Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Борг, Д. И. Казаков, Г. С. Вартанов, От амплитуд к формфакторам в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 1, 32–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6706>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:24:46

© 2011 г. Л. В. Борк*, Д. И. Казаков*[†], Г. С. Вартанов[‡]

ОТ АМПЛИТУД К ФОРМФАКТОРАМ В $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Обсуждаются последние достижения в понимании инфракрасного поведения инклюзивных сечений и формфакторов для полуБПС операторов в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса. В обоих случаях наблюдается экспоненциация инфракрасных расходимостей, в то время как конечные части не имеют столь простого поведения. Показано, как происходит сокращение инфракрасных расходимостей в инклюзивных сечениях при учете испускания мягких и коллинеарных квантов. Вычислены конечные части формфакторов в двухпетлевом приближении. Они оказываются весьма сложными и выражаются через обобщенные полилогарифмы нескольких переменных, но при этом по-прежнему выполняется принцип максимальной трансцендентальности.

Ключевые слова: $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричная теория Янга–Миллса, формфакторы, $\mathcal{N} = 1$ суперпространство, инфракрасно конечные наблюдаемые, максимально нарушающие спиральность амплитуды.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое внимание уделяется изучению амплитуд рассеяния в планарном пределе в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса (теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ). Считается, что скрытые симметрии, ответственные за интегрируемость теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ, полностью фиксируют структуру амплитуд (S -матрицу теории) [1]. Это, в частности, проявляется в том, что ответы для амплитуд выражаются в терминах псевдоконформных интегралов, записанных в импульсном пространстве [2]. При этом так называемая дуальная конформная симметрия в режиме слабой связи может быть распространена на случай $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии и совместно с обычной суперконформной симметрией образует так называемую симметрию янгианов, которая определяется янгианом бесконечномерной алгебры (Yangian infinite-dimensional algebra). Другим замечательным свойством рассматриваемых амплитуд является их дуальность вильсоновским петлям [3], [4].

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия

[†]Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: kazakovdi@mail.ru

[‡]Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik, Albert-Einstein-Institut, Golm, Germany

В режиме сильной связи амплитуды в теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ могут быть получены с помощью AdS/CFT-соответствия путем вычисления в квазиклассическом режиме амплитуд рассеяния для открытой струны в пространстве AdS_5 с концами струны, лежащими на D3-бране, которая находится при фиксированной радиальной координате $z \neq 0$ [3]. Эта проблема может быть переформулирована как задача поиска минимальной поверхности в пространстве AdS_5 со специальными граничными условиями, и недавно она была сведена к решению набора функциональных уравнений для конформно-инвариантных отношений как функций от спектральных параметров так называемой Y -системы [5]. Отметим, что Y -системы обычно появляются в интегрируемых системах, и это является еще одним намеком на то, что $\mathcal{N} = 4$ амплитуды содержат в себе интегрируемую структуру.

Скрытые симметрии для амплитуд теории были впервые обнаружены при рассмотрении планарного предела¹⁾ так называемых максимально нарушающих спиральность (МНС) амплитуд²⁾, упорядоченных по цвету и определяющихся с помощью разложения по групповым структурам калибровочной группы:

$$\mathcal{A}_n^{(1\text{-loop})} = g^{n-2} \lambda^l \sum_{\text{perm}} \text{Tr} (T^{a_{\rho(1)}} \dots T^{a_{\rho(n)}}) A_n^{(l)}(p_{\rho(1)}, \dots, p_{\rho(n)}),$$

где $\mathcal{A}_n$ – физические n -точечные амплитуды, A_n – упорядоченные по цвету амплитуды, $T^{a(i)}$ – генераторы калибровочной группы $SU(N_c)$, $a_{\rho(i)}$ – цветовой индекс внешней частицы $\rho(i)$, а $p_{\rho(i)}$ – ее импульс, $\lambda = g^2 N_c / 16\pi^2$. Данные амплитуды являются ультрафиолетово (УФ) конечными, но имеют инфракрасные (ИК) расходимости. Недавно Берн, Диксон и Смирнов (БДС) сформулировали анзац [6] для n -точечных МНС-амплитуд во всех петлях, установленный на трехпетлевом уровне для четырехточечной амплитуды, который в рамках размерной регуляризации имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &\equiv \frac{A_n}{A_n^{\text{tree}}} = 1 + \sum_{L=1}^{\infty} \lambda^L M_n^{(L)}(\epsilon) = \\ &= \exp \left[-\frac{1}{8} \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l \left(\frac{\gamma_{\text{cusp}}^{(l)}}{(l\epsilon)^2} + \frac{2G_0^{(l)}}{l\epsilon} \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mu^2}{-s_{i,i+1}} \right)^{l\epsilon} + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l \gamma_{\text{cusp}}^{(l)} F_n^{(1)}(0) + C(g) \right], \end{aligned}$$

где $\gamma_{\text{cusp}}(g) = \sum_l \lambda^l \gamma_{\text{cusp}}^{(l)}$ есть так называемая аномальная размерность на изломе (cusp anomalous dimension) [7], а $G_0(g) = \sum_l \lambda^l G_0^{(l)}$ – функция константы связи, зависящая от ИК-регуляризации. Данные функции полностью определяют ИК-поведение амплитуды.

Неудивительно, что все ИК-расходимости в амплитудах факторизуются и экспоненцируются [8]. Гораздо менее очевидно, что это имеет место и для конечных частей. Согласно анзацу БДС конечные части амплитуд определяются аномальной

¹⁾Под планарным пределом понимается случай, когда калибровочная константа связи $g \rightarrow 0$, ранг калибровочной группы $N_c \rightarrow \infty$ так, что константа связи 'т Хофта $\lambda = g^2 N_c / 16\pi^2$ остается фиксированной.

²⁾МНС-амплитуды – это амплитуды, в которых все частицы являются входящими и полная спиральность равна $n - 4$, где n есть число частиц. Для глюонных амплитуд МНС-амплитуды определены как амплитуды, в которых все, кроме двух, глюоны имеют положительную спиральность.

размерностью на изломе и функцией от кинематических параметров, задаваемой на однопетлевом уровне. Для четырехглюонной амплитуды имеем

$$F_4^{(1)}(0) = \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{-t}{s} \right) + 4\zeta_2. \quad (1)$$

Для случаев $n = 4, 5$ анзац БДС прошел несколько нетривиальных проверок: амплитуды были вычислены вплоть до четырех петель для четырех глюонов и до трех петель для пяти глюонов. Однако начиная с $n = 6$ он нарушается, хотя упомянутая выше дуальность вильсоновским петлям по-прежнему имеет место. Конечная часть $\text{Fin}[\ln \mathcal{M}_n]$ для четырех- и пятиточечных амплитуд полностью фиксируется дуальной конформной симметрией – она является решением аномальных тождеств Уорда данной симметрии [9]:

$$\sum_{i=1}^n (2x_i^\nu x_i \partial_i - x_i^2 \partial_i^\nu) \text{Fin}[\ln \mathcal{M}_n] = \frac{1}{2} \gamma_{\text{cusp}} \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_{i,i+2}^2}{x_{i-1,i+1}^2} x_{i,i+1}^\nu,$$

где $x_{i,i+1}^\mu = x_i^\mu - x_{i+1}^\mu = p_i^\mu$. При числе внешних линий, большем пяти, в решении аномальных тождеств Уорда присутствует дополнительно к тому, что дает анзац БДС, функция от конформных отношений кинематических переменных. Точный вид этой функции на сегодняшний день неизвестен.

В то время как УФ-расходимости для амплитуд рассеяния в теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ отсутствуют, ИК-расходимости остаются, предположительно они должны сокращаться в правильно определенных физических наблюдаемых. Тем самым регуляризованные выражения для амплитуд служат своеобразными строительными лесами, которые должны отсутствовать в окончательных ответах. Именно ИК-конечные физические наблюдаемые и являются целью нашего вычисления. Хотя теорема Киношита–Ли–Науенберга [10] в принципе говорит нам о том, как построить такие наблюдаемые, реализация этой процедуры является непростой задачей, и можно обсуждать различные возможности. В частности, можно рассмотреть так называемые функции энергетического потока, определенные в терминах корреляторов тензора энергии-импульса в режиме слабой связи в работе [11] и в режиме сильной связи в работе [12]. Мы сконцентрировали свое внимание [13], [14] на инклюзивных сечениях рассеяния в надежде, что они сохранили свойства факторизации, присущие амплитудам. Подобные вопросы обсуждались в статье [15], где были построены ИК-безопасные наблюдаемые типа инклюзивных сечений в теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ. В настоящей работе нами рассмотрена ИК-структура глюонных МНС-амплитуд в планарном пределе в теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ в следующем за главным порядке приближения. Продемонстрировано явное сокращение ИК-расходимостей в правильно определенных инклюзивных сечениях, аналитически вычислены конечные части. К сожалению, в отличие от виртуальных поправок, конечные части не имеют простой структуры и не проявляют тенденцию к факторизации.

В режиме сильной связи естественным обобщением Y -систем для амплитуд являются Y -системы для формфакторов [16], т. е. матричные элементы вида

$$\langle 0 | \mathcal{O} | p_1^{\lambda_1}, \dots, p_n^{\lambda_n} \rangle, \quad (2)$$

где $\mathcal{O}$ есть калибровочно-инвариантный оператор, который действует на вакуум и образует некоторое состояние $|p_1^{\lambda_1}, \dots, p_n^{\lambda_n}\rangle$ с импульсами $p_1, \dots, p_n$ и спиральностями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. В дуальной теории струн этот матричный элемент описывается с помощью амплитуд струны с концами, лежащими на D3-бране, которая расположена в точке с фиксированным значением радиальной координаты z пространства AdS_5 , в присутствии замкнутых струн [16].

Интересно понять, обладают ли такие объекты в области слабой связи теми же свойствами, что и амплитуды рассеяния или, другими словами, подчиняются ли формфакторы симметрии янгианов (или ее аналогу) и определяются ли этой симметрией. В работе [17] мы установили, что с точностью до второго порядка теории возмущений все ответы выражаются в терминах псевдоконформных интегралов, и это является намеком на скрытую интегрируемость.

Двухпетевое вычисление формфактора, ассоциированного с оператором $\mathcal{V}_X$ из суперконформного мультиплетов тензора напряженности в теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ, которое было проведено в работе [15], побудило нас предпринять систематическое изучение простейших типов формфакторов для полуБПС операторов $\mathcal{O}_I^{(n)}$ и оператора Кониши $\mathcal{K}$ в планарном пределе теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ. Наши результаты напоминают ответы для амплитуд, в частности формфактор для оператора с тремя ногами аналогичен шеститочечной амплитуде и т. д. Похожие вопросы обсуждались также в работе [18], в которой был использован метод, основанный на унитарности, и сформулирована гипотеза дуальности между бесконечными периодическими вильсоновскими петлями и формфакторами.

2. ИК-БЕЗОПАСНЫЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ В ТЕОРИИ $\mathcal{N} = 4$ СЯМ

Наша цель состоит в том, чтобы в аналитическом виде вычислить поправки в следующем за главным порядке приближения к инклюзивному дифференциальному сечению поляризованного рассеяния в режиме слабой связи в планарном пределе теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ и получить сокращение ИК-расходимостей.

Начнем с МНС-амплитуды рассеяния $2 \rightarrow 2$ с двумя входящими положительно поляризованными глюонами и двумя выходящими положительно поляризованными глюонами и рассмотрим дифференциальное сечение $d\sigma_{2 \rightarrow 2}(g^+ g^+ \rightarrow g^+ g^+)/d\Omega$ как функцию угла рассеяния. Полное сечение расходится, когда угол равен нулю. Считая все частицы выходящими, будем обозначать эту амплитуду как МНС-амплитуду $(--++)$. На древесном уровне сечение задается формулой

$$\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 2}}{d\Omega_{13}} = \frac{1}{J} \int d\phi_2 |\mathcal{M}_4^{(\text{tree})}|^2 \mathcal{S}_2, \quad (3)$$

где J – поток начальных частиц, в нашем случае $J = s$, s – стандартная переменная Мандельштама, а фазовый объем двухчастичного процесса (мы используем размерную регуляризацию $D = 4 - 2\epsilon$) есть

$$d\phi_2 = \frac{d^D p_3 \delta^+(p_3^2)}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^D p_4 \delta^+(p_4^2)}{(2\pi)^{D-1}} (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2 - p_3 - p_4).$$

В соотношении (3) $\mathcal{S}_n$ ($n = 2$ в нашем случае) есть так называемая функция измерения, определяющая детектируемое состояние. В данном случае

$$\mathcal{S}_2 = \delta_{+,h_3} \delta^{D-2}(\Omega_{\text{Det}} - \Omega_{13}),$$

где $\delta^{D-2}(\Omega_{\text{Det}} - \Omega_{13})$ означает, что наблюдаемым является дифференциальное сечение $d\sigma_{2 \rightarrow 2}/d\Omega_{13}$, $d\Omega_{13} = d\phi_{13} d\cos\theta_{13}$, а θ_{13} есть угол рассеяния частицы с импульсом $\mathbf{p}_3$ по отношению к $\mathbf{p}_1$ в системе центра масс; δ_{+,h_3} означает, что мы детектируем частицу с положительной спиральностью³⁾. Матричный элемент получается из упорядоченных по цвету амплитуд путем суммирования:

$$|\mathcal{M}_4^{(\text{tree})}|^2 = g^4 \sum_{\text{colors}} |\mathcal{A}_4^{(\text{tree})}|^2 = g^4 N_c^2 (N_c^2 - 1) \sum_{\sigma \in P_3} |A_4^{(\text{tree})}(p_1, p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(3)})|^2,$$

где P_n есть набор перестановок n объектов ($n = 3$ в этом случае), так что

$$|\mathcal{M}_4^{(\text{tree})(--++)}|^2 = g^4 N_c^2 (N_c^2 - 1) \sum_{\sigma \in P_3} \frac{s_{12}^4}{s_{1\sigma(1)} s_{\sigma(1)\sigma(2)} s_{\sigma(2)\sigma(3)} s_{\sigma(3)1}}, \quad (4)$$

где во всех выражениях мы полагаем $s_{ij} = (p_i + p_j)^2$.

В рамках размерной регуляризации (редукции) сечение выглядит как

$$\left(\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 2}}{d\Omega_{13}} \right)_0^{(--++)} = \frac{\alpha^2 N_c^2}{2E^2} \left(\frac{s^4}{t^2 u^2} + \frac{s^2}{t^2} + \frac{s^2}{u^2} \right) \left(\frac{\mu^2}{s} \right)^\epsilon = \frac{\alpha^2 N_c^2}{E^2} \left(\frac{\mu^2}{s} \right)^\epsilon \frac{4(3+c^2)}{(1-c^2)^2},$$

где s , t , u являются переменными Мандельштама, E – полная энергия в системе центра масс, $\alpha = g^2 N_c / 4\pi$, $c = \cos\theta_{13}$, а μ и ϵ суть параметры размерной регуляризации. В системе центра масс переменные Мандельштама удовлетворяют равенствам $s = E^2$, $t = -(E^2/2)(1 - c)$, $u = -(E^2/2)(1 + c)$.

Следующий шаг состоит в вычислении поправок в следующем за главным порядке, включающих в себя вычисление виртуальных и реальных частей вместе с контрчленами расщепления, которые возникают из-за неразличимости коллинеарных частиц в начальном и конечном состояниях.

Виртуальная часть. Начнем с виртуального вклада. Для получения однопетлевого вклада в дифференциальное сечение используем уже известное выражение для однопетлевой цветоупорядоченной амплитуды:

$$M_4^{(1\text{-loop})}(\epsilon) = \frac{A_4^{(1\text{-loop})}}{A_4^{(\text{tree})}} = -\frac{1}{2} st I_4^{(1\text{-loop})}(s, t),$$

где $I_4^{(1)}(s, t)$ есть скалярная диаграмма типа “ящик”,

$$I_4^{(1\text{-loop})}(s, t) = -\frac{2}{st} \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)^2}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left[\frac{1}{\epsilon^2} \left(\left(\frac{\mu^2}{s} \right)^\epsilon + \left(\frac{\mu^2}{-t} \right)^\epsilon \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{s}{-t} \right) + \frac{\pi^2}{2} \right] + O(\epsilon).$$

Квадрат матричного элемента $|\mathcal{M}_4^{(1\text{-loop})}|^2 = \sum_{\text{colors}} (\mathcal{A}_4^{(\text{tree})} \mathcal{A}_4^{(1\text{-loop})*} + \text{к.с.})$ есть

$$|\mathcal{M}_4^{(1\text{-loop})(--++)}|^2 = -g^4 N_c^2 (N_c^2 - 1) \left(\frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \right) \times \\ \times \left[\frac{s^4}{s^2 t^2} st I_4^{(1\text{-loop})}(s, t) + \frac{s^4}{s^2 u^2} su I_4^{(1\text{-loop})}(s, u) - \frac{s^4}{t^2 u^2} tu I_4^{(1\text{-loop})}(-t, u) \right]. \quad (5)$$

³⁾ Более аккуратно в размерной регуляризации (редукции) мы имеем следующее равенство: $d\Omega_{13}^\epsilon = d\phi_{13} \sin^{\frac{-2\epsilon}{2}} \phi_{13} d\cos\theta_{13} \sin^{\frac{-2\epsilon}{2}} \theta_{13}$.

Реальное испускание. Следующий шаг состоит в вычислении амплитуды с тремя выходящими частицами. Здесь мы должны определить, каким процессом мы интересуемся. Существует несколько возможностей для трех частиц в конечном состоянии:

- 1) три глюона с положительными спиральностями, $g^+g^+ \rightarrow g^+g^+g^+$, тогда искомая амплитуда есть МНС-амплитуда;
- 2) два глюона с положительными спиральностями и один глюон с отрицательной спиральностью, $g^+g^+ \rightarrow g^+g^+g^-$, тогда мы имеем антиМНС-амплитуду⁴⁾;
- 3) одна из трех конечных частиц есть глюон с положительной спиральностью, а две другие представляют собой кварк-антикварковую пару⁵⁾, $g^+g^+ \rightarrow g^+q^-\bar{q}^+$ или $g^+g^+ \rightarrow g^+q^+\bar{q}^-$, тогда амплитуда есть антиМНС-амплитуда;
- 4) одна из трех конечных частиц есть глюон с положительной спиральностью, а две другие – скаляры, $g^+g^+ \rightarrow g^+\Lambda\Lambda$, при этом амплитуда есть антиМНС-амплитуда.

Если фиксировать один глюон с положительной спиральностью, рассеянный на угол θ , и просуммировать по всем другим частицам, то все отмеченные выше процессы дадут вклад. Если же фиксировать два глюона с положительной спиральностью, то останутся только два первых процесса.

Сечение этих процессов можно записать как

$$\frac{d\sigma_{2\rightarrow 3}}{d\Omega_{13}} = \frac{1}{J} \int d\phi_3 |\mathcal{M}_5^{(\text{tree})}|^2 \mathcal{S}_3, \quad (6)$$

где $d\phi_3$ есть трехчастичный фазовый объем. Он может быть представлен в следующем виде, удобном для наших вычислений:

$$d\phi_3 = \frac{d^D p_3 \delta^+(p_3^2)}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^D p_4 \delta^+((p_4 - k)^2)}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^D k \delta^+(k^2)}{(2\pi)^{D-1}} (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2 - p_3 - p_4),$$

а $\mathcal{S}_3$ есть функция измерения, которая ограничивает фазовое пространство и определяет конкретные наблюдаемые. Для упрощения интегрирования мы используем в дальнейшем универсальную функцию измерения

$$\mathcal{S}_3(p_3, p_4, p_5) = \Theta\left(p_3^0 - \frac{1 - \delta}{2} E\right) \delta^{D-2}(\Omega_{\text{Det}} - \Omega_3), \quad (7)$$

где мы полагаем $\delta = 1/3$ в случае идентичных частиц и $\delta = 1$ в других случаях. Таким образом, регистрация одного самого быстрого глюона соответствует $\delta = 1/3$ для МНС- и антиМНС-амплитуд и $\delta = 1$ для амплитуд с частицами материи. При регистрации двух самых быстрых глюонов следует выбирать $\delta = 1/3$ для МНС-амплитуд и $\delta = 1$ для антиМНС-амплитуд⁶⁾. Мы проверили, что ИК- и коллинеарные расходимости сокращаются в наблюдаемых при любом значении δ .

⁴⁾ Существует также спиральная конфигурация $g^+g^+ \rightarrow g^+g^-g^+$, но амплитуда в этом случае такая же. Мы будем использовать обозначение $(- - + -)$ для обеих конфигураций.

⁵⁾ $\mathcal{N} = 4$ супермультиплет состоит из глюона g , четырех фермионов (кварков) q^A и шести действительных скаляров Λ^{AB} , где A и B – индексы группы $SU(4)_R$, Λ является антисимметричным тензором. Предполагается, что все квадратированные амплитуды с кварками и скалярами просуммированы по этим индексам.

⁶⁾ Это условие не является точным, но достаточно близко к нему. Выполнение точных условий регистрации быстрых частиц технически сложно, но не меняет общей картины.

Расщепление. Принимая во внимание испускание дополнительных мягких квантов, мы добиваемся сокращения ИК-расходимостей (двойных полюсов по ϵ), но однократные полюсы, возникающие от коллинеарных расходимостей, остаются. Действительно, в случае безмассовых частиц асимптотические состояния (как конечные, так и начальные) не являются хорошо определенными, ибо безмассовые кванты могут расщепиться на два параллельных кванта, неотличимых от исходного. Чтобы принять это во внимание, введем распределение $g(z)$ исходной частицы (глюона) по доле переносимого ей импульса z . Тогда первоначальному распределению соответствует $g(z) = \delta(1 - z)$, а испускание глюона приводит к расщеплению: один глюон несет долю импульса, равную z , а коллинеарный глюон – долю импульса $1 - z$. Вероятность такого события дается так называемыми *функциями расщепления* $P_{gg}(z)$ [19]. В случае глюона в конечном состоянии это соответствует фрагментации глюона в пару глюонов, или кварков, или скаляров.

Дополнительные вклады от коллинеарных частиц в начальном и конечном состояниях в инклюзивные сечения имеют соответственно вид

$$d\sigma_{2 \rightarrow 2}^{\text{In Split}} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\mu^2}{Q_f^2} \right)^\epsilon \int_0^1 dz P_{gg}(z) \sum_{\substack{i,j=1,2, \\ i \neq j}} d\sigma_{2 \rightarrow 2}(zp_i, p_j, p_3, p_4) \mathcal{S}_2^{\text{In Split}}(z) \quad (8)$$

и

$$d\sigma_{2 \rightarrow 2}^{\text{Fn Split}} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\mu^2}{Q_f^2} \right)^\epsilon d\sigma_{2 \rightarrow 2}(p_1, p_2, p_3, p_4) \int_0^1 dz \sum_{l=g,q,\Lambda} P_{gl}(z) \mathcal{S}_2^{\text{Fn Split}}(z), \quad (9)$$

где шкала Q_f^2 , иногда называемая шкалой факторизации, относится к определению когерентного асимптотического состояния и ограничивает поперечный импульс. Зависимость партонного распределения от Q_f^2 описывается уравнением эволюции Докшицера–Грибова–Липатова–Альтарелли–Паризи [19], [20]. Функции расщепления P_{ij} для каждой спиральной конфигурации могут быть получены как коллинеарный предел соответствующей парциальной амплитуды.

Окончательный результат. В следующем за главным порядке приближения существуют два набора амплитуд (МНС- и антиМНС-амплитуды), которые дают вклад в наблюдаемые. Четырехглюонная амплитуда в лидирующем порядке является одновременно МНС- и антиМНС-амплитудой, и мы разбиваем ее на две части. Тогда в данном порядке можно построить три типа ИК-безопасных величин:

1) чисто глюонную МНС-амплитуду

$$A^{\text{MHV}} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 2}}{d\Omega_{13}} \right)_{\text{Virt}}^{(--++)} + \left(\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 3}}{d\Omega_{13}} \right)_{\text{Real}}^{(----)} + \\ + \left(\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 3}}{d\Omega_{13}} \right)_{\text{In Split}}^{(----)} + \left(\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 3}}{d\Omega_{13}} \right)_{\text{Fn Split}}^{(----)};$$

2) чисто глюонную антиМНС-амплитуду

$$B^{\text{antiMHV}} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 2}}{d\Omega_{13}} \right)_{\text{Virt}}^{(--++)} + \left(\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 3}}{d\Omega_{13}} \right)_{\text{Real}}^{(----)} + \\ + \left(\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 3}}{d\Omega_{13}} \right)_{\text{In Split}}^{(----)} + \left(\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 3}}{d\Omega_{13}} \right)_{\text{Fn Split}}^{(----)};$$

3) антиМНС-амплитуду с фермионами и скалярами, которые вместе с глюонами входят в полный $\mathcal{N} = 4$ супермультиплет,

$$C^{\text{Matter}} = \left(\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 3}}{d\Omega_{13}} \right)_{\text{Real}}^{(ggg, q\bar{q} + \Lambda\Lambda)} + \left(\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 3}}{d\Omega_{13}} \right)_{\text{In Split}}^{(ggg, q\bar{q} + \Lambda\Lambda)}.$$

Подчеркнем, что в каждом из трех приведенных выражений *все ИК-расходимости сокращаются* для произвольного δ , и остается только конечная часть.

Определяя теперь физические условия для наблюдения, мы получаем несколько ИК-безопасных инклюзивных сечений рассеяния:

1) регистрация *двух быстрейших* глюонов с положительной спиральностью

$$A^{\text{MHV}}|_{\delta=1/3} + B^{\text{antiMHV}}|_{\delta=1}; \quad (10)$$

2) регистрация *одного быстрейшего* глюона с положительной спиральностью

$$A^{\text{MHV}}|_{\delta=1/3} + B^{\text{antiMHV}}|_{\delta=1/3} + C^{\text{Matter}}|_{\delta=1}; \quad (11)$$

3) антиМНС-сечение

$$B^{\text{antiMHV}}|_{\delta=1} + C^{\text{Matter}}|_{\delta=1}. \quad (12)$$

Относительная простота виртуального вклада (1), который содержит лишь логарифмы и не содержит никаких специальных функций, предполагает подобную структуру и для реальной части. Однако это не так. В то время как сингулярные члены достаточно просты и полностью сокращаются в окончательном ответе, конечные части обычно имеют сложный вид и содержат полилогарифмы. Единственное выражение, где они сокращаются, соответствует случаю $\delta = 1$, что возможно только для последнего набора наблюдаемых, а именно для антиМНС-сечения (12). Выбирая шкалу факторизации равной $Q_f = E$, получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{13}} \right)_{\text{antiMHV}} = & \frac{4\alpha^2 N_c^2}{E^2} \left\{ \frac{3 + c^2}{(1 - c^2)^2} - \right. \\ & - \frac{\alpha}{4\pi} \left[2 \frac{(c^4 + 2c^3 + 4c^2 + 6c + 19) \ln^2((1 - c)/2)}{(1 - c)^2(1 + c)^4} + \right. \\ & + 2 \frac{(c^4 - 2c^3 + 4c^2 - 6c + 19) \ln^2((1 + c)/2)}{(1 - c)^4(1 + c)^2} - \\ & - 8 \frac{(c^2 + 1) \ln((1 + c)/2) \ln((1 - c)/2)}{(1 - c^2)^2} + \frac{6\pi^2(3c^2 + 13) - 5(61c^2 + 99)}{9(1 - c^2)^2} - \\ & - 2 \frac{(11c^3 - 31c^2 - 47c - 133) \ln((1 - c)/2)}{3(1 + c)^3(1 - c)^2} + \\ & \left. \left. + 2 \frac{(11c^3 + 31c^2 - 47c + 133) \ln((1 + c)/2)}{3(1 - c)^3(1 + c)^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Как видно, даже это выражение не повторяет форму борновской амплитуды и не имеет простой структуры. Причина, возможно, кроется в том, что при построении ИК-конечных наблюдаемых мы смешали МНС-и антиМНС-амплитуды и потеряли их простые свойства. Другой причиной может быть то, что и сами МНС-амплитуды с числом внешних линий, превышающим пять, не обладают свойством экспоненциации конечных частей.

Рис. 1. Фейнмановская диаграмма для формфактора с оператором $\mathcal{O}$.

3. ФОРМФАКТОРЫ

Рассмотрим лагранжиан $\mathcal{L}_{\mathcal{N}=4}(\mathcal{W})$ для теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ, взаимодействующей с классическим внешним источником J посредством некоторого локального калибровочно-инвариантного оператора $\mathcal{O}[\mathcal{W}]$:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{N}=4}(\mathcal{W}) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{N}=4}(\mathcal{W}) + \mathcal{O}[\mathcal{W}]J,$$

где мы обозначаем весь $\mathcal{N} = 4$ супермультиплет на массовой поверхности через $\mathcal{W}$. По умолчанию в дальнейших вычислениях подразумевается планарный предел.

Мы рассматриваем процесс (2), в котором оператор $\mathcal{O}$ действует на вакуум, и в результате получается состояние $|p_1^{\lambda_1}, \dots, p_n^{\lambda_n}\rangle$ с импульсами $p_1, \dots, p_n$ и спиральностями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Схематично это представлено на рис. 1. На языке дуальной струнной теории этот процесс описывается вставкой вершинного оператора, соответствующего замкнутой струне (это отвечает локальному оператору $\mathcal{O}$ в дуальной теории), на мировую поверхность в дополнение к n вершинным операторам, соответствующим открытым струнам (которые на языке дуальной теории отвечают состоянию $|p_1^{\lambda_1}, \dots, p_n^{\lambda_n}\rangle$).

Для дальнейших вычислений мы рассматриваем набор калибровочно-инвариантных операторов $\mathcal{C}_{IJ} = \text{Tr}(\phi_I \phi_J)$ и $\mathcal{V}_I^J = \text{Tr}(\bar{\phi}^J \phi_I)$ с наивной массовой размерностью $\Delta_0 = 2$, которая совпадает с точной массовой размерностью из-за отсутствия квантовых поправок для данного оператора. Эти операторы могут рассматриваться как низшие компоненты супермультиплета тензора энергии-импульса

$$T^{AB} = \text{Tr} \left(W^A W^B - \frac{1}{6} \delta^{AB} W^C W_C \right),$$

где $A, B, C = 1, \dots, 6$ являются индексами группы $SO(6)_R \simeq SU(4)_R$, а $I, J = 1, 2, 3$ — индексы подгруппы $SU(3)$ группы $SU(4)_R$; W^A — действительное суперполе, подчиненное связям в $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве, которое содержит все физические поля $\mathcal{N} = 4$ супермультиплета.

Другой набор операторов, который будет рассматриваться, — это полуБПС операторы $\mathcal{O}_I^{(n)} = \text{Tr}(\phi_I^n)$, которые имеют наивную массовую размерность $\Delta_0 = n$

и не имеют квантовых поправок. Мы также рассмотрим низшую компоненту супермультиплета Кониши

$$\mathcal{K} = \sum_{I=1}^3 \text{Tr} (\bar{\phi}^I \phi_I)$$

с наивной массовой размерностью $\Delta_0 = 2$ и нетривиальной аномальной размерностью из-за наличия УФ-расходимостей. Массовая размерность оператора Кониши имеет радиационные поправки, как следствие, соответствующий формфактор содержит УФ-расходимости. Это означает, что необходимо рассматривать перенормированный формфактор $\langle 0 | \mathcal{K}_R | p_1^{\lambda_1}, \dots, p_n^{\lambda_n} \rangle$, где $\mathcal{K}_R = Z_K^{-1} \mathcal{K}_B$. Здесь Z_K – константа перенормировки, которая появилась из-за наличия УФ-расходимостей и которая должна быть вычислена вплоть до того же порядка теории возмущений, что и рассматриваемый формфактор. После такой УФ-перенормировки остаются только ИК-расходимости. Таким образом, при рассмотрении формфакторов мы должны брать оператор Кониши после УФ-перенормировки. Это же относится и к любым другим операторам, содержащим УФ-расходимости.

Из соображений простоты мы ограничиваемся состояниями $|p_1^{\lambda_1}, \dots, p_n^{\lambda_n}\rangle$, состоящими только из скаляров, и, следовательно, можем опустить в обозначении $|p_1, \dots, p_n\rangle$ индексы спиральностей. Мы также рассматриваем состояния, в которых число частиц равно наивной массовой размерности оператора $\mathcal{O}$, т.е. состояния, состоящие из Δ_0 скаляров.

Стратегия вычислений. Для наших вычислений удобно использовать $\mathcal{N} = 1$ формулировку теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ и производить вычисления в терминах $\mathcal{N} = 1$ суперполей вне массовой поверхности в импульсном пространстве. Операторы $\mathcal{O} = \{\mathcal{C}_{IJ}, \mathcal{V}_I^J, \mathcal{O}_I^{(n)}, \mathcal{K}\}$ могут быть отождествлены с низшими компонентами следующих локальных $\mathcal{N} = 1$ операторов:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{IJ} &= \text{Tr} (\Phi_I \Phi_J), & \mathcal{V}_I^J &= \text{Tr} (e^{-gV} \bar{\Phi}^J e^{gV} \Phi_I), & I &\neq J, \\ \mathcal{O}_I^{(n)} &= \text{Tr} (\Phi_I^n), & \mathcal{K} &= \sum_I \text{Tr} (e^{-gV} \Phi^I e^{gV} \Phi_I), \end{aligned} \quad (13)$$

где Φ_I – киральное $\mathcal{N} = 1$ суперполе, а V – действительное векторное $\mathcal{N} = 1$ суперполе. Операторы $\mathcal{C}_{IJ}$ и $\mathcal{O}_I^{(n)}$ являются киральными, тогда как операторы $\mathcal{V}_I^J$ и $\mathcal{K}$ не являются киральными в терминах $\mathcal{N} = 1$ суперполей.

Мы используем обозначение $\mathcal{F}(p_1, \dots, p_n) = \langle p_1, \dots, p_n | \mathcal{O}(q) | 0 \rangle$ для рассматриваемых формфакторов и ожидаем, что для $\mathcal{F}$ будет выполняться следующее свойство:

$$\mathcal{F}(p_1, \dots, p_n) = \mathcal{F}_{\text{tree}}(p_1, \dots, p_n)(1 + \text{“петли”}),$$

где $\mathcal{F}_{\text{tree}}(p_1, \dots, p_n)$ обозначает древесный вклад, а “петли” схематично обозначает вклады от следующих порядков теории возмущений. Удобно определить отношение

$$\mathcal{M}(p_1, \dots, p_n) = \frac{\mathcal{F}(p_1, \dots, p_n)}{\mathcal{F}_{\text{tree}}(p_1, \dots, p_n)} = (1 + \text{“петли”}) = \sum_{l=0} \lambda^l \mathcal{M}^{(l)}.$$

Рассмотрим сначала киральный случай. Чтобы вычислить формфакторы, воспользуемся производящим функционалом для сильносвязных функций Грина $\Gamma[\Phi^{\text{cl}}, J]$

в $\mathcal{N} = 1$ суперпространстве. Он может быть получен из производящего функционала

$$Z[j, J] = \int \mathcal{D}(\Phi_I, V, \dots) \exp \left\{ S^{\mathcal{N}=4} + \int d^6 z J(z) \mathcal{O}(z) + \int d^6 z \operatorname{Tr} (j(z) \Phi(z)) \right\}$$

с помощью преобразования Лежандра по киральному источнику j (отметим, что источник J , соответствующий оператору $\mathcal{O}$, не затрагивается преобразованием Лежандра). После выполнения D-алгебры любой из суперграфов, суммой которых задается каждый порядок разложения $\Gamma[\Phi^{\text{cl}}, J]$ по теории возмущений, может быть сделан локальным по θ , следовательно, $\Gamma[\Phi^{\text{cl}}, J]$ может быть представлен в виде (мы подразумеваем, что условие массовой поверхности $p_i^2 = 0$ было учтено при выполнении D-алгебры)

$$\begin{aligned} \Gamma[\Phi^{\text{cl}}, J] &= \sum_{l=0} \lambda^l \Gamma^{(l)}[\Phi^{\text{cl}}, J] = \sum_{l=0} \lambda^l \int d^4 p_1 \dots d^4 p_n d^6 z J(-q, \theta) \times \\ &\quad \times \operatorname{Tr} (\Phi^{\text{cl}}(-p_1, \theta) \dots \Phi^{\text{cl}}(-p_n, \theta)) \mathcal{M}^{(l)}(p_1, \dots, p_n) + O(J^2), \end{aligned}$$

где $d^6 z = d^4 q d^2 \theta$, а величина $\mathcal{M}^{(l)}(p_1, \dots, p_n)$ дается суммой скалярных интегралов по “бозонным” переменным. Тогда

$$\mathcal{M}^{(l)}(p_1, \dots, p_n) = \left. \frac{\delta^{n+1} \Gamma^{(l)}}{\delta \Phi^{\text{cl}} \dots \delta \Phi^{\text{cl}} \delta J} \right|_{\substack{p_i^2=0, \theta=0, \\ \Phi^{\text{cl}}=0, J=0}}.$$

Мы еще раз подчеркиваем, что при получении этого выражения должны быть учтены условие $p_i^2 = 0$ и закон сохранения импульса $q + p_1 + \dots + p_n = 0$.

В некиральном случае ситуация несколько более сложная. Все интегралы в $\Gamma[\Phi^{\text{cl}}, \bar{\Phi}^{\text{cl}}, \mathcal{J}]$ ($\mathcal{J}$ – это некиральный источник) являются теперь интегралами по полному $\mathcal{N} = 1$ суперпространству $\int d^8 z (\dots)$, где $d^8 z = d^4 q d^4 \theta$ (а не только по киральному подпространству $\int d^6 z (\dots)$, как в киральном случае), и разложение $\Gamma[\Phi^{\text{cl}}, \bar{\Phi}^{\text{cl}}, \mathcal{J}]$ содержит теперь дополнительные вклады:

$$\begin{aligned} \Gamma[\Phi^{\text{cl}}, \bar{\Phi}^{\text{cl}}, \mathcal{J}] &= \sum_{l=0} \lambda^l \Gamma^{(l)}[\Phi^{\text{cl}}, \bar{\Phi}^{\text{cl}}, \mathcal{J}] = \sum_{l=0} \lambda^l \int d^4 p_1 \dots d^4 p_n d^8 z \mathcal{J}(-q, \theta, \bar{\theta}) \times \\ &\quad \times [\operatorname{Tr} (\bar{\Phi}^{\text{cl}}(-p_1, \bar{\theta}) \dots \Phi^{\text{cl}}(-p_n, \theta)) \mathcal{M}^{(l)}(p_1, \dots, p_n) + \\ &\quad + \operatorname{Tr} (\bar{D}^{\dot{\beta}} \bar{\Phi}^{\text{cl}}(-p_1, \bar{\theta}) \dots D^{\alpha} \Phi^{\text{cl}}(-p_n, \theta)) \mathcal{M}_{\beta\alpha}^{(l)}(p_1, \dots, p_n) + \\ &\quad + \operatorname{Tr} (\bar{D}^2 \bar{\Phi}^{\text{cl}}(-p_1, \bar{\theta}) \dots D^2 \Phi^{\text{cl}}(-p_n, \theta)) \mathcal{M}_2^{(l)}(p_1, \dots, p_n)] + O(\mathcal{J}^2). \end{aligned} \quad (14)$$

С точки зрения $\mathcal{N} = 1$ суперпространства эти дополнительные вклады соответствуют операторам другой массовой размерности, и мы имеем ситуацию со смешиванием операторов. Однако с “компонентной” точки зрения всегда можно выбрать конкретную проекцию на конкретную компоненту суперполя. Мы будем рассматривать только скалярные компоненты. Это соответствует тому, что последние слагаемые в (14) не будут давать вклада в наше рассмотрение и могут быть отброшены.

Мы будем производить вычисления в формализме $\mathcal{N} = 1$ суперпространства, а в конце вычислений брать проекцию на скалярную компоненту при $\theta = \bar{\theta} = 0$.

В использовании формализма $\mathcal{N} = 1$ суперпространства есть свои преимущества и недостатки. Положительной стороной такого подхода является значительное уменьшение числа диаграмм и получающихся в конце базисных скалярных интегралов. Недостатком метода является отсутствие явной $\mathcal{N} = 4$ ковариантности ответа. Желательно было бы применять современные $\mathcal{N} = 4$ ковариантные методы “на массовой поверхности”, которые используются сейчас для вычисления амплитуд, но они нуждаются в некотором изменении для применения их к формфакторам.

Формфакторы с $\Delta_0 = 2$. Для операторов $\mathcal{C}_{IJ}$, $\mathcal{V}_I^J$ и, с некоторыми отличиями, для оператора $\mathcal{K}$ ответы имеют одинаковый вид, который соответствует общей структуре формфактора $\mathcal{M}$ с двумя внешними линиями в калибровочной теории с нулевой бета-функцией⁷⁾

$$\ln \mathcal{M} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \widehat{M} \left(\frac{s_{i,i+1}}{\mu^2} \right) + O(\epsilon),$$

где введено обозначение

$$\widehat{M} \left(\frac{s_{i,i+1}}{\mu^2} \right) = -\frac{1}{2} \sum_l \left(\frac{\lambda}{16\pi^2} \right)^l \left(\frac{\gamma_{\text{cusp}}^{(l)}}{(l\epsilon)^2} + \frac{G^{(l)}}{l\epsilon} + C^{(l)} \right) \left(\frac{s_{i,i+1}}{\mu^2} \right)^{l\epsilon}, \quad (15)$$

а $\gamma_{\text{cusp}}^{(l)}$ суть коэффициенты пертурбативного разложения $\gamma_{\text{cusp}}(\lambda) = \sum_l \gamma_{\text{cusp}}^{(l)} \lambda^l$ аномальной размерности, встречавшейся нам ранее при рассмотрении амплитуд рассеяния, $G^{(l)}$ суть коэффициенты пертурбативного разложения $G(\lambda) = \sum_l G^{(l)} \lambda^l$ коллинеарной аномальной размерности, $C^{(l)}$ – некоторые константы. Величины $G^{(l)}$ и $C^{(l)}$ являются схемо- и регуляризационно-зависимыми, в отличие от аномальной размерности на изломе. Для рассматриваемых формфакторов нами было получено выражение

$$\ln \mathcal{M} = a \left(\frac{s_{12}}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \left(\frac{-2}{\epsilon^2} + \zeta_2 \right) + a^2 \left(\frac{s_{12}}{\mu^2} \right)^{-2\epsilon} \left(\frac{\zeta_2}{\epsilon^2} + \frac{\zeta_3}{\epsilon} \right) + O(a^3),$$

где ζ_n – соответствующие значения дзета-функции Римана, $a = \lambda e^{-\epsilon \gamma_E}$. Сравнивая полученный ответ с (15), мы можем найти значения двух первых коэффициентов разложения по a аномальных размерностей $\gamma_{\text{cusp}}^{(l)}$ и $G^{(l)}$:

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{cusp}}^{(1)} &= 4, & \gamma_{\text{cusp}}^{(2)} &= -8\zeta_2, \\ G^{(1)} &= 0, & G^{(2)} &= -\zeta_3, & C^{(1)} &= -\zeta_2, & C^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что при этом выполняется принцип максимальной трансцендентальности [21], который в нашем случае означает, что если мы сопоставим логарифму и числу π уровень трансцендентальности, равный 1, а полилогарифму $\text{Li}_n(x)$ и ζ_n – уровень трансцендентальности, равный n , то в данном порядке теории возмущений коэффициент перед n -м полюсом $1/\epsilon^n$ должен иметь трансцендентальность $2l - n$, где l – число петель. Для произведения суммарная трансцендентальность равняется сумме трансцендентальностей сомножителей.

⁷⁾Во многом аналогичная структура формфакторов для КХД была впервые установлена в [8].

Лидирующее ИК-поведение для $\mathcal{M}$ может быть также вычислено путем рассмотрения вильсоновского контура с одним изломом. В этом случае дуальное описание в терминах вильсоновских петель известно. Этот же результат был получен в работе [15] для оператора $\mathcal{V}_X = 2 \operatorname{Tr}(\Phi_1 \bar{\Phi}_1) - \operatorname{Tr}(\Phi_2 \bar{\Phi}_2) - \operatorname{Tr}(\Phi_3 \bar{\Phi}_3)$, принадлежащего супермультиплету тензора энергии-импульса.

Формфакторы $\mathcal{O}_I^{(n)}$, $n = 3$, в двух петлях. Здесь мы рассмотрим результаты вычислений для киральных полуБПС операторов $\mathcal{O}_I^{(n)}$, определенных ранее. Во втором порядке теории возмущений имеем

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{M} = & \sum_{i=1}^3 a \left(\frac{s_{i,i+1}}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \left(-\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{\zeta_2}{2} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^3 a^2 \left(\frac{s_{i,i+1}}{\mu^2} \right)^{-2\epsilon} \left(\frac{\zeta_2}{2\epsilon^2} + \frac{7\zeta_3}{2\epsilon} \right) + \text{конечная часть.} \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае для формфактора оператора с массовой размерностью 2, мы можем вычислить два первых коэффициента в разложении аномальных размерностей:

$$\gamma_{\text{cusp}}^{(1)} = 4, \quad \gamma_{\text{cusp}}^{(2)} = -8\zeta_2, \quad G^{(1)} = 0, \quad G^{(2)} = -7\zeta_3. \quad (17)$$

Заметим, что, как и ожидалось, значение $\gamma^{(l)}$ не изменилось и совпадает с предыдущим результатом (16), тогда как коллинеарная аномальная размерность зависит от рассматриваемого формфактора.

Отметим крайне нетривиальные сокращения полилогарифмов, которые произошли при вычислении $\ln \mathcal{M}$. Индивидуальные вклады от скалярных интегралов имеют коэффициенты перед полюсами, состоящие из нетривиальных комбинаций логарифмов и полилогарифмов различного веса. Мы видим, что, как и для амплитуд, для формфакторов также имеет место факторизация ИК-расходимостей.

Формфакторы $\mathcal{O}_I^{(n)}$, $n > 3$, в двух петлях. В первом порядке теории возмущений аналогично формфакторам с массовой размерностью 2 ответ дается “скалярным треугольником”. Во втором порядке теории возмущений ответ имеет похожий на случай $n = 3$ вид, но присутствует дополнительный вклад от факторизовавшихся однопетлевых диаграмм. Полный набор входящих в ответ скалярных интегралов представлен на рис. 2.

Выполняя разложение по ϵ и вычисляя логарифм ответа, мы получаем

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{M} = & \sum_{i=1}^n a \left(\frac{s_{i,i+1}}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \left(-\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{\zeta_2}{2} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^n a^2 \left(\frac{s_{i,i+1}}{\mu^2} \right)^{-2\epsilon} \left(\frac{\zeta_2}{2\epsilon^2} + \frac{7\zeta_3}{2\epsilon} \right) + \text{конечная часть.} \end{aligned}$$

Первые два коэффициента в разложении аномальных размерностей имеют вид

$$\gamma_{\text{cusp}}^{(1)} = 4, \quad \gamma_{\text{cusp}}^{(2)} = -8\zeta_2, \quad G^{(1)} = 0, \quad G^{(2)} = -7\zeta_3.$$

Конечная часть равна

$$\lambda F^{(1)}(s_{12}, \dots, s_{n1}) + \lambda^2 F^{(2)}(s_{12}, \dots, s_{n1}) + O(\lambda^3)$$

Рис. 2. Скалярные интегралы, входящие в ответ. Арка в G_7 соответствует наличию нетривиального числителя $(k - p)^2$. Толстая черная линия соответствует внешней линии с импульсом q вне массовой поверхности. Все остальные внешние линии находятся на массовой поверхности.

и тривиальна в одной петле, $F^{(1)} = 0$, а двухпетлевой ответ $F^{(2)}$ представляет собой сложную комбинацию полилогарифмов и обобщенных полилогарифмов Гончарова от нескольких переменных.

Отметим, что полученный ответ все же проще, чем в несуперсимметричных теориях, и при этом всегда выполняется принцип максимальной трансцендентальности [21]. Для случая $(1 + 1)$ -мерной кинематики выражения для конечных частей формфакторов сильно упрощаются [17]. Например, для формфактора оператора $\mathcal{O}_I^{(3)}$ ответ выражается только через логарифмы, и конечная часть имеет вид

$$\frac{-\lambda^2}{2880} \left(75 \ln^4 \frac{s_{12}}{s_{13}} + 120 \pi^2 \ln^2 \frac{s_{12}}{s_{13}} - 317 \pi^4 \right).$$

Дуальная конформная инвариантность. Отметим общее свойство входящих в ответ скалярных интегралов, впервые отмеченное в работе [17]. Оно заключается в том, что все имеющиеся скалярные интегралы могут быть получены из псевдоконформных скалярных интегралов, входящих в ответы для амплитуд, посредством некоторой предельной процедуры. Это означает, что результат вычисления должен быть выражен через конформно-инвариантные отношения, что ограничивает возможный вид ответа. На массовой поверхности, вообще говоря, дуальная конформная симметрия имеет аномалию, но эта аномалия полностью определяется аномальной размерностью на изломе.

В результате дуальная конформная симметрия остается чрезвычайно полезным инструментом исследования свойств амплитуд и дуальных им вильсоновских петель. Строго говоря, интегралы, возникающие при вычислении формфакторов, не

Рис. 3. Диаграммы типа “двухпетлевая лестница” и “двухпетлевой бокс”. Арка соответствует наличию нетривиального числителя.

обладают точной дуальной конформной симметрией, но могут быть получены, как уже говорилось, из дуально конформных с помощью некоторой предельной процедуры [17], которую мы опишем на примере, представленном на рис. 3. На правом рисунке изображена диаграмма, возникающая при вычислении формфакторов, а на левом рисунке – “исходная” дуально конформная диаграмма, встречающаяся при вычислении амплитуд. В пределе, когда точки 2 и 3 устремляются к бесконечности, левая диаграмма переходит в правую.

ИК-конечные наблюдаемые, основанные на формфакторах. Как и амплитуды, формфакторы $\langle 0 | \mathcal{O} | p_1^{\lambda_1}, \dots, p_n^{\lambda_n} \rangle$ на массовой поверхности, строго говоря, плохо определены в четырехмерном пространстве-времени из-за наличия ИК-расходимостей, следовательно, должна быть введена некоторая ИК-регуляризация. Это приводит к появлению дополнительного массового параметра μ в размерной регуляризации, нарушающей конформную симметрию. Другими словами можно сказать, что $\langle 0 | \mathcal{O} | p_1^{\lambda_1}, \dots, p_n^{\lambda_n} \rangle$ является промежуточным объектом, а физическими наблюдаемыми должны быть объекты, построенные на основе $\langle 0 | \mathcal{O} | p_1^{\lambda_1}, \dots, p_n^{\lambda_n} \rangle$, но свободные от ИК-расходимостей и, следовательно, от ИК-регулятора. Действительно, в КХД для процесса $\gamma^* \rightarrow \text{Jets}$ мы обычно интересуемся полным сечением $\sigma_{\text{tot}}(\gamma^* \rightarrow \text{Jets})$ или угловыми распределениями, а не самим по себе матричным элементом $\langle 0 | j_{\text{em}}^{\text{QCD}} | p_1^{\lambda_1}, \dots, p_n^{\lambda_n} \rangle$. Для получения физического (конечного) ответа необходимо учесть все процессы одного порядка по теории возмущений, разрешенные законом сохранения энергии-импульса.

Рассмотрим, например, полное сечение σ_{tot} для процесса $J \rightarrow \text{всё}$, что возможно из $\mathcal{N} = 4$ супермультиплета, где классический источник J взаимодействует с $\mathcal{N} = 4$ супермультиплетом посредством калибровочно-инвариантного локального оператора $\mathcal{O}$. Согласно оптической теореме

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \sim \frac{1}{s} \text{Im}_s \left[\int d^D x e^{-iqx} \langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(0) \rangle \right], \quad q^2 = -s.$$

Двухточечная корреляционная функция для оператора $\mathcal{O}$ в конформной теории может получать, помимо канонической массовой размерности Δ_0 , аномальную раз-

мерность $\gamma = \gamma(\lambda)$, которая зависит от константы связи:

$$\langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(0) \rangle \sim \frac{1}{(x^2)^{\Delta_0(1-\epsilon)+\gamma}}.$$

После некоторых вычислений мы получаем полное сечение

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \sim \frac{1}{\Gamma(\Delta_0 + \gamma) \Gamma(\Delta_0 + \gamma - 1)} \frac{1}{s^{3-\Delta_0-\gamma}},$$

для которого можно изучать асимптотики слабой и сильной связи.

В теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ, как и в любой конформной теории поля, если оператор $\mathcal{O}$ защищен (это означает, что он не получает квантовых поправок и $\gamma = 0$), то полное сечение ведет себя как $C/s^{3-\Delta_0}$. Из этого выражения можно, казалось бы, увидеть нарушение унитарности для процессов с операторами, размерности которых больше трех, согласно теореме Фруассара. Противоречие разрешается тем, что теорема Фруассара справедлива только для перенормируемых взаимодействий, т.е. взаимодействий, соответствующих операторам с массовой размерностью, меньшей или равной трем.

Если рассматривать не σ_{tot} , а некоторое угловое распределение, то оптическая теорема не является столь полезной, и необходимо производить прямые вычисления по теории возмущений. Рассматриваемые здесь формфакторы являются “строительными блоками” для таких объектов.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Мы суммировали наши последние достижения в понимании ИК-структуры теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ. Как было показано, МНС- и другие спиральные амплитуды, несмотря на ряд привлекательных сторон, не являются физическими объектами и зависят от ИК-регулятора. Дальнейшее изучение их свойств представляет интересную математическую задачу, но ее нельзя рассматривать как физически хорошо определенную. В то же время для физически хорошо определенных объектов многие замечательные свойства МНС-амплитуд теряются.

Формфакторы являются следующими по сложности объектами после амплитуд. Как мы показали, они обладают многими сходными с амплитудами свойствами (факторизация ИК-расходимостей и т.д.), несмотря на формальное различие, связанное с присутствием одной внешней линии вне массовой поверхности.

Теория $\mathcal{N} = 4$ СЯМ является первым примером нетривиальной конформной теории поля в четырехмерном пространстве-времени. Скорее всего, эта теория окажется интегрируемой в некотором смысле. Интегрируемость в подобных случаях означает наличие бесконечного числа законов сохранения – бесконечного числа соотношений. Возможно, что упомянутая выше симметрия янгианов несет ответственность за существование такого набора соотношений.

Благодарности. Авторы признательны Н. Байзерту, А. Горскому, А. Грозину, Л. Липатову, Т. Маклафлину и В. Смирнову за ценные обсуждения. Особенно мы благодарны А. Жибоедову за многочисленные стимулирующие дискуссии и за совместную работу над статьями [13], [14]. Финансовая поддержка осуществлена РФФИ (грант № 08-02-00856) и Министерством образования и науки РФ (грант № 1027.2008.2).

Список литературы

- [1] N. Beisert, *On Yangian symmetry in planar $\mathcal{N} = 4$ SYM*, arXiv:1004.5423.
- [2] J. M. Drummond, J. Henn, V. A. Smirnov, E. Sokatchev, *JHEP*, **01** (2007), 064, 15 pp., arXiv: hep-th/0607160.
- [3] L. F. Alday, J. M. Maldacena, *JHEP*, **06** (2007), 064, 26 pp., arXiv:0705.0303.
- [4] J. M. Drummond, G. P. Korchemsky, E. Sokatchev, *Nucl. Phys. B*, **795**:1–2 (2008), 385–408, arXiv:0707.0243; A. Brandhuber, P. Heslop, G. Travaglini, *Nucl. Phys. B*, **794**:1–2 (2008), 231–243, arXiv:0707.1153; J. M. Drummond, J. Henn, G. P. Korchemsky, E. Sokatchev, *Nucl. Phys. B*, **795**:1–2 (2008), 52–68, arXiv:0709.2368.
- [5] L. F. Alday, J. Maldacena, A. Sever, P. Vieira, *J. Phys. A*, **43**:48 (2010), 485401, 57 pp.
- [6] Z. Bern, L. J. Dixon, V. A. Smirnov, *Phys. Rev. D*, **72**:8 (2005), 085001, 27 pp., arXiv: hep-th/0505205.
- [7] С. В. Иванов, Г. П. Корчемский, А. В. Радюшкин, *ЯФ*, **44** (1986), 230–240; G. P. Korchemsky, A. V. Radyushkin, *Phys. Lett. B*, **171**:4 (1986), 459–467.
- [8] L. Magnea, G. F. Sterman, *Phys. Rev. D*, **42**:12 (1990), 4222–4227.
- [9] L. F. Alday, R. Roiban, *Phys. Rept.*, **468**:5 (2008), 153–211, arXiv:0807.1889.
- [10] T. Kinoshita, *J. Math. Phys.*, **3**:4 (1962), 650–677; T. D. Lee, M. Nauenberg, *Phys. Rev. B*, **133** (1964), 1549.
- [11] C. L. Basham, L. S. Brown, S. D. Ellis, S. T. Love, *Phys. Rev. Lett.*, **41**:23 (1978), 1585–1588.
- [12] D. M. Hofman, J. Maldacena, *JHEP*, **05** (2008), 012, 60 pp., arXiv:0803.1467.
- [13] L. V. Bork, D. I. Kazakov, G. S. Vartanov, A. V. Zhiboedov, *Phys. Lett. B*, **681**:3 (2009), 296–303, arXiv:0908.0387; *Phys. Rev. D*, **81**:10 (2010), 105028, 29 pp., arXiv:0911.1617.
- [14] Л. В. Борг, Д. И. Казаков, Г. С. Варганов, А. В. Жибоедов, *Труды МИАН*, **273** (2011), 46–53.
- [15] W. L. van Neerven, *Z. Phys. C*, **30**:4 (1986), 595–598.
- [16] J. Maldacena, A. Zhiboedov, *JHEP*, **11** (2010), 104, 42 pp., arXiv:1009.1139.
- [17] L. V. Bork, D. I. Kazakov, G. S. Vartanov, *JHEP*, **02** (2011), 063, 35 pp., arXiv:1011.2440.
- [18] A. Brandhuber, B. Spence, G. Travaglini, G. Yang, *JHEP*, **01** (2011), 134, 22 pp., arXiv:1011.1899.
- [19] G. Altarelli, G. Parisi, *Nucl. Phys. B*, **126**:2 (1977), 298–318.
- [20] В. Н. Грибов, Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **15**:4 (1972), 781–807.
- [21] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, *Nucl. Phys. B*, **769**:3 (2007), 217–255, arXiv: hep-th/0611204.