Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Кувшинов, В. В. Мармыш, В. А. Шапоров, Связь и эволюция сжатия и неустойчивости для систем с квадратичными гамильтонианами, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 3, 477–490

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf67>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:18:47

© 2004 г. В. И. Кувшинов*, В. В. Мармыш†, В. А. Шапоров*

СВЯЗЬ И ЭВОЛЮЦИЯ СЖАТИЯ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМИ ГАМИЛЬТониАНАМИ

Предложен подход, позволяющий связать эффект квантового сжатия и классической неустойчивости путем установления уравнений эволюции для элементов матрицы дисперсии, в которые непосредственно входят элементы матрицы устойчивости. Решение этих уравнений записано через оператор эволюции, знание которого позволяет проанализировать неустойчивость системы на конечных временах. На основе развитого формализма исследованы две физические системы: параметрические вырожденный и невырожденный усилители с внешними δ -образными толчками. Показано, что с помощью δ -ударов можно усилить или, наоборот, ослабить как эффект сжатия, так и неустойчивость системы.

Ключевые слова: сжатие, неустойчивость, матрица устойчивости, матрица дисперсии, оператор эволюции, показатель Ляпунова.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных проблем современной физики является описание неустойчивых систем, эволюция которых хаотична. К настоящему времени достигнут значительный прогресс в понимании хаоса: от классических систем с несколькими степенями свободы [1] до квантовой теории поля [2]. Актуальность таких исследований связана с тем фактом, что все четыре фундаментальных взаимодействия имеют хаотические решения. Следствия хаоса наблюдаются, в частности, в квантовой механике (например, квантовое туннелирование, сопровождаемое хаосом [3]), в ядерной физике [4], в физике высоких энергий [5], [6] и в теории поля [7], [8].

Выявление критериев хаоса для квантовых систем [9]–[13] по аналогии с классическими [9], [14]–[17] представляет собой непростую задачу, поскольку основное понятие, расхождение траекторий, при хаотическом движении теряет смысл. Сопоставление волнового пакета классической траектории также носит ограниченный характер, и при этом кроме движения самого пакета необходимо учитывать эволюцию его ширины. Если неопределенность по координате со временем увеличивается, то при этом может

*Институт физики НАНБ, Минск, Беларусь. E-mail: kuvshino@dragon.bas-net.by;
shaporov@dragon.bas-net.by

†Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. E-mail: theorist@rambler.ru

уменьшаться дисперсия по импульсу. Такая возможность существует для сжатых состояний [18].

Начиная с середины 80-х годов сжатые состояния вызывают большой интерес в связи с их необычными свойствами [18]–[21] и находят практическое применение при создании оптических коммуникаций, постановки опытов по детектированию гравитационных волн и т.п. Это связано с тем, что уровень шума сигнала в одной из квадратурных компонент меньше, чем для когерентного состояния.

Генерация сжатых состояний в системе с хаотической динамикой была рассмотрена в работе [22]. На основе метода $(1/N)$ -разложения [23], [24] (N – число мод или частиц) в квазиклассическом пределе в работах [25]–[27] было показано, что при переходе от регулярного движения к хаотическому происходит значительное усиление эффекта сжатия в течение временного интервала, когда, по крайней мере, квантово-классическое соответствие является хорошо определенным. При этом чем больше неустойчивость, тем более сильное сжатие достигается за короткий промежуток времени.

В данной работе на примере квадратичных гамильтонианов развит формализм, позволяющий связать матрицу устойчивости [17] системы с матрицей дисперсии [28], характеризующей квантовый эффект сжатия. Влияние неустойчивости гамильтоновой системы на эволюцию квантового сжатия рассматривается аналитически и графически на примерах вырожденного и невырожденного параметрических усилителей [20], возмущаемых периодическими δ -толчками.

2. СВЯЗЬ МЕЖДУ МАТРИЦАМИ УСТОЙЧИВОСТИ И ДИСПЕРСИИ

Состояние классической гамильтоновой системы с s степенями свободы в некоторый момент времени t может быть задано вектором в фазовом пространстве

$$\begin{aligned}\vec{y}(t) &= \{y^n(t)\} = \{y^1(t), \dots, y^{2s}(t)\} = \\ &= \{q^1(t), q^2(t), \dots, q^s(t), p^1(t), p^2(t), \dots, p^s(t)\},\end{aligned}\quad (1)$$

временная эволюция компонент которого определяется уравнениями движения Гамильтона

$$\frac{dy^n}{dt} = \gamma^{nl} \frac{\partial H}{\partial y^l}, \quad n, l = \overline{1, 2s}, \quad \{\gamma^{nl}\} = \begin{pmatrix} 0 & I_s \\ -I_s & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где I_s – единичная матрица размерности $s \times s$.

Вариация траектории $\delta \vec{y} = \vec{y}_{(2)} - \vec{y}_{(1)}$ в окрестности базовой траектории $\vec{y}_{(1)}$ ($\vec{y}_{(2)}$ – близкая к ней траектория с начальным условием $\vec{y}_{(2)}(t_0) = \vec{y}_{(1)}(t_0) + \delta \vec{y}(t_0)$) удовлетворяет линеаризованным уравнениям

$$\frac{d}{dt} \delta y^n(t) = \Gamma_l^n(t) \delta y^l(t), \quad (3)$$

где Γ_l^n – элементы матрицы устойчивости, определяемые стандартным способом [29]

$$\Gamma_l^n = \gamma^{nk} \frac{\partial^2 H}{\partial y^k \partial y^l} \bigg|_{\vec{y}(t) = \vec{y}_{(1)}(t)}. \quad (4)$$

Собственные значения матрицы устойчивости λ_n^Γ гамильтоновых систем определяют характер движения системы: если $\operatorname{Re} \lambda_n^\Gamma = 0$ (для всех n), то движение устойчиво, а при $\operatorname{Re} \lambda_n^\Gamma \neq 0$ (хотя бы для одного n) движение неустойчиво [29]. Мерой разбегания двух соседних траекторий может служить норма

$$\|\delta \vec{y}(t)\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{2s} (\delta y^n(t))^2}. \quad (5)$$

Согласно Ляпунову [30], если вариация траектории при больших временах ведет себя экспоненциальным образом

$$\|\delta \vec{y}(t)\| = e^{\alpha t} \|\delta \vec{y}(0)\|, \quad (6)$$

то движение системы неустойчиво. Здесь $\alpha > 0$ – показатель Ляпунова. Система будет устойчивой, если в процессе своего движения малое начальное возмущение траектории будет оставаться таковым на протяжении произвольного промежутка времени [30]. Если промежуток времени конечный, то в данном случае вопрос о малости возмущения траектории решается при помощи теоремы о непрерывной зависимости решения дифференциальных уравнений движения системы от начальных условий [31].

Пусть $F_l^n(t, t_0)$ – оператор эволюции, который связывает произвольное начальное возмущение в момент времени t_0 с возмущением в момент времени t ,

$$\delta y^n(t) = F_l^n(t, t_0) \delta y^l(t_0). \quad (7)$$

Подставив выражение (7) в уравнение (3), можно записать уравнение движения для оператора эволюции

$$\frac{d}{dt} F_l^n(t, t_0) = \Gamma_k^n(t) F_l^k(t, t_0), \quad (8)$$

решение которого с учетом начальных условий $F_l^n(t_0, t_0) = \delta_l^n$ выражается в виде мультипликативного интеграла [32]

$$F(t, t_0) = \int_{t_0}^{\cap t} (1 + \Gamma(\tau) d\tau). \quad (9)$$

Максимальное из собственных значений оператора эволюции $\lambda_{\max}$ связано с максимальным показателем Ляпунова $\alpha_{\max}$ [30] следующим образом:

$$\alpha_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\lambda_{\max}(t)|. \quad (10)$$

Можно показать, что в случае устойчивого поведения системы все собственные значения оператора эволюции λ_n будут ограничены по абсолютному значению некоторым положительным числом M ,

$$|\lambda_n(t)| < M. \quad (11)$$

Когда матрица устойчивости не зависит от времени, между собственными значениями матрицы устойчивости λ_n^Γ и оператора эволюции λ_n существует простая связь

$$\lambda_n = e^{\lambda_n^\Gamma t}. \quad (12)$$

В этом случае при устойчивом движении ($\operatorname{Re} \lambda_n^\Gamma = 0$) [17] собственные значения оператора эволюции удовлетворяют равенствам

$$|\lambda_n(t)| = 1. \quad (13)$$

Если Γ -матрица зависит от времени, то условие устойчивости движения (13) при больших временах ($t \rightarrow \infty$) будет выполняться, если оператор эволюции обладает свойством периодичности $F(t_0 + \tau + k\tau, t_0 + k\tau) = F(t_0 + \tau, t_0)$ (τ — произвольный интервал времени, $k \in \mathbb{Z}$) и модули собственных значений оператора $F(t_0 + \tau, t_0)$ равны единице.

Предположим, что гамильтониан системы можно представить в виде суммы свободного гамильтониана и гамильтониана взаимодействия, $H = H_{\text{св}} + H_{\text{вз}}$. Очевидно, что такое же разбиение возможно и для матрицы устойчивости

$$\Gamma = \Gamma_{\text{св}} + \Gamma_{\text{вз}}. \quad (14)$$

Оператор эволюции, осуществляемый свободным гамильтонианом, имеет вид

$$F_{\text{св}}(t, t_0) = \int_{t_0}^{\cap t} [1 + \Gamma_{\text{св}}(\tau) d\tau]. \quad (15)$$

Обычно гамильтониан свободной части не зависит от времени и соответствующий оператор эволюции может быть вычислен¹⁾. Если искать полный оператор эволюции в виде $F = F_{\text{св}} F_{\text{вз}}$, то задача сводится к нахождению $F_{\text{вз}}$. В этом случае уравнение (8) переписывается как

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF_{\text{св}}}{dt} F_{\text{вз}} + F_{\text{св}} \frac{dF_{\text{вз}}}{dt} = (\Gamma_{\text{св}} + \Gamma_{\text{вз}}) F_{\text{св}} F_{\text{вз}}. \quad (16)$$

Так как $F_{\text{св}}$ определяется формулой (15), то имеет место соотношение $\frac{dF_{\text{св}}}{dt} = \Gamma_{\text{св}} F_{\text{св}}$. Поэтому уравнение (16) примет вид

$$\frac{dF_{\text{вз}}}{dt} = F_{\text{св}}^{-1} \Gamma_{\text{вз}} F_{\text{св}} F_{\text{вз}}. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) по аналогии с (8) можно представить в виде мультипликативного интеграла

$$F_{\text{вз}} = \int_{t_0}^{\cap t} [1 + F_{\text{св}}^{-1} \Gamma_{\text{вз}} F_{\text{св}} d\tau]. \quad (18)$$

В этом случае полный оператор эволюции записывается как

$$F = F_{\text{св}} F_{\text{вз}} = F_{\text{св}} \int_{t_0}^{\cap t} [1 + F_{\text{св}}^{-1} \Gamma_{\text{вз}} F_{\text{св}} d\tau]. \quad (19)$$

¹⁾ Соответствующая матрица устойчивости также не зависит от времени, и мультипликативный интеграл сводится к экспоненте $e^{\Gamma(t-t_0)}$.

Для выявления эффекта сжатия необходимо исследовать дисперсии квадратурных операторов $\hat{X}_1, \hat{X}_2$ [21], которые связаны с дисперсиями операторов координат и импульсов следующим образом:

$$\langle (\Delta \hat{X}_i)^2 \rangle = \langle \hat{X}_i^2 \rangle - \langle \hat{X}_i \rangle^2 = \frac{\hbar}{s} \sum_{n,l} \mu_n \mu_l \sigma^{nl}, \quad (20)$$

$$n = \xi, \quad \mu_\xi = \sqrt{\frac{m_\xi \omega_\xi}{2\hbar}} \quad \text{при } i = 1,$$

$$n = \xi + s, \quad \mu_{\xi+s} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m_\xi \omega_\xi}} \quad \text{при } i = 2, \quad \xi = 1, \dots, s.$$

Здесь

$$\sigma^{nl} = \frac{1}{2\hbar} \langle \Delta \hat{y}^n \Delta \hat{y}^l + \Delta \hat{y}^l \Delta \hat{y}^n \rangle \quad (21)$$

— элементы матрицы дисперсии, $\Delta \hat{y}^n = \hat{y}^n - \langle \hat{y}^n \rangle$ — операторы отклонения от среднего значения, m_ξ, ω_ξ — масса и частота ξ -й моды. Диагональные элементы σ^{nn} определяют как дисперсии операторов координаты (при $n = \xi$), так и дисперсии операторов импульса (при $n = \xi + s$), перекрестные члены σ^{nl} пропорциональны коэффициенту корреляции между соответствующими компонентами координат и импульсов фазового пространства системы. Стандартные условия квадратурного сжатия [19]–[21] в данном случае можно записать в виде

$$\sigma^{nn} < \frac{1}{4\hbar \mu_n^2} \quad (\text{одномодовое сжатие}), \quad \sum_{n,l} \mu_n \mu_l \sigma^{nl} < \frac{s}{4\hbar} \quad (\text{многомодовое сжатие}), \quad (22)$$

где $n = \xi$ или $n = \xi + s$.

Рассмотрим квантовую систему, гамильтониан которой квадратичен по импульсам и координатам и зависит явно от времени

$$\hat{H} = \frac{1}{2} K_{nl}(t) \hat{y}^n \hat{y}^l, \quad (23)$$

где $K_{nl}(t)$ — произвольные коэффициенты, которые можно без ограничения общности считать вещественными и симметричными. Заметим, что в общем виде гамильтониан системы можно преобразовать к виду

$$H = \frac{1}{2} K_{(nl)} \hat{y}^n \hat{y}^l + \frac{i\hbar}{4} K_{[nl]} \gamma^{nl}.$$

Последнее слагаемое, как легко видеть, не влияет на эволюцию динамических переменных.

Соответствующие уравнения Эренфеста имеют вид

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{y}^n \rangle = \gamma^{nl} \left\langle \frac{\partial \hat{H}(\hat{y})}{\partial \hat{y}^l} \right\rangle. \quad (24)$$

Поскольку для квадратичных гамильтонианов средние значения $\langle \hat{y}^n \rangle$ следуют законам классической механики [33], т.е.

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{y}^n \rangle = \gamma^{nl} \frac{\partial H(\langle \hat{y} \rangle)}{\partial y^l},$$

эволюция величины $\delta \langle \hat{y}^n \rangle$ будет совпадать с поведением классической величины δy^n . Из сравнения уравнения для величины $\delta \langle \hat{y}^n \rangle$

$$\frac{d}{dt} \delta \langle \hat{y}^n \rangle = \gamma^{nl} \frac{\partial^2 H(\langle \hat{y} \rangle)}{\partial y^l \partial y^k} \delta \langle \hat{y}^k \rangle = \gamma^{nl} K_{lk}(t) \delta \langle \hat{y}^k \rangle \quad (25)$$

с уравнением (3) для δy^n следует, что величину $\gamma^{nl} K_{lk}(t)$ можно отождествить с матрицей устойчивости

$$\Gamma_k^n(t) = \gamma^{nl} K_{lk}(t). \quad (26)$$

При этом уравнения движения для $\Delta \hat{y}^n$ имеют вид

$$\frac{d}{dt} \Delta \hat{y}^n = \gamma^{nl} K_{lk}(t) \Delta \hat{y}^k = \Gamma_k^n(t) \Delta \hat{y}^k. \quad (27)$$

Тогда для систем типа (23) элементы матрицы устойчивости, определяемые стандартным образом, являются вещественными числами, зависящими от времени.

Таким образом, как легко видеть из соотношений (21) и (27), эволюция элементов матрицы дисперсии σ^{nl} со временем определяется элементами матрицы устойчивости в соответствии со следующими уравнениями:

$$\frac{d}{dt} \sigma^{nl} = \Gamma_k^n \sigma^{kl} + \Gamma_k^l \sigma^{kn}. \quad (28)$$

Зная явный вид оператора эволюции $F(t, t_0)$, решение уравнений (28) можно записать в виде

$$\sigma^{nl}(t) = F_k^n(t, t_0) F_p^l(t, t_0) \sigma^{kp}(t_0). \quad (29)$$

Таким образом, для расчета эффекта сжатия или для анализа системы на устойчивость необходимо найти полный оператор эволюции. Тогда задача о расчете эффекта сжатия решается при помощи формул (29), а для анализа системы на устойчивость нужно определить собственные значения оператора эволюции в произвольный момент времени.

Для расчета полного оператора эволюции можно воспользоваться формулой (9). Однако при этом мультипликативный интеграл удастся вычислить лишь в некоторых случаях. Если матрицы устойчивости, определенные в различные моменты времени, коммутируют, $[\Gamma(t_1), \Gamma(t_2)] = 0$, то мультипликативный интеграл сводится к экспоненциальной форме [30] $\int_{t_0}^t (1 + \Gamma(\tau) d\tau) = \exp(\int_{t_0}^t \Gamma(\tau) d\tau)$. Рассматриваемый интеграл может быть вычислен с заданной точностью, когда матрица устойчивости является медленно меняющейся функцией времени [34].

Таким образом, представляя зависящий от времени гамильтониан системы H в виде суммы $H_{\text{св}} + H_{\text{вз}}$, полный оператор эволюции можно представить в виде произведения $F_{\text{св}}$ и $F_{\text{вз}}$. Если оператор эволюции свободной части вычисляется точно, то с помощью

Рис. 1. Временная зависимость собственных значений оператора эволюции.

выражения (19) можно найти явный вид полного оператора эволюции. Это, в свою очередь, позволяет проследить эволюцию элементов матрицы дисперсии согласно формуле (29) и определить, устойчивый или неустойчивый характер имеет движение системы.

3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫРОЖДЕННЫЙ И НЕВЫРОЖДЕННЫЙ УСИЛИТЕЛИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ δ -ТОЛЧКАМИ

Гамильтониан модели вырожденного параметрического усилителя [20] с периодическими δ -ударами имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2 - \hbar\omega) + \frac{1}{2} \left[\chi + \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right] \times \\ & \times \left[-\frac{\hat{p}^2}{\omega} \sin(2\omega t) + (\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) \cos(2\omega t) + \omega \hat{q}^2 \sin(2\omega t) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь χ, ε – константы взаимодействия, ω – частота фотона, T – период толчков. Согласно (19) можно представить эволюционный оператор в виде $F = F_{\text{св}} F_{\text{вз}}$,

$$F = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^B & 0 \\ 0 & e^{-B} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где

$$B = \chi t + \varepsilon \int_{+0}^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kT) dx = \chi t + \varepsilon \left[\frac{t}{T} \right]$$

(за исключением моментов $t = kT$), $[t/T]$ обозначает целую часть отношения t/T . Собственные значения эволюционного оператора в данном случае равны

$$\lambda_{1,2} = \text{ch}(B) \cos(\omega t) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\text{ch}(2B) + 2 \text{ch}^2(B) \cos(2\omega t) - 3}. \quad (32)$$

Временная зависимость полученных собственных значений $\lambda_{1,2}$ представлена на рис. 1 при следующих значениях параметров: $\chi = 0.5$, $\varepsilon = -0.55$, $\omega = 1$, $T = 1$. Очевидно, что необходимое условие устойчивости (13) системы со временем все больше нарушается.

Если в качестве начальных состояний выбраны, как обычно, когерентные состояния с соответствующей матрицей дисперсии $\sigma(0) = \text{diag}\{1/(2\omega), \omega/2\}$, то соответствующие элементы рассматриваемой матрицы в любой момент времени определяются как

$$\begin{aligned} \sigma^{11}(t) &= \frac{1}{2\omega} e^{2B} \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2\omega} e^{-2B} \sin^2(\omega t), \\ \sigma^{22}(t) &= \frac{\omega}{2} e^{-2B} \cos^2(\omega t) + \frac{\omega}{2} e^{2B} \sin^2(\omega t), \\ \sigma^{12}(t) &= -\frac{1}{2} \text{sh}(2B) \sin(2\omega t). \end{aligned} \quad (33)$$

Временная зависимость элементов матрицы дисперсии (33) представлена на рис. 2 при тех же значениях параметров $\chi, \varepsilon, \omega, T$, что и на рис. 1.

Для исследования влияния неустойчивости рассматриваемой системы на эволюцию квантового сжатия представляет также интерес временное поведение величины $d(t) = \sqrt{\hbar(\sigma^{11}(t) + \sigma^{22}(t))} = \sqrt{\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle + \langle(\Delta\hat{q})^2\rangle}$ [25]–[27], которая в декартовых координатах при условии

$$2(F_1^1 F_2^1 + F_1^2 F_2^2) \sqrt{\sigma^{11}(t) \sigma^{22}(t)} = 0$$

соответствует величине $\|\delta \vec{y}(t)\| = \sqrt{\delta p^2(t) + \delta q^2(t)}$. Эта величина характеризует расхождение двух близких в начальный момент траекторий и входит в определение максимального показателя Ляпунова, который является асимптотической характеристикой хаоса [14]–[17]. Из рис. 2 видно, что величина $d(t)/\sqrt{\hbar}$ со временем экспоненциально возрастает, что свидетельствует об усилении неустойчивости системы и хаотичном ее поведении. Условие сжатия (22) в этом случае имеет вид

$$\sigma^{11} < \frac{1}{2\omega} \quad \text{или} \quad \sigma^{22} < \frac{\omega}{2}. \quad (34)$$

Эффект сжатия достигает максимума в моменты $t = \pi k/(2\omega)$, причем степень сжатия со временем возрастает (рис. 2), что свидетельствует о корреляции эффектов сжатия и неустойчивости (рис. 1, рис. 2).

Рассмотрим квадратичный гамильтониан

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{1}{2}(\hat{p}_1^2 + \omega_1^2 \hat{q}_1^2 - \hbar\omega_1) + \frac{1}{2}(\hat{p}_2^2 + \omega_2^2 \hat{q}_2^2 - \hbar\omega_2) + \left[\chi + \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right] \times \\ & \times \left[-\frac{\hat{p}_1 \hat{p}_2}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \sin((\omega_1 + \omega_2)t) + \left(\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \hat{p}_2 \hat{q}_1 + \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \hat{p}_1 \hat{q}_2 \right) \cos((\omega_1 + \omega_2)t) + \right. \\ & \left. + \sqrt{\omega_1 \omega_2} \hat{q}_1 \hat{q}_2 \sin((\omega_1 + \omega_2)t) \right], \end{aligned} \quad (35)$$

который описывает невырожденный параметрический усилитель [20] с периодически-ми δ -толчками. Здесь ω_1, ω_2 – частоты фотонов. Используя выражение (19), можно записать эволюционный оператор для рассматриваемой системы в виде $F = F_{\text{св}} F_{\text{вз}}$,

$$\begin{aligned} F = & \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) & 0 & \omega_1^{-1} \sin(\omega_1 t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega_2 t) & 0 & \omega_2^{-1} \sin(\omega_2 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) & 0 & \cos(\omega_1 t) & 0 \\ 0 & -\omega_2 \sin(\omega_2 t) & 0 & \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \text{ch}(B) & \sqrt{\omega_2/\omega_1} \text{sh}(B) & 0 & 0 \\ \sqrt{\omega_1/\omega_2} \text{sh}(B) & \text{ch}(B) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ch}(B) & -\sqrt{\omega_1/\omega_2} \text{sh}(B) \\ 0 & 0 & -\sqrt{\omega_2/\omega_1} \text{sh}(B) & \text{ch}(B) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (36)$$

Временная эволюция двух собственных значений $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ оператора F представлена на рис. 3 при тех же значениях параметров χ, ε, T , что и выше, и при $\omega_1 = 2, \omega_2 = 1$.

Из рис. 3 видно, что, как и в случае вырожденного параметрического усилителя, необходимое условие устойчивости (13) системы со временем нарушается.

Если в качестве начальных состояний выбраны когерентные состояния с матрицей дисперсии $\sigma(0) = \text{diag}\{1/(2\omega_1), 1/(2\omega_2), \omega_1/2, \omega_2/2\}$, то соответствующие элементы рассматриваемой матрицы в любой момент времени определяются как

$$\begin{aligned} \sigma^{11}(t) &= \frac{1}{2\omega_1} \text{ch}(2B), & \sigma^{12}(t) &= \frac{\text{sh}(2B)}{2\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \cos(t(\omega_1 + \omega_2)), \\ \sigma^{22}(t) &= \frac{1}{2\omega_2} \text{ch}(2B), & \sigma^{34}(t) &= -\frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{2} \text{sh}(2B) \cos(t(\omega_1 + \omega_2)), \\ \sigma^{33}(t) &= \frac{\omega_1}{2} \text{ch}(2B), & \sigma^{44}(t) &= \frac{\omega_2}{2} \text{ch}(2B). \end{aligned} \quad (37)$$

Рис. 2. Временная зависимость дисперсий координаты, импульса и величины $d(t)/\sqrt{\hbar}$.

Графический анализ полученных выражений (37) и величины $d(t)/\sqrt{\hbar} = \sqrt{\sum_{n=1}^4 \sigma^{nn}(t)}$ представлен на рис. 4 при тех же значениях параметров, что и для рис. 3.

Рис. 3. Временная зависимость двух собственных значений оператора $F(t, 0)$

Для данного случая условие многомодового квадратурного сжатия (22) принимает вид

$$\omega_1 \sigma^{11} + \omega_2 \sigma^{22} + 2\sqrt{\omega_1 \omega_2} \sigma^{12} < 1 \quad \text{или} \quad \frac{\sigma^{33}}{\omega_1} + \frac{\sigma^{44}}{\omega_2} + \frac{2\sigma^{34}}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} < 1. \quad (38)$$

Очевидно, что рассматриваемая система со временем переходит в сжатое состояние

Рис. 4. Временная зависимость комбинаций элементов матрицы дисперсии $d(t)/\sqrt{\hbar}$

(рис. 4) и степень сжатия достигает максимумов в моменты времени $t = \pi k/(\omega_1 + \omega_2)$, $2\pi k/(\omega_1 + \omega_2)$. Аналогично случаю вырожденного параметрического усилителя, периодические δ -удары приводят к одновременному росту сжатия и неустойчивости рассматриваемой системы (рис. 3, рис. 4).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен подход, который позволяет связать эффект квантового сжатия и классической неустойчивости с помощью установления уравнения эволюции для матрицы дисперсии, в которое непосредственно входит матрица устойчивости. В случае систем, которые описываются квадратичными гамильтонианами, полученные уравнения являются точными и не содержат приближений²⁾. Найдено решение этих уравнений, записываемое через оператор эволюции. На основе развитого формализма исследованы две физические системы: невырожденный и вырожденный параметрические усилители с внешними δ -образными толчками. С использованием разработанной методики получено точное аналитическое выражение для оператора эволюции в обоих случаях. При этом оператор эволюции представлен в виде произведения операторов, соответствующих свободной части гамильтониана и гамильтониана взаимодействия. Знание оператора эволюции позволяет проанализировать неустойчивость системы на конечных временах. Из полученных решений для невырожденного параметрического усилителя видно, что в среднем сжатие и неустойчивость возрастают. В строго определенных моменты времени $t = \pi k / (2\omega)$, $k \in Z$, эффект сжатия достигает своего локального минимума для координаты или импульса и нарастает со временем экспоненциальным образом. С помощью δ -ударов можно усилить или, наоборот, ослабить эффект сжатия, а также усилить или ослабить неустойчивость системы. Заметим, что при выполнении условия $\chi T + \epsilon = 0$ растущий со временем эффект сжатия будет отсутствовать, а поведение системы будет устойчивым. В случае вырожденного параметрического усилителя не существует одномодового эффекта сжатия, однако существует двухмодовое сжатие, которым можно также управлять при помощи δ -ударов. Здесь, так же как и для невырожденного параметрического усилителя, существует возможность сделать систему устойчивой при помощи δ -ударов. Для этого нужно, чтобы соблюдалось условие $\chi T + \epsilon = 0$. В данном случае эффект сжатия не будет нарастать экспоненциальным образом, а также не будет расти со временем ни одна из дисперсий – ни координаты, ни импульса.

Список литературы

- [1] Г. М. Заславский, Б. В. Чуриков. УФН. 1971. Т. 105. С. 3.
- [2] V. I. Kuvshinov, A. V. Kuzmin. Phys. Lett. A. 2002. V. 296. P. 82.
- [3] W. A. Lin, L. E. Ballentine. Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 2927.
- [4] В. Е. Бунаков. Хаос, квантовый хаос и ядерная физика. В сб.: Физика атомного ядра и элементарных частиц. Материалы XXXII Зимней школы ПИЯФ (22–28 февраля 1998, Санкт-Петербург). Ред. Я. И. Азимов, В. Е. Бунаков, В. А. Гордеев и др. С.-Пб.: Изд-во ПИЯФ. С. 5.
- [5] N. K. Nielsen, P. Olesen. Nucl. Phys. B. 1979. V. 160. P. 380; P. Olesen. Nucl. Phys. B. 1982. V. 200. P. 381.
- [6] Ю. А. Симонов. УФН. 1996. Т. 166. С. 337.
- [7] T. Kawabe, S. Ohta. Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 1274.
- [8] T. S. Biro, S. G. Matinyan, B. Muller. Chaos and Gauge Field Theory. Singapore: World Scientific, 1994.

²⁾ В случае неквадратичных гамильтонианов можно построить аналогичные уравнения с учетом квантовых поправок (например, для квантового ротатора [35]).

- [9] *Г. М. Заславский*. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
- [10] *De O. Almeida*. Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
- [11] *M. C. Gutzwiller*. Chaos in Classical and Quantum Mechanics. New York: Springer, 1990.
- [12] *F. Haake*. Quantum Signatures of Chaos. New York: Springer, 1991.
- [13] *G. Casati, B. Chirikov*. Quantum Chaos. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [14] *А. Лихтенберг, М. Либерман*. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
- [15] *Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев*. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
- [16] *Г. Шустер*. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
- [17] *М. Табор*. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
- [18] *С. Я. Кулин*. Квантовая оптика: поля и их детектирование. Минск: Наука и техника, 1990.
- [19] *O. Hirota*. Squeezed Light. Tokyo: Elsevier, 1990.
- [20] *D. F. Walls, G. J. Milburn*. Quantum Optics. New York: Springer, 1995.
- [21] *M. O. Scully, M. S. Zubairy*. Quantum Optics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
- [22] *B. V. Chirikov*. The uncertainty principle and quantum chaos. In: Proc. of 2nd Int. Workshop on Squeezed states and Uncertainty relations (May 25–29, 1992, Moscow). NASA Conf. Publ. № 3219. Eds. D. Han, Y. S. Kim, V. I. Man'ko. Washington: NASA, 1993. P. 317.
- [23] *A. Heidmann, J. M. Raimond, S. Reynaud, N. Zagure*. Opt. Commun. 1985. V. 54. P. 189.
- [24] *L. G. Yaffe*. Rev. Mod. Phys. 1982. V. 54. P. 407.
- [25] *K. N. Alekseev*. Opt. Commun. 1995. V. 116. P. 468; quant-ph/9808010.
- [26] *K. N. Alekseev, J. Peřina*. Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 4023; chaos-dyn/9804041.
- [27] *К. Н. Алексеев, Д. С. Приймак*. ЖЭТФ. 1998. Т. 113. С. 111.
- [28] *V. V. Dodonov, I. M. Dremin, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, P. G. Polynkin*. Squeezed and correlated states of quantum fields and multiplicity particle distributions. hep-ph/9502394.
- [29] *M. Toda*. Phys. Lett. A. 1974. V. 48. P. 335.
- [30] *А. М. Ляпунов*. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950.
- [31] *А. Н. Тихонов*. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. Матем. сб. 1948. Т. 22 (64). № 2. С. 193; 1952. Т. 31 (73). № 3. С. 147.
- [32] *Ф. Р. Гантмахер*. Теория матриц. М.: Наука, 1966.
- [33] *А. Мессиа*. Квантовая механика. Т. 1. М.: Наука, 1978.
- [34] *G. N. Borzdov*. J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 6328.
- [35] *V. I. Kuvshinov, V. V. Marmysh, V. A. Shaparau*. Quantum squeezing evolution under influence of the instability. In: Proc. of the XIth Ann. Sem. Nonlinear Phenomena in Complex Systems (May 13–16, 2002, Minsk). Eds. L. F. Babichev, V. I. Kuvshinov. Minsk: Institute of physics NASB, 2002. V. 11. P. 196.

Поступила в редакцию 3.VI.2003 г.