряду с коммутаторными G_{AB}^- , поскольку $C_{AB} = \pi \lim [\omega G_{AB}^+(\omega)]$ при $\omega \rightarrow 0$; вычет $G_{AB}^+(\omega)$ в точке $\omega = 0$ отличен от нуля лишь при наличии у G^+ в этой точке полюса.

Соответствующий формализм в рамках двухвременных температурных функций Грина был развит Церковниковым в работе [49]; итог большого цикла работ Церковникова [32]–[34], [42]–[44], [49] был подведен им в совместном с Зубаревым обзоре [50] (в настоящее время значительная часть работ Церковникова доступна в сборнике статей [51]).

5.2. Корреляционные функции как скалярные произведения. Эффективность использования функций χ_{AB}^S и χ_{AB}^T в значительной мере обусловлена тем, что обе эти функции, построенные на парах операторов A и B , обладают свойствами скалярных произведений. В отношении величины χ_{AB}^T этот факт был установлен Мори [52], а в отношении χ_{AB}^S в форме $G_{AB}^-(E = 0)$ – Боголюбовым ([7], § 5). Соотношение (12) и его физическая интерпретация в терминах набора интегралов движения были установлены в работе Сузуки [53].

Как показано в работе Рудого [54], величины χ_{AB}^S и χ_{AB}^T представляют собой частные случаи выбора метрики для пары операторов A и B , входящих в гильбертову алгебру наблюдаемых данной физической системы. Так, величина χ_{AB}^T из (11) соответствует метрике Боголюбова–Кубо–Мори, имеющей смысл интегральной (глобальной), для однопараметрического семейства λ -метрик, или равновесных квантовых корреляционных функций

$$K_{AB}(\lambda) = \text{Sp } \rho^\lambda A \rho^{1-\lambda} B, \quad K_{AB}(\lambda) = K_{BA}(1 - \lambda), \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}. \quad (14)$$

Это семейство метрик было предложено Вигнером, Яназе и Дайсоном (см. [55]), причем если хотя бы один из операторов A , B является интегралом движения, т. е. коммутирует с гамильтонианом H (и, следовательно, с ρ), то зависимость от λ в (14) исчезает. В этом случае $K_{AB}(\lambda) \equiv K_{AB}(0)$, так что метрика Вигнера–Яназе–Дайсона совпадает с обычно используемой метрикой Кубо–Мартини–Швингера $K_{AB}(0) = \text{Sp } \rho AB$.

Однако если ни один из операторов A , B не является интегралом движения, то зависимость от параметра λ в (14) имеет место и становится возможным как дифференцирование, так и интегрирование по этому параметру, причем

$$\int d\lambda K_{AB}(\beta; \lambda) = K_{FB}(\beta; \lambda), \quad A = [F, H]_-, \quad (15)$$

что дает интегральное представление коммутатора (тождество Кубо). Для скалярного произведения (метрики) Боголюбова–Кубо–Мори тогда находим

$$K_{AB}(\beta) \equiv -\beta \chi_{AB}^T(\beta) = \int_0^1 d\lambda K_{AB}(\beta; \lambda) = K_{FB}(\beta; 1) - K_{FB}(\beta; 0). \quad (16)$$

Величина $\chi_{AB}^T(\beta)$ согласно Кубо [47] и Мори [51] представляет собой изотермический “отклик” физической системы, состояние которой описывается оператором $\rho(\beta) = e^{-\beta H}$, на малое возмущение гамильтониана $H \rightarrow H(\varepsilon) = H + \varepsilon A$, $\varepsilon \ll 1$. В качестве “отклика” обычно рассматривается вариация среднего значения $\delta\langle B^\dagger \rangle = \text{Sp } \delta\rho(\beta) B^\dagger$, где $\delta\rho(\beta) = e^{-\beta H(\varepsilon)} - e^{-\beta H}$. В низшем по ε приближении имеем $\delta\langle B^\dagger \rangle \approx \chi_{AB}^T(\beta)$, что служит определением обобщенной изотермической ($\beta = \text{const}$) восприимчивости $\chi_{AB}^T(\beta)$. С другой стороны, разность экспоненциальных операторов $\delta\rho(\beta)$ в том же приближении выражается интегралом Дюамеля с $dH(\varepsilon)/d\varepsilon = A$, откуда для $\chi_{AB}^T(\beta)$ следует выражение (16).

Понятие обобщенных операторных метрик (14) и (16) становится особенно полезным в сочетании с методом функций Грина в формулировке Боголюбова–Тябликова, прежде всего с их спектральным представлением

$$G_{AB}^{(\eta)}(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega J_{AB}^{(\eta)}(\omega; \beta, 0) \frac{e^{\beta\hbar\omega} + \eta}{E - \omega}, \quad \delta\langle B^\dagger \rangle = -2\pi G_{AB}^{(-)}(0), \quad \eta = -1. \quad (17)$$

Один из основных результатов работы Боголюбова ([7], § 5) состоит в том, что нулевые фурье-образы функций Грина $G_{AB}^{(-)}(0)$ удовлетворяют аксиоматике комплексного скалярного произведения на алгебре операторов A , B , а пропорциональность $G_{AB}^{(-)}(0)$ вариации среднего значения $\delta\langle B^\dagger \rangle$ в соответствии с (13) позволяет просто перенести эту аксиоматику не только на восприимчивости χ_{AB}^T , но и на общий случай $K_{AB}(\lambda)$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе дан краткий обзор хронологии создания, развития и применения метода двухвременных температурных запаздывающих и опережающих функций Грина, предложенного полвека назад Боголюбовым и Тябликовым [4]. Содержание обзора указывает на то, что потенциальные возможности этого метода в квантовой статистической механике, и прежде всего в квантовой теории магнетизма, далеко не исчерпаны. Неудивительно, что за полувековой период произошло интенсивное развитие вычислительных приемов в методе функций Грина с учетом дополнительных правил сумм, например кинематических ограничений для спиновых операторов.

Следует особо отметить, что несмотря на указанный прогресс оригинальное приближение Тябликова обладает рядом полезных интерполяционных свойств, преимуществом физической наглядности и математической простоты и по-прежнему сохраняет актуальность (см., например, [56]). В частности, приближение Тябликова оказывается эффективным не только для исходной трехмерной изотропной идеальной модели Гейзенберга, но и для описания низкоразмерных [57], [58] и примесных [59], [60] магнетиков.

Выход за рамки приближения Тябликова позволяет воспроизвести результаты приближения взаимодействующих мод для коллективной функции Грина гейзенберговского ферромагнетика как в ферро-, так и в парамагнитной областях температур [45], [29].

В последние годы с помощью существенной модификации метода функций Грина Ю. А. Церковниковым был также получен ряд ярких результатов в молекулярной гидродинамике неидеального вырожденного бозе-газа. Эти результаты, которые можно найти в монографии [51], дают микроскопическое обоснование полуфеноменологических теорий, в том числе так называемой двухжидкостной гидродинамики жидкого гелия.

Идеи и методы, разработанные в ходе развития квантовой теории магнетизма, особенно в период с 1979 г. по настоящее время, представляют значительный интерес для других областей квантовой статистической механики. Сюда следует отнести прежде всего создание развитой техники вычислений со спиновыми операторами и операторами Хаббарда, перестановочные соотношения для которых существенно отличаются от фермиевских и бозевских. В частности, весьма полезной оказалась надежно установленная эквивалентность метода функций Грина и диаграммной техники фейнмановского типа для указанных типов операторов.

Существенна также восходящая к Дираку и Гейзенбергу идея, развитая в дальнейшем Дайсоном и Боголюбовым, о том, что при определенных условиях частичный учет кинематических ограничений возможен посредством добавления дополнительных динамических слагаемых в гамильтониан, который может становиться при этом неэрмитовым с соответствующим переопределением пространства допустимых состояний.

Наконец, все более актуальной становится проблема “бозонизации”, т. е. представление через бозонные генераторы группы Гейзенберга–Вейля $H(1)$ не только спиновых операторов (генераторов группы $SU(2)$), но и генераторов других групп и алгебр Ли, в том числе так называемых квантовых, или деформированных, алгебр (см., например, Дамаскинский, Кулиш [60], Борзов, Дамаскинский [61]).

Как показано в работе Рудого [54], существенную пользу при работе в деформированных λ -метриках приносит заимствованное из метода функций Грина спектральное представление для квантовых корреляционных функций. На этой основе может быть получен ряд интересных оценок, в частности касающихся обобщенного соотношения неопределенностей Гейзенберга–Робертсона–Шредингера.

Список литературы

- [1] С. В. Тябликов, *Методы квантовой теории магнетизма*, Наука, М., 1965.
- [2] С. В. Тябликов, *Методы квантовой теории магнетизма*, 2-е изд., испр. и дополн., Наука, М., 1975.
- [3] Ю. Г. Рудой, “Современное состояние метода двухвременных функций Грина в квантовой теории магнетизма”, *Статистическая физика и квантовая теория поля*, ред. Н. Н. Боголюбов, Наука, М., 1973, 97–164.
- [4] Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов, *ДАН СССР*, **126** (1959), 53–56.
- [5] Д. Н. Зубарев, *УФН*, **71**:1 (1960), 71–116.
- [6] В. Л. Бонч-Бруевич, С. В. Тябликов, *Метод функций Грина в статистической механике*, Физматлит, М., 1961.

- [7] Н. Н. Боголюбов, *Квазисредние в задачах статистической механике*, Препринт Д-781, ОИЯИ, Дубна, 1961; *Собрание научных трудов в 12 т.*, т. 6: *Равновесная статистическая механика*, 1945–1986, Наука, М., 2006, 236–327.
- [8] С. В. Тябликов, *Укр. матем. журн.*, **11** (1959), 287–294.
- [9] В. Г. Вакс, А. И. Ларкин, С. А. Пикин, Препринт ИАЭ-1312, ИАЭ, М., 1967; *ЖЭТФ*, **53** (1967), 281–299.
- [10] Ю. А. Изюмов, Ф. А. Кассан-Оглы, *ФММ*, **26**:3 (1968), 385–398; **30**:2 (1970), 225–234; **30**:3 (1970), 449–458.
- [11] Ю. А. Изюмов, Ф. А. Кассан-Оглы, Ю. Н. Скрябин, *Полевые методы в теории магнетизма*, Наука, М., 1974.
- [12] В. Г. Барьяхтар, В. Н. Криворучко, Д. А. Яблонский, *ТМФ*, **56**:1 (1983), 149–153.
- [13] В. Г. Барьяхтар, В. Н. Криворучко, Д. А. Яблонский, *Функции Грина в теории магнетизма*, Наукова думка, Киев, 1984.
- [14] Т. Holstein, Н. Primakoff, *Phys. Rev. Lett.*, **58**:12 (1940), 1098–1113.
- [15] F. Dyson, *Phys. Rev.*, **102**:5 (1956), 1217–1230; 1230–1244; *Проблемы современной физики*, **2** (1958), 101–129.
- [16] Т. Oguchi, *Phys. Rev.*, **117**:1 (1960), 117–123.
- [17] С. В. Тябликов, Е. Н. Яковлев, *Докл. АН СССР*, **144**:2 (1962), 303–306; *ФТТ*, **5**:1 (1963), 137–141.
- [18] F. Bloch, *Z. Phys.*, **61**:3–4 (1930), 206–219.
- [19] S. T. Dembiński, *Physica*, **30**:6 (1964), 1217–1224.
- [20] Ю. Г. Рудой, *ФНТ*, **5**:4 (1979), 369–379.
- [21] Дж. Сمارт, *Эффективное поле в теории магнетизма*, Мир, М., 1968.
- [22] W. Opechowski, *Physica*, **4**:2 (1937), 181–199; **6**:7–12 (1939), 1112–1121.
- [23] Ю. Г. Рудой, *Высокотемпературные разложения в теории ферромагнетизма*, Препринт Т-07771, МИАН, М., 1964.
- [24] И. А. Квасников, *Докл. АН СССР*, **110**:5 (1956), 755–757.
- [25] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1982.
- [26] С. В. Тябликов, Г. Конвент, Препринт Р4-3794, ОИЯИ, Дубна, 1968; Н. Konwemt, *Phys. Lett. A*, **28**:3 (1968), 237–238.
- [27] С. В. Тябликов, Е. М. Сорокина, *ФММ*, **24** (1967), 200–206.
- [28] Н. М. Плакида, *ТМФ*, **5**:1 (1970), 147–153; **12**:1 (1972), 135–146.
- [29] Н. М. Плакида, *ТМФ*, **168**:3 (2011), 519–536.
- [30] С. В. Тябликов, В. А. Москаленко, *Докл. АН СССР*, **158** (1964), 839–842.
- [31] Н. М. Плакида, “Метод двухвременных функций Грина в теории ангармонических кристаллов”, *Статистическая физика и квантовая теория поля*, ред. Н. Н. Боголюбов, Наука, М., 1973, 205–240.
- [32] Ю. Г. Рудой, *ТМФ*, **26**:3 (1976), 387–396.
- [33] Ю. А. Церковников, *ТМФ*, **7**:2 (1971), 250–261.
- [34] Ю. А. Церковников, *ТМФ*, **23**:2 (1975), 221–237.
- [35] Ю. Г. Рудой, Ю. А. Церковников, *ТМФ*, **14**:1 (1973), 102–122.
- [36] Ю. Г. Рудой, Ю. А. Церковников, *ТМФ*, **15**:3 (1973), 388–406; **27**:2 (1976), 279–280.
- [37] Ю. Г. Рудой, Ю. А. Церковников, *ТМФ*, **19**:2 (1974), 252–268.
- [38] Ю. Г. Рудой, Ю. А. Церковников, *ТМФ*, **25**:2 (1975), 196–212.
- [39] Ю. А. Церковников, *Докл. АН СССР*, **143**:4 (1962), 832–835.
- [40] В. И. Лымарь, Ю. Г. Рудой, *ТМФ*, **21**:1 (1974), 86–102; **24**:3 (1975), 391–399; **30**:2 (1977), 249–263; **34** (1978), 217–231.
- [41] Ю. Г. Рудой, *ТМФ*, **39**:2 (1979), 234–251; **40**:1 (1979), 633–640.
- [42] Ю. А. Церковников, *ТМФ*, **40**:2 (1979), 251–268.

- [43] Ю. А. Церковников, *ТМФ*, **49**:2 (1981), 219–233.
- [44] Ю. А. Церковников, *ТМФ*, **52**:1 (1982), 147–160.
- [45] Ю. А. Церковников, *ТМФ*, **154**:1 (2008), 197–206.
- [46] В. П. Калашников, *Динамическая теория изотермического отклика на механическое возмущение и функции Грина*, Препринт Р4-7803, ОИЯИ, Дубна, 1974; *ТМФ*, **34** (1978), 412–423.
- [47] R. Kubo, K. Tomita, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **9**:6 (1954), 888–919.
- [48] R. M. Wilcox, *Phys. Rev. Lett.*, **174**:2 (1968), 624–629.
- [49] Ю. А. Церковников, *ТМФ*, **50**:2 (1982), 261–271.
- [50] Д. Н. Зубарев, Ю. А. Церковников, “Метод двухвременных температурных функций Грина в равновесной и неравновесной статистической механике”, *Теоретическая и математическая физика*, Сборник обзорных статей (к 50-летию Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР), Тр. МИАН СССР, **175**, ред. С. М. Никольский, В. С. Владимиров, Наука, М., 1986, 134–177.
- [51] Ю. А. Церковников, *Статистическая механика. Избранные труды*, Янус-К, М., 2010.
- [52] H. Mori, *Progr. Theor. Phys.*, **33**:3 (1965), 423–455.
- [53] M. Suzuki, *Physica*, **51**:2 (1971), 277–291.
- [54] Ю. Г. Рудой, *ТМФ*, **160**:2 (2009), 352–369.
- [55] E. P. Wigner, M. M. Yanase, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **49**:6 (1963), 910–918.
- [56] G. F. Kventsels, J. Katriel, *Phys. Rev. B*, **32**:3 (1985), 1767–1771; *Phys. Rev. A*, **34**:1 (1986), 518–523.
- [57] D. A. Yablonskiy, *Phys. Rev. B*, **44**:9 (1991), 4467–4472.
- [58] Y. Chen, Y. Xiang, C.-C. Song, *Commun. Theor. Phys.*, **54**:4 (2010), 747–752.
- [59] М. В. Медведев, *ФММ*, **106**:5 (2008), 461–470.
- [60] Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, “Деформированные осцилляторы и их приложения”, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики* 10, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **189**, ЛОМИ, Л., 1991, 37–74.
- [61] В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, “Когерентные состояния для обобщенного осциллятора в конечномерном гильбертовом пространстве”, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики* 19, Зап. научн. сем. ПОМИ, **335**, ПОМИ, СПб., 2006, 75–99.

Поступила в редакцию 14.03.2011