Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, О способе осреднения для большого числа кластеров. Фазовые переходы, *ТМФ*, 2000, том 125, номер 2, 297–314

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf670>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:35:52

© 2000 г.

В. П. Маслов*

О СПОСОБЕ ОСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ БОЛЬШОГО ЧИСЛА КЛАСТЕРОВ. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Развивается теория осреднения операторов в фокковском пространстве, предложенная в предыдущих работах автора. Вводится алгебра осредненных операторов. С помощью функции вида $f(z) = z \ln(z)$ от осредненного единичного оператора (“меры” осредненных операторов) вводится квантовая энтропия и соответственно квантовая свободная энергия. С помощью такой “квантовой термодинамики” определяются зависимость критической скорости “критерия Ландау” от температуры и температурное распределение, при котором для равной нулю температуры скорость сверхтекучей системы не равна нулю. Далее эта концепция обобщается на случай, когда бозоны образуют кластеры при малой плотности.

В настоящей статье мы продолжим исследование системы взаимодействующих бозонов и проблемы фазовых переходов. Мы постараемся ответить на два вопроса. Во-первых, как меняется критерий Ландау для скорости сверхтекучей жидкости при температуре, отличной от нуля, и, во-вторых, как устроено распределение по температуре, когда бозоны могут образовывать не только пары, но и k -частичные соединения – кластеры.

Первая проблема, по-видимому, требует пересмотра основных постулатов статистики и термодинамики или, более правильно говоря, уточнения их. Ведь в силу основных принципов возрастания энтропии и второго закона термодинамики не может быть системы, движущейся с (непостоянной) скоростью при температуре, равной нулю. Однако эксперимент показывает, что при равной нулю температуре бозоны двигаться могут. Как надо изменить распределение Гиббса (Бозе–Эйнштейна), чтобы этот факт следовал из него?

В настоящей работе мы вводим понятия квантовой энтропии и квантовой свободной энергии, которые позволяют ответить на эти вопросы.

Эти новые понятия вводятся с помощью метода осреднения операторов в фокковском пространстве, предложенного в предыдущих работах [1, 2], и рассмотрения некоторой алгебры таких осредненных операторов. Последняя позволяет определить функцию $f(z) = z \ln(z)$ для оператора меры (осредненной единицы), введенной в предыдущих работах, и тем самым определить квантовую энтропию. Считая операторы рождения и уничтожения числами, получаем символ оператора свободной энергии, определенной

---

* Московский государственный университет, Москва, Россия

после введения квантовой энтропии естественным образом. Для “холостых” бозонов при температуре, равной нулю, этому символу отвечает уравнение Гросса–Питаевского (или, как его иногда называют, уравнение Хартри).

1. В статьях [1, 2] для исследования нового способа вторичного квантования по холостым и парным фермионам и бозонам были использованы фоковские пространства [3] специального вида. В данной статье мы обобщаем эти пространства на случай большого числа кластеров. Пусть $1 \leq k$ – целое число, $\varepsilon > 0$ – параметр. Пусть $N_1, \dots, N_k \geq 0$ – целые числа. Рассмотрим гильбертово пространство функций вида

$$\Psi(x_1^1, j_1^1; x_2^1, j_2^1; \dots; x_{N_1}^1, j_{N_1}^1; x_1^2, x_2^2, j_1^2; x_3^2, x_4^2, j_2^2; \dots; x_{2N_2-1}^2, x_{2N_2}^2, j_{N_2}^2; \dots; x_1^k, \dots, x_k^k, j_1^k; x_{k+1}^k, \dots, x_{2k}^k, j_2^k; \dots; x_{kN_k-k+1}^k, \dots, x_{kN_k}^k, j_{N_k}^k),$$

где $x_{p_l}^l \in \mathbf{T}^3$, $\mathbf{T}^3$ – трехмерный тор, длина сторон которого равна L , $j_{q_l}^l = 1, \dots, \infty$ для всех $l = 1, \dots, k$ и $p_l = 1, \dots, lN_l$; $q_l = 1, \dots, N_l$. Эти функции симметричны относительно перестановок любых пар переменных $(x_{p_l-l+1}^l, \dots, x_{p_l}^l, j_p^l)$ и $(x_{q_l-l+1}^l, \dots, x_{q_l}^l, j_q^l)$ при $l = 1, \dots, k$ и $p, q = 1, \dots, N_l$.

Скалярное произведение имеет вид

$$\begin{aligned} (\Psi, \Phi) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1^1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_1}^1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_1^k=1}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_k}^k=1}^{\infty} \int \dots \int dx_1^1 \dots dx_{N_1}^1 \dots dx_1^k \dots dx_{N_k}^k \times \\ &\times \Psi^*(x_1^1, j_1^1; \dots; x_{N_1}^1, j_{N_1}^1; \dots; x_1^k, \dots, x_k^k, j_1^k; \dots; x_{kN_k-k+1}^k, \dots, x_{kN_k}^k, j_{N_k}^k) \times \\ &\times \Phi(x_1^1, j_1^1; \dots; x_{N_1}^1, j_{N_1}^1; \dots; x_1^k, \dots, x_k^k, j_1^k; \dots; x_{kN_k-k+1}^k, \dots, x_{kN_k}^k, j_{N_k}^k). \end{aligned}$$

Будем обозначать это пространство $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}$. Определим бозонное пространство $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}^B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пространство $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}^B$ является подпространством пространства $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}$ и состоит из таких его элементов $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}$, которые симметричны относительно перестановок любых x_p^l и x_q^m при $l, m = 1, \dots, k$ и $p = 1, \dots, lN_l$; $q = 1, \dots, mN_m$. Проектор на это подпространство будет обозначаться как $\hat{P}_{N_1, \dots, N_k}^B$:

$$\hat{P}_{N_1, \dots, N_k}^B : \mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k} \rightarrow \mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}^B.$$

Рассмотрим теперь гильбертово пространство $\mathcal{F}$, элементами которого являются бесконечные наборы

$$\begin{aligned} \Psi &= \{\Psi_{N_1, \dots, N_k}\}, \quad \Psi_{N_1, \dots, N_k} \in \mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}, \\ \|\Psi\|^2 &= \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \sum_{N_k=0}^{\infty} \|\Psi_{N_1, \dots, N_k}\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Это пространство является бесконечной прямой суммой пространств

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{N_1, \dots, N_k} \mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}.$$

Будем называть его кластерным пространством Фока. Отметим, что пространство $\mathcal{F}$ при $k = 1$ совпадает с обычным пространством Фока, используемым при описании многочастичных систем.

Обозначим оператор проектирования на соответствующее слагаемое прямой суммы как $\hat{P}_{N_1, \dots, N_k}$:

$$\hat{P}_{N_1, \dots, N_k} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}, \quad \hat{P}_{N_1, \dots, N_k} \Psi = \Psi_{N_1, \dots, N_k},$$

а оператор вложения $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}$ в $\mathcal{F}$ как $\hat{i}_{N_1, \dots, N_k}$:

$$\hat{i}_{N_1, \dots, N_k} : \mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k} \rightarrow \mathcal{F}, \quad \hat{i}_{N_1, \dots, N_k} \varphi = \{\delta_{N_1 M_1} \cdot \dots \cdot \delta_{N_k M_k} \varphi\},$$

где δ_{NM} — символ Кронекера. Введем понятие осредненного оператора. Пусть задан набор операторов $\{\hat{A}_N\}$ в пространстве функций

$$\psi_N(x_1, \dots, x_N) \in L_2,$$

симметричных относительно перестановок переменных x_j и $x_k, x_j \in \mathbf{T}^3$. Операторам $\hat{A}_N$ поставим в соответствие операторы $\tilde{\hat{A}}_{N_1, \dots, N_k}$ на подпространствах $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}^B$, действующие как единичные по дискретным переменным j_p^l .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Осредненным оператором $\bar{\hat{A}}$ будем называть оператор в пространстве Фока $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} & \bar{\hat{A}}(\hat{b}_1^+, \hat{b}_1^-, \dots, \hat{b}_k^+, \hat{b}_k^-) \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz \hat{b}_1^+(z, j) \hat{b}_1^-(z, j) - \dots \right. \\ & \quad \left. \dots - \sum_{j=1}^{\infty} \int \dots \int dz_1 \dots dz_k \hat{b}_k^+(z_1, \dots, z_k, j) \hat{b}_k^-(z_1, \dots, z_k, j) \right) = \\ & = \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \sum_{N_k=0}^{\infty} \varepsilon^{N_1 + \dots + N_k} (N_1 + \dots + k N_k)! \times \\ & \quad \times C_{N_1, \dots, N_k} \hat{i}_{N_1, \dots, N_k} \tilde{\hat{A}}_{N_1 + \dots + k N_k} \hat{P}_{N_1, \dots, N_k}^B \hat{P}_{N_1, \dots, N_k}. \end{aligned}$$

Аргументы $(\hat{b}_1^+(x_1, j_1), \hat{b}_1^-(x_1, j_1), \dots, \hat{b}_k^+(x_1, \dots, x_k, j_k), \hat{b}_k^-(x_1, \dots, x_k, j_k))$ будем иногда опускать.

ПРИМЕР 1. Пусть $\hat{A}_N = \hat{E}$, где $\hat{E}$ – тождественный оператор. Осредненный оператор имеет вид

$$\begin{aligned} & \overline{\hat{E}} \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz \hat{b}_1^+(z, j) \hat{b}_1^-(z, j) - \dots \right. \\ & \quad \left. \dots - \sum_{j=1}^{\infty} \int \dots \int dz_1 \dots dz_k \hat{b}_k^+(z_1, \dots, z_k, j) \hat{b}_k^-(z_1, \dots, z_k, j) \right) = \\ & = \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \sum_{N_k=0}^{\infty} \varepsilon^{N_1+\dots+N_k} (N_1 + \dots + kN_k)! C_{N_1, \dots, N_k} \hat{i}_{N_1, \dots, N_k} \hat{P}_{N_1, \dots, N_k}^B \hat{P}_{N_1, \dots, N_k}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор $\hat{i}_{N_1, \dots, N_k} \hat{A}_{N_1+\dots+kN_k} \hat{P}_{N_1, \dots, N_k}^B \hat{P}_{N_1, \dots, N_k}$ может быть выражен следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_1! \dots N_k!} \sum_{j_1^1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_1}^1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_1^k=1}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_k}^k=1}^{\infty} \int \dots \int dx_1^1 \dots dx_{N_1}^1 \dots dx_1^k \dots dx_{N_k}^k \times \\ & \quad \times \hat{b}_1^+(x_1^1, j_1^1) \dots \hat{b}_1^+(x_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \dots \hat{b}_k^+(x_1^k, \dots, x_{N_k}^k, j_{N_k}^k) \times \dots \\ & \quad \dots \times \hat{b}_k^+(x_{kN_k-k+1}^k, \dots, x_{kN_k}^k, j_{N_k}^k) \hat{A}_{N_1+\dots+kN_k} \times \\ & \quad \times \text{Symm}_{x_1^1 \dots x_{N_1}^1 \dots x_1^k \dots x_{N_k}^k} \left\{ \hat{b}_1^-(x_1^1, j_1^1) \dots \hat{b}_1^-(x_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \times \dots \right. \\ & \quad \left. \dots \times \hat{b}_k^-(x_1^k, \dots, x_{N_k}^k, j_{N_k}^k) \dots \hat{b}_k^-(x_{kN_k-k+1}^k, \dots, x_{kN_k}^k, j_{N_k}^k) \right\} \times \\ & \quad \times \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz \hat{b}_1^+(z, j) \hat{b}_1^-(z, j) - \dots \right. \\ & \quad \left. \dots - \sum_{j=1}^{\infty} \int \dots \int dz_1 \dots dz_k \hat{b}_k^+(z_1, \dots, z_k, j) \hat{b}_k^-(z_1, \dots, z_k, j) \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\text{Symm}_{x_1 \dots x_N}$ – оператор симметризации по переменным $x_1, \dots, x_N$; $\hat{b}_l^+(x_1, \dots, x_l, j)$, $\hat{b}_l^-(x_1, \dots, x_l, j)$ при $l = 1, \dots, k$ – операторы рождения и уничтожения, соответственно, которые вводятся в фоксовском пространстве $\mathcal{F}$ стандартным образом [2, 3], а числа над этими операторами обозначают порядок их действия [4].

2. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{F}$, где $\mathcal{H}_B$ – бозонное пространство Фока [3], элементами которого являются последовательности функций $\{\psi_n\}_n$, где $\psi_n(x_1, \dots, x_n) \in L_2$ – симметричные относительно перестановки любых переменных x_l и $x_k \in \mathbf{T}^3$, $n = 0, 1, \dots, \infty$.

Операторы рождения и уничтожения в $\mathcal{H}_B$ будем обозначать соответственно $\hat{\psi}^+(x)$ и $\hat{\psi}^-(x)$, вакуумный вектор [3] – Φ_0 .

Набору операторов $\{\hat{A}_N\}$, рассмотренному выше, соответствует оператор $\hat{A}$ в пространстве Фока $\mathcal{H}_B$.

Операторы $\hat{b}_l^+(x_1, \dots, x_l, j)$, $\hat{b}_l^-(x_1, \dots, x_l, j)$, $l = 1, \dots, k$, и операторы $\hat{\psi}^+(x)$, $\hat{\psi}^-(x)$, $\hat{A}$ естественным образом переносятся в $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{F}$. Будем использовать для соответствующих операторов в $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{F}$ те же обозначения.

Рассмотрим в $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{F}$ оператор вида

$$\begin{aligned} \hat{A}_{N_1, \dots, N_k} = & \frac{1}{N_1! \dots N_k! (N_1 + \dots + kN_k)!} \hat{A}^5 \exp \left(- \int dx \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^-(x) \right) \times \\ & \times \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \int \int dx_1^1 dy_1^1 \hat{b}_1^+(x_1^1, j_1) \hat{b}_1^-(y_1^1, j_1) \hat{\psi}^+(y_1^1) \hat{\psi}^-(x_1^1) \right)^{N_1} \times \dots \\ & \dots \times \left(\sum_{j_k=1}^{\infty} \int \dots \int dx_1^k dy_1^k \dots dx_k^k dy_k^k \hat{b}_k^+(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k) \hat{b}_k^-(y_1^k, \dots, y_k^k, j_k) \times \right. \\ & \quad \times \hat{\psi}^+(y_1^k) \hat{\psi}^-(x_1^k) \dots \hat{\psi}^+(y_k^k) \hat{\psi}^-(x_k^k) \left. \right)^{N_k} \times \\ & \times \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz \hat{b}_1^+(z, j) \hat{b}_1^-(z, j) - \dots \right. \\ & \quad \left. \dots - \sum_{j=1}^{\infty} \int \dots \int dz_1 \dots dz_k \hat{b}_k^+(z_1, \dots, z_k, j) \hat{b}_k^-(z_1, \dots, z_k, j) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Имеет место следующая

ЛЕММА. *Справедливо тождество*

$$\text{Sp}_{\mathcal{H}_B} \hat{A}_{N_1, \dots, N_k} = \hat{i}_{N_1, \dots, N_k} \tilde{\hat{A}}_{N_1 + \dots + kN_k} \hat{P}_{N_1, \dots, N_k}^B \hat{P}_{N_1, \dots, N_k}, \quad (3)$$

где $\text{Sp}_{\mathcal{H}_B} \hat{A}_{N_1, \dots, N_k}$ – операторнозначный след оператора $\hat{A}_{N_1, \dots, N_k}$ по пространству $\mathcal{H}_B$. Этот след зависит от упорядоченных операторов $\hat{b}_l^+(x_1, \dots, x_l, j)$, $\hat{b}_l^-(x_1, \dots, x_l, j)$ и является оператором в пространстве $\mathcal{F}$ [4].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем тождество для случая $k = 1$. Рассмотрим в $\mathcal{H}_B$ оператор

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(N_1!)^2} \hat{A}^5 \exp \left(- \int dx \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^-(x) \right) \times \\ & \times \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \int \int dx_1^1 dy_1^1 \varphi_1^*(x_1^1, j_1) \varphi_1(y_1^1, j_1) \hat{\psi}^+(y_1^1) \hat{\psi}^-(x_1^1) \right)^{N_1} \times \\ & \times \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz \varphi_1^*(z, j) \varphi_1(z, j) \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\varphi_1(x, j) \in L_2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \int dx \varphi_1^*(x, j) \varphi_1(x, j) < \infty.$$

Используя методы [4], представим след этого оператора в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(N_1!)^2} \left(\Phi_n, \hat{A} \exp \left(- \int dx \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^-(x) \right) \times \right. \\ & \quad \times \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \int \int dx dy \varphi_1^*(x, j_1) \varphi_1(y, j_1) \hat{\psi}^+(y) \hat{\psi}^-(x) \right)^{N_1} \times \\ & \quad \times \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz \varphi_1^*(z, j) \varphi_1(z, j) \right) \Phi_n \Big) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(N_1!)^2} \left(\Phi_n, \hat{A} \hat{P}_0 \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \int \int dx dy \varphi_1^*(x, j_1) \varphi_1(y, j_1) \hat{\psi}^+(y) \hat{\psi}^-(x) \right)^{N_1} \Phi_n \right) \times \\ & \quad \times \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz \varphi_1^*(z, j) \varphi_1(z, j) \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где Φ_n , $n = 0, 1, \dots$, — полная ортонормированная система в $\mathcal{F}$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathcal{F}$, $\hat{P}_0$ — оператор проектирования на вакуумный вектор Φ_0 , который согласно [3] имеет вид

$$\hat{P}_0 = \exp \left(- \int dx \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^-(x) \right).$$

Из (5), используя полноту системы Φ_n и свойства операторов $\hat{\psi}^+(x)$, $\hat{\psi}^-(x)$ [3], получим для следа оператора (4) выражение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(N_1!)^2} \left(\Phi_0, \hat{A} \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \int \int dx dy \varphi_1^*(x, j_1) \varphi_1(y, j_1) \hat{\psi}^-(y) \hat{\psi}^+(x) \right)^{N_1} \Phi_0 \right) \times \\ & \quad \times \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz \varphi_1^*(z, j) \varphi_1(z, j) \right), \end{aligned}$$

из которого, используя свойства операторов $\hat{\psi}^+(x)$, $\hat{\psi}^-(x)$ [3], находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_1!} \sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_{N_1}=1}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_{N_1} \varphi_1^*(x_1, j_1) \dots \varphi_1^*(x_{N_1}, j_{N_1}) \times \\ & \quad \times \hat{A}_{N_1} \text{Symm}_{x_1 \dots x_{N_1}} \varphi_1(x_1, j_1) \dots \varphi_1(x_{N_1}, j_{N_1}) \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz \varphi_1^*(z, j) \varphi_1(z, j) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставим в выражения (6) и (4) вместо функций $\varphi_1^*(x, j)$ и $\varphi_1(x, j)$ упорядоченные операторы — соответственно $\hat{b}_1^+(x, j)$ и $\hat{b}_1^-(x, j)$. В этом случае выражение (6) совпадает с (1) при $k = 1$, а (4) согласно [4] совпадает с операторнозначным следом оператора

$\hat{A}_{N_1, \dots, N_k}$ по пространству $\mathcal{H}_B$. Таким образом, лемма при $k = 1$ доказана. В случае $k > 1$ доказательство аналогичное.

Введем понятие производящего оператора для осредненного оператора $\bar{\hat{A}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем называть производящим оператором осредненного оператора $\bar{\hat{A}}$ оператор в $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{F}$ вида

$$\begin{aligned} \hat{A}_g \left(\overset{5}{A}; \overset{4}{\hat{\psi}^+}(x), \overset{3}{\hat{\psi}^-}(x); \overset{2}{\hat{b}_1^+}(x_1^1, j^1), \dots, \overset{2}{\hat{b}_k^+}(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k), \right. \\ \left. \overset{1}{\hat{b}_1^-}(x_1^1, j^1), \dots, \overset{1}{\hat{b}_k^-}(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k) \right) = \\ = \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \sum_{N_k=0}^{\infty} \varepsilon^{N_1+\dots+N_k} C_{N_1, \dots, N_k} (N_1 + \dots + kN_k)! \hat{A}_{N_1, \dots, N_k} \times \\ \times \exp \left(+ \sum_{j=1}^{\infty} \int dz \overset{2}{\hat{b}_1^+}(z, j) \overset{1}{\hat{b}_1^-}(z, j) + \dots \right. \\ \left. \dots + \sum_{j=1}^{\infty} \int \dots \int dz_1 \dots dz_k \overset{2}{\hat{b}_k^+}(z_1, \dots, z_k, j) \overset{1}{\hat{b}_k^-}(z_1, \dots, z_k, j) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Будем также обозначать этот оператор как $\hat{A}_g$. Из леммы следует, что $\bar{\hat{A}}$ и $\hat{A}_g$ связаны соотношением

$$\bar{\hat{A}} = \text{Sp}_{\mathcal{H}_B} \hat{A}_g. \quad (8)$$

На множестве производящих операторов определим операцию умножения, а именно, будем называть произведением операторов $\hat{A}_g$ и $\hat{B}_g$ оператор $\hat{C}_g$ вида

$$\begin{aligned} \hat{C}_g = \left[\left[\hat{A}_g \left(\overset{5}{A}; \overset{4}{\hat{\psi}^+}(x), \overset{3}{\hat{\psi}^-}(x); \overset{2}{\hat{b}_1^+}(x_1^1, j^1), \dots, \overset{2}{\hat{b}_k^+}(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k), \right. \right. \right. \\ \left. \left. \overset{1}{\hat{b}_1^-}(x_1^1, j^1), \dots, \overset{1}{\hat{b}_k^-}(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k) \right) \right] \times \\ \times \left[\left[\hat{B}_g \left(\overset{5}{B}; \overset{4}{\hat{\psi}^+}(y), \overset{3}{\hat{\psi}^-}(y); \overset{2}{\hat{b}_1^+}(y_1^1, j_1^1), \dots, \overset{2}{\hat{b}_k^+}(y_1^k, \dots, y_k^k, j_k^k), \right. \right. \right. \\ \left. \left. \overset{1}{\hat{b}_1^-}(y_1^1, j_1^1), \dots, \overset{1}{\hat{b}_k^-}(y_1^k, \dots, y_k^k, j_k^k) \right) \right] \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где использованы автономные скобки $[\ ]$ и операция умножения автономных скобок, которая обозначается номерами [4]. С помощью этого произведения мы вводим алгебру производящих операторов π . Произведение производящих операторов определяет произведение осредненных операторов. А именно, будем называть произведением осредненных операторов $\bar{\hat{A}}$ и $\bar{\hat{B}}$ оператор

$$\bar{\hat{C}} = \text{Sp}_{\mathcal{H}_B} \hat{C}_g = \text{Sp}_{\mathcal{H}_B} (\hat{A}_g \hat{B}_g),$$

где для произведения производящих операторов $\hat{A}_g$ и $\hat{B}_g$ (9) использовано обозначение $\hat{A}_g \hat{B}_g$.

Таким образом, мы ввели алгебру $\mathcal{A}$ для осредненных операторов, индуцированную алгеброй π для производящих операторов.

Алгебра π дает возможность определить функции от производящих операторов. В частности, степенная функция ξ^n , $n \in \mathbb{N}$, от производящего оператора $\hat{A}_g$ равна

$$(\hat{A}_g)_G^n = \left(\left[\left[\hat{A}_g \left(\hat{\psi}^+(x), \hat{\psi}^-(x); \hat{b}_1^+(x_1^1, j^1), \dots, \hat{b}_k^+(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k), \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \hat{b}_1^-(x_1^1, j^1), \dots, \hat{b}_k^-(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k) \right) \right] \right] \right)^n.$$

В общем случае целую функцию $F(\xi)$ от производящего оператора $\hat{A}_g$ будем обозначать $F_G(\hat{A}_g)$, это есть оператор вида

$$F_G(\hat{A}_g) = F \left(\left[\left[\hat{A}_g \left(\hat{\psi}^+(x), \hat{\psi}^-(x); \hat{b}_1^+(x_1^1, j^1), \dots, \hat{b}_k^+(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k), \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \hat{b}_1^-(x_1^1, j^1), \dots, \hat{b}_k^-(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k) \right) \right] \right] \right).$$

Отметим, что производящий оператор $\hat{A}_g$ действует в пространстве $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{F}$ и зависит от двух типов операторов рождения и уничтожения $-\hat{b}_l^\pm$ и $\hat{\psi}^\pm$, причем операторы разных типов коммутируют, а операторы одного типа нормально упорядочены [3]. На самом деле нас интересует случай большого числа частиц и асимптотика решения по большому числу частиц, поэтому если рассматриваемые функции не являются целыми, то мы можем, регуляризовав их, а затем написав асимптотическое разложение по N , устремить параметр регуляризации к нулю. Более точно такая процедура описывается с помощью однопараметрического семейства фоковских пространств аналогично тому, как это было проделано с использованием семейств гильбертовых пространств, введенных в [5].

ПРИМЕР 2. Производящий оператор $\hat{E}_g$ для осредненного оператора $\bar{\bar{E}}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{E}_g = & \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \sum_{N_k=0}^{\infty} \frac{C_{N_1, \dots, N_k}}{N_1! \dots N_k!} \epsilon^{N_1 + \dots + N_k} \exp \left(- \int dx \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^-(x) \right) \times \\ & \times \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \int \int dx_1^1 dy_1^1 \hat{b}_1^+(x_1^1, j_1) \hat{b}_1^-(y_1^1, j_1) \hat{\psi}^+(y_1^1) \hat{\psi}^-(x_1^1) \right)^{N_1} \times \dots \\ & \dots \times \left(\sum_{j_k=1}^{\infty} \int \dots \int dx_1^k dy_1^k \dots dx_k^k dy_k^k \hat{b}_k^+(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k) \hat{b}_k^-(y_1^k, \dots, y_k^k, j_k) \times \right. \\ & \times \left. \hat{\psi}^+(y_1^k) \hat{\psi}^-(x_1^k) \dots \hat{\psi}^+(y_k^k) \hat{\psi}^-(x_k^k) \right)^{N_k}. \end{aligned} \quad (10)$$

Введем производящий оператор

$$\widehat{S}_g = f_G(\widehat{E}_g).$$

Соответствующий ему осредненный оператор будем обозначать через $\overline{\widehat{S}}$.

Пусть $\widehat{H}$ – оператор в $\mathcal{H}_B$, который является оператором Гамильтона системы бозонов в представлении вторичного квантования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Выражение

$$\overline{\widehat{F}}_\theta = \overline{\widehat{H}} + \theta \overline{\widehat{S}} - \theta f(\overline{\widehat{E}}) \quad (11)$$

будем называть осредненным оператором квантовой свободной энергии при температуре $\theta \geq 0$ с “весом” $\overline{\widehat{E}}$.

3. Коэффициенты $C_{N_1, \dots, N_k}$, входящие в осредненные операторы, не являются произвольными, а удовлетворяют некоторым условиям. Рассмотрим выражение вида

$$\begin{aligned} \overline{N^m} = & \left\{ \sum_{N_1, \dots, N_k} C_{N_1, \dots, N_k} \frac{(N_1 + \dots + kN_k)!}{N_1! \dots N_k!} \varepsilon^{N_1 + \dots + N_k} (N_1 + \dots + kN_k)^m \times \right. \\ & \times \sum_{j_1^1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_1}^1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_1^k=1}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_k}^k=1}^{\infty} \int \dots \int dx_1^1 \dots dx_{N_1}^1 \dots dx_1^k \dots dx_{N_k}^k \times \\ & \times \varphi_1^*(x_1^1, j_1^1) \dots \varphi_1^*(x_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \times \dots \\ & \dots \times \varphi_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j_1^k) \dots \varphi_k^*(x_{kN_k-k+1}^k, \dots, x_{kN_k}^k, j_{N_k}^k) \times \\ & \times \text{Symm}_{x_1^k, \dots, x_{kN_k}^k} \left(\varphi_1(x_1^1, j_1^1) \dots \varphi_1(x_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \dots \varphi_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j_1^k) \times \dots \right. \\ & \left. \dots \times \varphi_k(x_{kN_k-k+1}^k, \dots, x_{kN_k}^k, j_{N_k}^k) \right) \Big\} \times \\ & \times \left\{ \sum_{N'_1, \dots, N'_k} C_{N'_1, \dots, N'_k} \frac{(N'_1 + \dots + kN'_k)!}{N'_1! \dots N'_k!} \varepsilon^{N'_1 + \dots + N'_k} \times \right. \\ & \times \sum_{i_1^1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_{N_1}^1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_1^k=1}^{\infty} \dots \sum_{i_{N_k}^k=1}^{\infty} \int \dots \int dy_1^1 \dots dy_{N_1}^1 \dots dy_1^k \dots dy_{N_k}^k \times \\ & \times \varphi_1^*(y_1^1, i_1^1) \dots \varphi_1^*(y_{N_1}^1, i_{N_1}^1) \times \dots \\ & \dots \times \varphi_k^*(y_1^k, \dots, y_k^k, i_1^k) \dots \varphi_k^*(y_{kN_k-k+1}^k, \dots, y_{kN_k}^k, i_{N_k}^k) \times \\ & \times \text{Symm}_{y_1^k, \dots, y_{kN_k}^k} \left(\varphi_1(y_1^1, i_1^1) \dots \varphi_1(y_{N_1}^1, i_{N_1}^1) \dots \varphi_k(y_1^k, \dots, y_k^k, i_1^k) \times \dots \right. \\ & \left. \dots \times \varphi_k(y_{kN_k-k+1}^k, \dots, y_{kN_k}^k, i_{N_k}^k) \right) \Big\}^{-1}. \quad (12) \end{aligned}$$

где $\varphi_l(x_1, \dots, x_l, j)$, $l = 1, \dots, k$, — такие функции, что

$$\int \dots \int dx_1 \dots dx_l \sum_j |\varphi_l(x_1, \dots, x_l, j)|^2 < \infty.$$

Условие на коэффициенты $C_{N_1, \dots, N_k}$ заключается в том, что при $\overline{N^1} \rightarrow \infty$ выполняется равенство

$$\overline{N^m} = (\overline{N^1})^m (1 + o(1)) \quad (13)$$

для любого m . В случае $k = 1$ условиям (13) удовлетворяют, например, коэффициенты вида

$$C_{N_1} = \frac{A^{N_1}}{(N_1!)^\delta}, \quad (14)$$

где $\delta > 0$, $A > 0$.

Будем далее обозначать через

$$F(b_1^*(x_1^1, j^1), b_1(x_1^1, j^1), \dots, b_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k), b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k))$$

выражение (11), в котором операторы $\hat{b}_l^+(x_1, \dots, x_l, j)$ и $\hat{b}_l^-(x_1, \dots, x_l, j)$ заменены символами — функциями $b_l^*(x_1, \dots, x_l, j)$ и $b_l(x_1, \dots, x_l, j)$, соответственно.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(b_1^*(x_1^1, j_1), b_1(x_1^1, j_1), \dots, b_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k), b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k)) = \\ & = F(b_1^*(x_1^1, j^1), b_1(x_1^1, j^1), \dots, b_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k), b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k)) \times \\ & \times \left\{ \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \sum_{N_k=0}^{\infty} \varepsilon^{N_1+\dots+N_k} C_{N_1, \dots, N_k} \frac{(N_1 + \dots + kN_k)!}{N_1! \dots N_k!} \times \right. \\ & \times \sum_{i_1^1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_{N_1}^1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_1^k=1}^{\infty} \dots \sum_{i_{N_k}^k=1}^{\infty} \int \dots \int dy_1^1 \dots dy_{N_1}^1 \dots dy_1^k \dots dy_{N_k}^k \times \\ & \times b_1^*(y_1^1, i_1^1) \dots b_1^*(y_{N_1}^1, i_{N_1}^1) \dots b_k^*(y_1^k, \dots, y_k^k, i_1^k) \dots b_k^*(y_{N_k-k+1}^k, \dots, y_{N_k}^k, i_{N_k}^k) \times \\ & \times \text{Symm}_{y_1^k, \dots, y_{N_k}^k} \left(b_1(y_1^1, i_1^1) \dots b_1(y_{N_1}^1, i_{N_1}^1) \dots b_k(y_1^k, \dots, y_k^k, i_1^k) \times \right. \\ & \left. \left. \times b_k(y_{N_k-k+1}^k, \dots, y_{N_k}^k, i_{N_k}^k) \right) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Выражение $\mathcal{H}(b_1^*(x_1^1, j_1), b_1(x_1^1, j_1), \dots, b_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k), b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k))$ назовем символом свободной энергии.

4. Рассмотрим случай $k = 1$, когда коэффициенты C_{N_1} имеют вид $C_{N_1} = 1/N_1!$, $\delta = 1$ (частный случай (14)). Будем считать, что гамильтониан системы бозонов $\hat{H}$ в представлении вторичного квантования имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\frac{\hbar^2}{2m} \int dx \hat{\psi}^+(x) \Delta \hat{\psi}^-(x) + \frac{U_0}{2} \iint dx dy v\left(\frac{x-y}{a}\right) \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^+(y) \hat{\psi}^-(y) \hat{\psi}^-(x) - \\ & - \mu \int dx \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^-(x), \end{aligned} \quad (16)$$

где Δ – оператор Лапласа, μ – химический потенциал, m – масса бозонов, $\hbar$ – постоянная Планка, U_0 – постоянная взаимодействия, a – характерная длина.

Символ (15) может быть вычислен при $k = 1$ в термодинамическом пределе при $L \rightarrow \infty$, где L – длина стороны трехмерного тора $\mathbf{T}^3$. А именно, пусть функции $b_1(x, j)$ в пределе при $L \rightarrow \infty$ таковы, что

$$\sum_j b_1^*(x, j) b_1(y, j) = \overline{N} \sum_p a_p \varphi_p^*(x) \varphi_p(y), \quad (17)$$

где $0 \leq a_p < 1$, $\overline{N} \geq 0$, p – трехмерные векторы вида $p = (n_1, n_2, n_3)2\pi a/L$, n_α , $\alpha = 1, 2, 3$, – целые числа, $\sum_p$ – сумма по счетному множеству всех таких векторов, $\varphi_p(x)$ – полная ортонормированная система функций в $L_2(\mathbf{T}^3)$ вида

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{ipx/a}. \quad (18)$$

Кроме того, для a_p и $\overline{N}$ выполняется равенство

$$\overline{N} = \sum_p \frac{a_p}{1 - a_p}. \quad (19)$$

В этом случае главный член асимптотики символа (15) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(b_1^*(x, j), b_1(x, j)) = & \sum_p \frac{\hbar^2 p^2}{2ma^2} n_p + \frac{U_0 a^3}{2L^3} \sum_{pq} (\tilde{v}(0) + \tilde{v}(p-q)) n_p n_q + \\ & + \theta \sum_p (n_p \ln n_p - (1 + n_p) \ln(1 + n_p)) - \mu \sum_p n_p, \end{aligned} \quad (20)$$

где $n_p = a_p/(1 - a_p)$, $\tilde{v}(q) = \int dx v(x) e^{-iqx}$.

Если для $b_1(x, j)$ при $p = p_0$ не выполняется неравенство $0 \leq a_p < 1$, то в этом случае в формуле (17) $a_{p_0} = 1$ и, кроме того,

$$\overline{N} - \sum_{p \neq p_0} \frac{a_p}{1 - a_p} = N_0 > 0, \quad (21)$$

число N_0 будем называть числом частиц в конденсате. Для таких функций $b_1(x, j)$ символ (15) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(b_1^*(x, j), b_1(x, j)) &= \frac{\hbar^2 p_0^2}{2ma^2} N_0 + \sum_p \frac{\hbar^2 p^2}{2ma^2} n_p + \frac{U_0 a^3}{2L^3} N_0^2 \tilde{v}(0) + \\ &+ \frac{U_0 a^3}{2L^3} \sum_{pq} (\tilde{v}(0) + \tilde{v}(p-q)) n_p n_q + \frac{U_0 a^3}{L^3} N_0 \sum_p (\tilde{v}(0) + \tilde{v}(p)) n_p + \\ &+ \theta \sum_p (n_p \ln n_p - (1+n_p) \ln(1+n_p)) - \mu N_0 - \mu \sum_p n_p, \end{aligned} \quad (22)$$

где $n_p = a_p / (1 - a_p)$ при $p \neq p_0$, $n_{p_0} = 0$.

Рассмотрим систему Гамильтона

$$\begin{aligned} i \frac{\partial b_1}{\partial t}(x, j; t) &= \frac{\delta \mathcal{H}(b_1^*(x, j; t), b_1(x, j; t))}{\delta b_1^*(x, j; t)}, \\ i \frac{\partial b_1^*}{\partial t}(x, j; t) &= - \frac{\delta \mathcal{H}(b_1^*(x, j; t), b_1(x, j; t))}{\delta b_1(x, j; t)}. \end{aligned} \quad (23)$$

В случае, когда нет конденсата, система (23) имеет не зависящие от времени t решения вида

$$b(x, j, t) = \sqrt{\overline{N} a_{p_j}} \varphi_{p_j}(x), \quad b^*(x, j, t) = \sqrt{\overline{N} a_{p_j}} \varphi_{p_j}^*(x), \quad (24)$$

где $j = 1, 2, \dots$, p_j — взаимнооднозначное отображение множества натуральных чисел $j = 1, 2, \dots$ на множество векторов $p = 2\pi a / L(n_1, n_2, n_3)$, n_α — целые; обратное отображение будем обозначать через $j(p)$, числа a_p являются решениями уравнения

$$\frac{\hbar^2 p^2}{2ma^2} - \mu + \frac{U_0 a^3}{L^3} \sum_p (\tilde{v}(0) + \tilde{v}(p-q)) n_p + \theta \ln \left(\frac{n_p}{1+n_p} \right) = 0, \quad (25)$$

n_p и $\overline{N}$ выражаются так же, как в (20) и (19), соответственно. В случае, когда есть конденсат, не зависящие от времени решения системы (23) имеют вид (24), где $a_{p_0} = 1$, а числа a_p при $p \neq p_0$ являются решениями уравнения

$$\frac{\hbar^2 p^2}{2ma^2} - \mu + \frac{U_0 a^3}{L^3} N_0 (\tilde{v}(0) + \tilde{v}(p)) + \frac{U_0 a^3}{L^3} \sum_q (\tilde{v}(0) + \tilde{v}(p-q)) n_q + \theta \ln \left(\frac{n_p}{1+n_p} \right) = 0, \quad (26)$$

где N_0 находится из уравнения

$$\frac{\hbar^2 p^2}{2ma^2} - \mu + \frac{U_0 a^3}{L^3} N_0 \tilde{v}(0) + \frac{U_0 a^3}{L^3} \sum_q (\tilde{v}(0) + \tilde{v}(p-q)) n_q = 0,$$

кроме того, n_p и $\bar{N}$ выражаются так же, как в (20) и (21). Устойчивость в линейном приближении решений (24) системы Гамильтона (23) определяется собственными значениями системы в вариациях

$$\begin{aligned}\lambda \delta b_1(x, j) &= \sum_{i=1}^{\infty} \int dy \left(\frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta b_1^*(x, j) \delta b_1^*(y, i)} \delta b_1^*(y, i) + \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta b_1^*(x, j) \delta b_1(y, i)} \delta b_1(y, i) \right), \\ \lambda \delta b_1^*(x, j) &= - \sum_{i=1}^{\infty} \int dy \left(\frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta b_1(x, j) \delta b_1^*(y, i)} \delta b_1^*(y, i) + \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta b_1(x, j) \delta b_1(y, i)} \delta b_1(y, i) \right).\end{aligned}\quad (27)$$

Сделаем в (27) замену переменных, а именно, пусть

$$F_{pq} = \frac{\sqrt{a_p} B_{pq} + \sqrt{a_p} D_{qp}}{\sqrt{\bar{N}}(a_p - a_q)}, \quad p \neq q, \quad (28)$$

где a_p – решение уравнения (25) или (26), $\bar{N}$ выражается по формуле (19) или (21) (в соответствующих случаях), а B_{pq} и D_{qp} выражаются через $\delta b(x, j)$ и $\delta b^*(x, j)$ следующим образом:

$$B_{pq} = \int dx \delta b(x, j(p)) \varphi_q(x), \quad D_{pq} = \int dx \delta b^*(x, j(p)) \varphi_q(x). \quad (29)$$

Тогда для функции F_{pq} из уравнений (27) получим уравнение

$$\begin{aligned}\lambda F_{pq} &= \frac{1}{\bar{N}(a_p - a_q)} \left\{ \delta_{pp_0} \left[N_0 \frac{\hbar^2}{2ma^2} (q^2 - p_0^2) F_{p_0q} + N_0^2 \frac{U_0 a^3}{L^3} \tilde{v}(q - p_0) F_{p_0q} - \right. \right. \\ &\quad - N_0^2 \frac{U_0 a^3}{L^3} \tilde{v}(q - p_0) F_{2p_0 - qp_0} + N_0 \sum_{p'} n_{p'} \frac{U_0 a^3}{L^3} (\tilde{v}(p' - q) - \tilde{v}(p' - p_0)) F_{p_0q} + \\ &\quad + N_0 \frac{U_0 a^3}{L^3} \sum_{p'q'} (\tilde{v}(p' - q') - \tilde{v}(p' - p_0)) (n_{p'} - n_{q'}) F_{p'q'} \delta_{q+p', q'} \Big] + \\ &\quad + \delta_{qp_0} \left[N_0 \frac{\hbar^2}{2ma^2} (p^2 - p_0^2) F_{pp_0} + N_0^2 \frac{U_0 a^3}{L^3} \tilde{v}(p - p_0) F_{pp_0} - \right. \\ &\quad - N_0^2 \frac{U_0 a^3}{L^3} \tilde{v}(p - p_0) F_{p_0 2p_0 - p} + N_0 \frac{U_0 a^3}{L^3} \sum_{p'} n_{p'} (\tilde{v}(p' - p) - \tilde{v}(p' - p_0)) F_{pp_0} + \\ &\quad + N_0 \frac{U_0 a^3}{L^3} \sum_{p'q'} (\tilde{v}(p' - q') - \tilde{v}(q' - p_0)) (n_{p'} - n_{q'}) F_{p'q'} \delta_{p'+q', p} \Big] + \\ &\quad + \left(\frac{\hbar^2}{2ma^2} (n_p - n_q) (q^2 - p^2) + N_0 \frac{U_0 a^3}{L^3} (\tilde{v}(q - p_0) - \tilde{v}(p - p_0)) (n_p - n_q) + \right. \\ &\quad + \frac{U_0 a^3}{L^3} \sum_{p'} (\tilde{v}(q - p') - \tilde{v}(p - p')) (n_p - n_q) n_{p'} \Big) F_{pq} + \\ &\quad \left. + \frac{U_0 a^3}{L^3} \sum_{p'q'} (\tilde{v}(q - p) + \tilde{v}(q - q')) \delta_{q+p', q'+p} (n_{p'} - n_{q'}) (n_p - n_q) F_{p'q'} \right\}, \quad (30)\end{aligned}$$

где δ_{pq} – символ Кронекера, равный 1 при $p = q$ и 0 при $p \neq q$. Если собственные значения (30) действительные, то стационарные решения (24)–(26) системы (23) устойчивы в линейном приближении.

Если при температуре θ существуют решения уравнений (25) и (26), то решением, отвечающим равновесному состоянию, является то, для которого меньше значение символа (15), определяемое по формулам (20) и (22) в соответствующих случаях. При температуре θ_c , выше которой число частиц в конденсате $N_0 = 0$, а ниже $N_0 > 0$, происходит фазовый переход. Уравнения (25) и (26) позволяют определить температуру фазового перехода, так как они, а также выражения (20) и (22), совпадают друг с другом в случае, когда число частиц N_0 в конденсате равно нулю. Причем оказывается, что таким образом определенная θ_c совпадает с критической температурой для системы бозонов, полученной с помощью различных методов статистической физики в работах [6–8].

При $\theta = 0$ существуют решения уравнений (26): $a_{p_0} = 1$, $a_p = 0$ при $p \neq p_0$, для этих решений $N_0 = \bar{N}$ – все частицы находятся в конденсате. Уравнения в вариациях в этом случае сведутся к уравнениям вида

$$\begin{aligned} \lambda F_{p_0 q} &= \left(\frac{\hbar^2}{2ma^2}(q^2 - p_0^2) + \bar{N} \frac{U_0 a^3}{L^3} \tilde{v}(q - p_0) \right) F_{p_0 q} - \bar{N} \frac{U_0 a^3}{L^3} \tilde{v}(q - p_0) F_{2p_0 - qp_0}, \\ \lambda F_{2p_0 - qp_0} &= - \left(\frac{\hbar^2}{2ma^2}((2p_0 - q)^2 - p_0^2) + \bar{N} \frac{U_0 a^3}{L^3} \tilde{v}(q - p_0) \right) F_{2p_0 - qp_0} + \\ &\quad + \bar{N} \frac{U_0 a^3}{L^3} \tilde{v}(q - p_0) F_{p_0 q}. \end{aligned} \quad (31)$$

Собственные значения системы (31) имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\hbar^2}{ma^2}(p_0(p_0 - q)) \pm \\ &\pm \sqrt{\left(\frac{\hbar^2}{2ma^2}(p_0 - q)^2 + \bar{N} \frac{U_0 a^3}{L^3} \tilde{v}(q - p_0) \right)^2 - \left(\bar{N} \frac{U_0 a^3}{L^3} \tilde{v}(q - p_0) \right)^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Система уравнений (31) и ее собственные значения (32) хорошо известны, в частности, они были получены в [9] и в теории сверхтекучести [10].

5. Найдем теперь символ оператора квантовой свободной энергии (11) при малой плотности частиц. Для простоты мы дадим эмпирический вывод, хотя его можно обосновать математически строго. Выберем коэффициенты суммирования в виде $C_{N_1, \dots, N_k} = 1$, $\varepsilon = 1/\bar{N}$, где $\bar{N}$ – среднее число частиц в системе. Такие коэффициенты суммирования являются в случае $k = 1$ пределом коэффициентов (14) при $\delta \rightarrow 0$. Поскольку $\hat{b}_l^+(x_1, \dots, x_l, j)$ и $\hat{b}_l^-(x_1, \dots, x_l, j)$ являются сопряженными друг другу операторами, то имеет место следующее равенство для символов этих операторов:

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_l(x_1, \dots, x_l, j) b_l^*(x_1, \dots, x_l, j) = \bar{N} \sum_{i=1}^{\infty} a_{li} \Phi_{li}(x_1, \dots, x_l) \Phi_{li}^*(y_1, \dots, y_l), \quad (33)$$

где $l = 1, \dots, k$, $0 \leq a_{li} \leq 1/l!$, $\Phi_{li}(x_1, \dots, x_l)$, $i = 1, \dots, \infty$, — полная ортонормированная система функций в $L_2(\mathbf{T}^{3l})$. В случае малой плотности различные функции $\Phi_{li}(x_1, \dots, x_l)$ слабо “перекрываются”, поэтому интегралы вида

$$\begin{aligned} & \int \dots \int dx_1^1 \dots dx_{l_1}^1 \dots dx_1^M \dots dx_{l_M}^M f(x_1^1, \dots, x_{l_1}^1, \dots, x_1^M, \dots, x_{l_M}^M) \times \\ & \times \Phi_{l_1 i_1}^*(x'_1, \dots, x'_{l_1}) \dots \Phi_{l_M i_M}^*(x_1^M, \dots, x_{l_M}^M) \times \\ & \times \text{Symm}_{x_1^1 \dots x_{l_M}^M} \Phi_{l_1 i'_1}(x_1^1, \dots, x_{l_1}^1) \dots \Phi_{l_M i'_M}(x_1^M, \dots, x_{l_M}^M), \end{aligned}$$

где $l_1, \dots, l_M \geq 1$, в случае, когда $(i_1, \dots, i_M) \neq (i'_1, \dots, i'_M)$, малы по сравнению с интегралами этого же вида, когда $(i_1, \dots, i_M) = (i'_1, \dots, i'_M)$. Из этого непосредственно вытекает, что символы операторов $\hat{b}_l^{+2}(x_1, \dots, x_l, j)$ и $\hat{b}_l^{-1}(x_1, \dots, x_l, j)$ при малой плотности удовлетворяют следующему приближенному соотношению:

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1^1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_1}^1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_1^k=1}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_k}^k=1}^{\infty} \int \dots \int dx_1^1 \dots dx_{N_1}^1 \dots dx_1^k \dots dx_{N_k}^k b_1^*(x_1^1, j_1^1) \times \dots \\ & \dots \times b_1^*(x_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \dots b_k^*(x_1^k, \dots, x_{N_k}^k, j_1^k) \dots b_k^*(x_{kN_k-k+1}^k, \dots, x_{N_k}^k, j_{N_k}^k) \times \\ & \times \hat{A}_{N_1+\dots+kN_k} \text{Symm}_{x_1^1 \dots x_{N_k}^k} \left(b_1(x_1^1, j_1^1) \dots b_1(x_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \dots b_k(x_1^k, \dots, x_{N_k}^k, j_1^k) \times \dots \right. \\ & \left. \dots \times b_k(x_{kN_k-k+1}^k, \dots, x_{N_k}^k, j_{N_k}^k) \right) \approx \\ & \approx \bar{N}^{N_1+\dots+N_k} \frac{N_1! \dots N_k!}{(N_1 + \dots + kN_k)!} \sum_{\substack{\{n_i^1\} \\ \sum_{i=1}^{\infty} n_i^1 = N_1}} \dots \sum_{\substack{\{n_i^k\} \\ \sum_{i=1}^{\infty} n_i^k = N_k}} \left\{ \left(\prod_{l=1}^k \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - a_{li} l!} \right) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{l'=1}^k \sum_{i'=1}^{\infty} \frac{a_{l'i'} l'!}{1 - a_{l'i'} l'!} \int \dots \int dx_1 \dots dx_{l'} \Phi_{l'i'}^*(x_1, \dots, x_{l'}) \hat{A}_{l'} \Phi_{l'i'}(x_1, \dots, x_{l'}) \right\}. \quad (34) \end{aligned}$$

Из приближенного равенства (34) и из (33) для символа свободной энергии (15) по-

лучим

$$\begin{aligned}
F(b_1^*(x_1, j_1), b_1(x_1, j_1), \dots, b_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k), b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k)) \approx \\
\approx \exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty} \int dz_1 b_1^*(z_1, j) b_1(z_1, j) - \dots \right. \\
\left. \dots - \sum_{j=1}^{\infty} \int \dots \int dz_1 \dots dz_k b_k^*(z_1, \dots, z_k, j), b_k(z_1, \dots, z_k, j)\right) \times \\
\times \exp\left(-\text{Sp}(\ln(1 - \hat{\rho}_1(b_1^*, b_1))) - \dots - \text{Sp}(\ln(1 - k! \hat{\rho}_k(b_k^*, b_k)))\right) \times \\
\times \left\{ \sum_{l=1}^k \text{Sp}(\hat{H}_l l! \hat{\rho}_l(b_l^*, b_l) (1 - l! \hat{\rho}_l(b_l^*, b_l))^{-1}) + \right. \\
+ \theta \sum_{l=1}^k \text{Sp}(\ln(l! \hat{\rho}_l(b_l^*, b_l)) l! \hat{\rho}_l(b_l^*, b_l) (1 - l! \hat{\rho}_l(b_l^*, b_l))^{-1}) + \\
\left. + \theta \sum_{l=1}^k \text{Sp}(\ln(1 - l! \hat{\rho}_l(b_l^*, b_l))) \right\}, \quad (35)
\end{aligned}$$

где $\hat{\rho}_l(b_l^*, b_l)$ — операторы в $L_2(\mathbf{T}^{3l})$, ядра которых имеют вид

$$\rho_l(x_1, \dots, x_l; y_1, \dots, y_l; b_l^*, b_l) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{\infty} b_l^*(y_1, \dots, y_l, j) b_l(x_1, \dots, x_l, j). \quad (36)$$

Из равенств (34), (35) следует, что символ свободной энергии при малой плотности имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(b_1^*(x_1^1, j_1), b_1(x_1^1, j_1), \dots, b_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k), b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k)) \approx \\
\approx \sum_{l=1}^k \text{Sp}(\hat{H}_l l! \hat{\rho}_l(b_l^*, b_l) (1 - l! \hat{\rho}_l(b_l^*, b_l))^{-1}) + \\
+ \theta \sum_{l=1}^k \text{Sp}(\ln(l! \hat{\rho}_l(b_l^*, b_l)) l! \hat{\rho}_l(b_l^*, b_l) (1 - l! \hat{\rho}_l(b_l^*, b_l))^{-1}) + \\
+ \theta \sum_{l=1}^k \text{Sp}(\ln(1 - l! \hat{\rho}_l(b_l^*, b_l))). \quad (37)
\end{aligned}$$

Система Гамильтона для символа (37) имеет точку покоя $b_l(x_1, \dots, x_l, j)$, $b_l^*(x_1, \dots, \dots, x_l, j)$, $l = 1, \dots, k$, такую что

$$\hat{\rho}_l(b_l^*, b_l) = \frac{1}{l!} \exp\{-\hat{H}_l/\theta\}. \quad (38)$$

Эта точка покоя отвечает минимуму выражения (37).

Если $\Psi_{li}(x_1, \dots, x_l)$, $i = 1, \dots, \infty$, — полная и ортонормированная система из собственных функций оператора $\hat{H}_l$ в $L_2(\mathbf{T}^{3l})$, а соответствующие собственные значения $\varepsilon_{lj} \geq 0$, то отвечающие (38) функции $b_l(x_1, \dots, x_l, j)$ имеют вид

$$b_l(x_1, \dots, x_l, j) = \sqrt{\frac{\bar{N}}{l!}} e^{-\varepsilon_{lj}/2\theta} \Psi_{lj}(x_1, \dots, x_l). \quad (39)$$

Среднее число частиц в системе выражается формулой (12) при $m = 1$:

$$\bar{N} = \sum_{l=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ \varepsilon_j \neq 0}}^{\infty} \frac{l}{e^{\varepsilon_{lj}/\theta} - 1} + N_0, \quad (40)$$

где из первого слагаемого в правой части исключены слагаемые, для которых $\varepsilon_{lj} = 0$. Если $\hat{H}_l$ при каком-либо l имеет собственное значение $\varepsilon_{lj} = 0$, то число частиц в конденсате может быть отлично от нуля: $N_0 \geq 0$. Если нулевых собственных значений нет, то $N_0 = 0$ — конденсата нет.

Рассмотрим систему в вариациях для символа (37) около решения (39), аналогичную (27). Сделаем в этой системе замену переменных

$$\begin{aligned} B_{ji}^l &= \int \cdots \int dx_1 \dots dx_l \delta b(x_1, \dots, x_l, j) \Phi_{li}^*(x_1, \dots, x_l), \\ D_{ji}^l &= \int \cdots \int dx_1 \dots dx_l \delta b^*(x_1, \dots, x_l, j) \Phi_{li}(x_1, \dots, x_l), \quad j, i = 1, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (41)$$

В переменных (41) система в вариациях примет вид

$$\begin{aligned} \lambda B_{ji}^l &= \eta_{ji}^l e^{-\varepsilon_{lj}/2\theta} (B_{ji}^l e^{-\varepsilon_{lj}/2\theta} + D_{ij}^l e^{-\varepsilon_{li}/2\theta}), \\ \lambda D_{ij}^l &= -\eta_{ji}^l e^{-\varepsilon_{li}/2\theta} (B_{ji}^l e^{-\varepsilon_{lj}/2\theta} + D_{ij}^l e^{-\varepsilon_{li}/2\theta}), \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_{ji}^l &= \frac{l!}{\bar{N}} \left(\varepsilon_{lj} \delta^2 g(e^{-\varepsilon_{lj}/\theta}, e^{-\varepsilon_{li}/\theta}, e^{-\varepsilon_{lj}/\theta}) + \varepsilon_{li} \delta^2 g(e^{-\varepsilon_{li}/\theta}, e^{-\varepsilon_{lj}/\theta}, e^{-\varepsilon_{li}/\theta}) + \right. \\ &\quad \left. + \theta \delta^2 f(e^{-\varepsilon_{lj}/\theta}, e^{-\varepsilon_{li}/\theta}, e^{-\varepsilon_{lj}/\theta}) + \theta \delta^2 f(e^{-\varepsilon_{li}/\theta}, e^{-\varepsilon_{lj}/\theta}, e^{-\varepsilon_{li}/\theta}) \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь

$$f(\xi) = \frac{\xi \ln \xi}{1 - \xi} + \ln(1 - \xi), \quad g(\xi) = \frac{\xi}{1 - \xi},$$

$\delta^2 g$, $\delta^2 f$ — разностные производные второго порядка [4]. При наличии конденсата выражение $1/(e^{\varepsilon_{lj}/\theta} - 1)$ для $\varepsilon_{lj} = 0$ в (42) и (43) заменяется на N_0 . Система (43) имеет собственные значения вида

$$\lambda = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_{ij}^l = \eta_{ji}^l (e^{-\varepsilon_{lj}/\theta} - e^{-\varepsilon_{li}/\theta}). \quad (44)$$

При нулевой температуре, когда $\varepsilon_{l_0 j_0} = 0$ для некоторых единственных l_0 и j_0 , собственные значения (44) принимают вид

$$\lambda_{ij_0}^{l_0} = \varepsilon_{l_0 i} - \varepsilon_{l_0 j_0}, \quad (45)$$

а остальные равны нулю. Выражение (45) является естественным при $\theta = 0$ — разность собственных значений l_0 -частичного оператора $\hat{H}_{l_0}$ и его наименьшего собственного значения.

6. Производящий оператор осредненного единичного оператора $\widehat{\widetilde{E}}$ имеет смысл про-квантованной матрицы плотности. Действительно, среднее значение по функции $\Phi \in \mathcal{F}_{N_1 \dots N_k}$ оператора свободной энергии $\widehat{\widetilde{F}}_\theta$ может быть записано в виде

$$\frac{\left(\Phi, \left(\text{Sp}_{\mathcal{H}_B}(\widehat{E}_g \widehat{H}) + \theta \text{Sp}_{\mathcal{H}_B}(\widehat{E}_g \ln \widehat{E}_g) - \theta \text{Sp}_{\mathcal{H}_B} \widehat{E}_g \ln(\text{Sp}_{\mathcal{H}_B} \widehat{E}_g) \right) \Phi \right)}{\left(\Phi, \text{Sp}_{\mathcal{H}_B} \widehat{E}_g \Phi \right)}. \quad (46)$$

Экстремальные значения этого функционала дает задача на собственные значения

$$\left(\text{Sp}_{\mathcal{H}_B}(\widehat{E}_g \widehat{H}) + \theta \text{Sp}_{\mathcal{H}_B}(\widehat{E}_g \ln \widehat{E}_g) \right) \Phi = \lambda \text{Sp}_{\mathcal{H}_B} \widehat{E}_g \Phi. \quad (47)$$

Операторы в уравнении (47) коммутируют со всеми операторами числа частиц

$$\sum_j \int dx_1 \dots dx_l \hat{b}_l^+(x_1, \dots, x_l, j) \hat{b}_l^-(x_1, \dots, x_l, j), \quad l = 1, \dots, k.$$

Положим собственные значения всех операторов числа частиц большими параметрами и ограничимся в соответствующих полиномах Эрмита асимптотикой по большим степеням полиномов. В этом случае расходимости, связанные с неаналитичностью функции $f(z) = z \ln(z)$, не возникают. С точки зрения однопараметрического семейства гильбертовых пространств, введенных в [5], каждому типу частиц (кластеров) отвечает свое однопараметрическое подпространство Фока. Таким образом, мы имеем несколько свободных параметров и нижнее собственное значение задачи (47) отвечает минимуму символа по этим параметрам, который приводит в простейшем случае к распределению, вычисленному в работах [6–8]. Отметим в заключение, что асимптотика при $\varepsilon \rightarrow 0$ отвечает малому взаимодействию, так как

$$\text{Sp}_{\mathcal{H}_B}(\widehat{E}_g \widehat{H}) \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \sum_{N_k=0}^{\infty} \hat{i}_{N_1, \dots, N_k} \widehat{P}_{N_1, \dots, N_k}^B \widehat{P}_{N_1, \dots, N_k}$$

совпадает с точностью до умножения на константу с $\widehat{H}$ (16) при U_0 порядка ε .

Благодарности. В заключение автор выражает глубокую благодарность Г. В. Ковалю, который помог провести все вычисления.

Список литературы

- [1] В. П. Маслов. ТМФ. 1999. Т. 121. № 3. С. 492.
- [2] В. П. Маслов. Функциональный анализ и его приложения. 1999. Т. 33. № 4. С. 50.
- [3] Ф. А. Березин. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [4] В. П. Маслов. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
- [5] В. П. Маслов. ДАН СССР. 1957. Т. 114. № 5. С. 957.
- [6] A. E. Glassgold, A. N. Kaufman, K. M. Watson. Phys. Rev. 1960. V. 120. P. 660.
- [7] T. D. Lee, C. N. Yang. Phys. Rev. 1959. V. 113. P. 1419.
- [8] M. Girardeau. J. Math. Phys. 1962. V. 3. P. 131.
- [9] В. П. Маслов, О. Ю. Шведов. ТМФ. 1994. Т. 98. № 2. С. 266.
- [10] Н. Н. Боголюбов. Изв. АН СССР. Сер. физ. 1947. Т. 11. № 1. С. 77.

Поступила в редакцию 20.VII.2000 г.