Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. О'Коннор, Низкоразмерные теории Янга–Миллса:
матричные модели и эмерджентная геометрия, *ТМФ*,
2011, том 169, номер 1, 49–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6707>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 08:29:02

© 2011 г.

Д. О'Коннор*

НИЗКОРАЗМЕРНЫЕ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА: МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ И ЭМЕРДЖЕНТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

На простом примере бозонной трехматричной модели показано, как фоновая геометрия может конденсироваться при переходе температуры или константы взаимодействия через критическое значение. Показано, что данные примеры относятся к новому классу универсальности фазовых переходов, где фоновая геометрия сама является эмерджентной.

Ключевые слова: матричные модели, эмерджентная геометрия, модель димера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее замечательных аспектов современной теории Янга–Миллса является AdS/CFT-соответствие [1], которое представляет собой гипотезу об эквивалентности между квантовой теорией поля без гравитации, определенной на границе пространства анти-де Ситтера, и теорией струны, включающей в себя гравитацию и определенной на пространстве более высокой размерности. Наиболее весомым примером этого соответствия является четырехмерная суперсимметричная $\mathcal{N} = 4$ размерная теория Янга–Миллса. Утверждение состоит в том, что в режиме сильной связи эта теория дуальна теории струн типа II В на пространстве $AdS_5 \times S^5$. Данное соответствие, однако, мало что говорит о подробностях механизмов, в силу которых формируется дополнительная пространственно-временная размерность.

Действие $\mathcal{N} = 4$ теории легче всего записать в виде $\mathcal{N} = 1$ модели в десятимерном пространстве-времени; оно принимает вид

$$S[\mathcal{A}, \Psi] = \int d^4x \sqrt{-g} \text{Tr} \left(-\frac{1}{4} F_{AB} F^{AB} + \frac{1}{2} \psi^T C \Gamma^A D_A \psi \right).$$

Здесь индексы A, B включают в себя как поля Янга–Миллса, так и шесть их скалярных суперпартнеров, Γ^A – десятимерные матрицы Дирака, а C – соответствующая матрица зарядового сопряжения. Поля зависят только от координат x^μ четырехмерного пространства-времени. Из этого вида действия можно заключить, что

*School of Theoretical Physics, Dublin Institute for Advanced Studies, Dublin, Ireland.
E-mail: denjoe@stp.dias.ie

данная модель представляет собой размерно редуцированную версию десятимерной суперсимметричной $\mathcal{N} = 1$ модели. Заметим, что фермионы являются одновременно майорановскими и вейлевскими, таким образом, число бозонных и фермионных степеней свободы совпадает. Данная модель и ее дальнейшие размерные редукции к случаям $d = 1$ и $d = 0$ дают соответственно матричные модели из работ [2] и [3]. Недавно в статье [4] подробно рассматривалась возможность гравитации как эмерджентной в контексте модели из работы [3].

В настоящей работе наша задача намного более скромная: мы осуществляем дальнейшую радикальную редукцию указанной модели и оставляем только три бозонные матрицы, полностью “вымораживая” фермионы. Ожидается, что с помощью такой радикальной редукции можно достаточно упростить ситуацию для того, чтобы получить нетривиальную информацию о механизмах, посредством которых геометрия или дополнительная размерность может возникать в рамках некоторых естественных предположений. Мы надеемся, что А. Н. Васильев с интересом отнесся бы к исследованию подобных идей.

2. ГЕОМЕТРИЯ, ПОЛУЧАЮЩАЯСЯ ИЗ МАТРИЧНОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим модель

$$S(X) = N \operatorname{Tr} \left(-\frac{1}{4} [X_a, X_b]^2 + \frac{2i\alpha}{3} \epsilon_{abc} X_a X_b X_c \right) \quad (1)$$

со статистической суммой вида $Z = \int [dX_a] e^{-S(X)}$, где $S(X)$ – евклидово действие. Экстремумы и седловые точки в этой модели задаются уравнениями

$$[X_b, ([X_a, X_b] - i\alpha \epsilon_{abc} X_c)] = 0.$$

Мы видим, что одно семейство решений данных уравнений имеет вид $X_a = \alpha J_a$, где J_a – представление (не обязательно неприводимое) алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$. Другое семейство дается коммутирующими матрицами.

В $\mathfrak{su}(2)$ -седловых точках евклидово действие имеет вид $S_{\text{saddle}} = -(\alpha^4 N^2/6) \operatorname{Tr} J_a^2$ и отрицательно, а для коммутирующих матриц оно равно нулю, поэтому основное состояние системы при низкой температуре¹⁾ (или большом α) определяется N -мерным представлением алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$, т.е. $J_a = L_a$ в неприводимом $\mathfrak{su}(2)$ -представлении размерности N , поскольку оно минимизирует действие. Генераторы L_a удовлетворяют соотношениям $[L_a, L_b] = i\epsilon_{abc} L_c$, откуда мы имеем $X_a X_a = \alpha^2 (N^2 - 1)/4 \cdot \mathbf{1}$. Основное состояние системы, таким образом, является некоммутативным пространством, которое называется некоммутативной (fuzzy) сферой [5]–[7]. Данная некоммутативная сфера имеет радиус $\alpha\sqrt{(N^2 - 1)/4}$, и это подсказывает нам масштабное преобразование α , пропорциональное N . Однако это не тот скейлинг, который приводит к коллапсу фазовой диаграммы: как мы увидим, надо задать $\alpha = \tilde{\alpha}/\sqrt{N}$. Радиус сферы, определяемый операторами X_a при фиксированном $\tilde{\alpha}$, растет при увеличении N , а некоммутативные координаты на сфере X_a удовлетворяют соотношениям

$$[X_a, X_b] = \frac{\tilde{\alpha}}{\sqrt{N}} i\epsilon_{abc} X_c.$$

¹⁾Положив $X_a = \alpha D_a$, так что $S = \beta E(D)$ при $\beta = \tilde{\alpha}^4$, легко заметить, что β можно понимать как температуру термодинамической системы.

Таким образом, при больших N и фиксированном $\tilde{\alpha}$ координаты X_a становятся коммутативными и в пределе определяют сферу бесконечного радиуса (поскольку радиус есть $\tilde{\alpha}\sqrt{N}/2$) или, эквивалентно, компактифицированную двойную плоскость, тогда как при конечных N координаты подчиняются хорошо знакомым соотношениям неопределенности, как в квантовой механике.

При скейлинге, сохраняющем $\tilde{\alpha}$ фиксированным, действие для основного состояния $S_0 = -\tilde{\alpha}^4(N^2 - 1)/24$ пропорционально числу степеней свободы N^2 , и как модель статистической механики наша система является экстенсивной.

Некоммутативную геометрию системы можно понимать в формулировке спектральной тройки Конна [8], если рассмотреть оператор Дирака

$$\mathcal{D} = \sigma_a \left[\frac{X_a}{\alpha}, \cdot \right] + 1, \quad \mathcal{D}\Psi = \frac{1}{\alpha} \sigma_a [X_a, \Psi] + \Psi.$$

При этом геометрия основного состояния закодирована в “спектральной тройке” $(\mathcal{H}, \text{Mat}_N, \mathcal{D}_0)$, где $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, Mat_N – алгебра функций со следовой нормой и $\mathcal{D}_0 = \sigma_a [L_a, \cdot] + 1$. Оператор Дирака $\mathcal{D}_0$ имеет тот же спектр, что и стандартный оператор Дирака на круглой коммутативной сфере единичного радиуса, однако его спектр обрезан при высоких энергиях. Коль скоро алгебра функций для нашего геометрического пространства задана, информация, закодированная в спектральной тройке, по существу та же, что и в функционале евклидова действия для дираковского фермиона. Тогда исходя из имеющегося опыта работы с такими функционалами действия в коммутативном случае мы без труда можем понять, как использовать данную спектральную тройку для задания геометрии в более общем некоммутативном формализме.

Положив

$$\frac{i}{\alpha} [X_a, X_b] + \epsilon_{abc} X_c = \alpha^2 F_{ab}$$

и разлагая вблизи решения в точке минимума, с учетом $X_j = \alpha(L_j + A_j)$ получаем некоммутативное действие Янга–Миллса с напряженностью поля

$$F_{ab} = i[L_a, A_b] - i[L_b, A_a] + \epsilon_{abc} A_c + i[A_a, A_b],$$

где калибровочное поле включает в себя скалярное поле посредством равенства $(X_a - \alpha L_a)^2 = \tilde{\alpha}^2 \Phi$. В коммутативном пределе Φ является компонентой калибровочного поля, нормального к сфере при вложении в пространство $\mathbb{R}^3$.

3. УЧЕТ ФЛУКТУАЦИЙ

Чтобы контролировать аналитическое поведение модели, можно вычислить эффективный потенциал на масштабе некоммутативной сферы. Для этого будем действовать в рамках аксиальной калибровки. Задача сводится к диагонализации одной из матриц: $X_3 = U \Lambda_3 U^{-1}$. Индуцированная мера равна квадрату определителя Вандермонда $\Delta(\Lambda) = \prod_{i \leq j} (\lambda_j - \lambda_i)$, построенного из собственных значений λ_i оператора X_3 , в этой калибровке статистическая сумма (с точностью до тривиальной постоянной) принимает вид

$$Z = \int dX_1 dX_2 d\Lambda_3 \Delta^2(\Lambda) e^{-S[X_1, X_2, \Lambda]}.$$

Разлагая вблизи фоновой конфигурации $\{X_1, X_2, \Lambda_3\} = \alpha\phi\{L_1, L_2, L_3\}$ и интегрируя по квадратичным флуктуациям, получаем, что все операторы квадратичных флуктуаций пропорциональны ϕ^2 , а вклад от определителя Вандермонда сокращается с вкладом от одного из X_i . Таким образом получаем эффективный потенциал для ϕ :

$$V_{\text{eff}}(\phi) = -\frac{4 \ln Z(\phi)}{N^2 - 1} = \tilde{\alpha}^4 \left(\frac{\phi^4}{4} - \frac{\phi^3}{3} \right) + \ln \phi^2. \quad (2)$$

Точка минимума эффективного потенциала задается формулой

$$\phi = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{d + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} - d + \frac{1}{4\sqrt{d + 1/4}}}, \quad (3)$$

где

$$d = a^{-4/3} \left(\left(1 + \sqrt{\frac{1 - (8/3)^3}{a^4}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(8/3)^3}{a^4}} \right)^{1/3} \right).$$

При убывании $\tilde{\alpha}$ локальный минимум эффективного потенциала исчезает, и система претерпевает фазовый переход при критическом значении $\tilde{\alpha}_c = (8/3)^{3/4}$, при этом $\phi_c = 3/4$.

Такие наблюдаемые, как усредненное действие $\mathcal{S}$ и $\mathcal{R}$, задаются выражениями

$$\mathcal{S} = \frac{\langle S \rangle}{N^2} = \frac{3}{4} - \frac{\tilde{\alpha}^4 \phi^3}{24}, \quad \mathcal{R}^2 = \frac{\langle \text{Tr } X_a^2 \rangle}{N^2} = \frac{\tilde{\alpha}^2 \phi^2}{4}.$$

Они имеют разрыв при этом фазовом переходе и принимают значения $\mathcal{S}_c = 5/12$ и $\mathcal{R} = (3/8)^{1/4}$ при приближении к точке перехода из области низких температур. Эффективный потенциал более не имеет смысла, коль скоро фон не аппроксимируется некоммутативной сферой, и при высокой температуре или малой $\tilde{\alpha}$ требуется иной подход.

Мощным средством для понимания природы фазового перехода и более подробного исследования его физики является компьютерное моделирование методом Монте-Карло. С помощью такого моделирования было обнаружено [9], [10], что поведение, описываемое эффективным потенциалом (2), представляет собой на удивление хорошую аппроксимацию. Результаты моделирования показаны на рис. 1. Видно, что $\mathcal{S}$ претерпевает разрыв и скачком переходит от значения $\mathcal{S} = 5/12$ к значению, которое остается постоянным при $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$. Легко установить (из тождества Уорда), что при $\alpha = 0$ мы должны получить $\mathcal{S} = 3/4$. Это согласуется с результатами численного моделирования. Отсюда можно сделать вывод, что при фазовом переходе $\mathcal{S}$ совершает скачок от значения $5/12$ к значению $3/4$, который указывает на возрастание энтропии системы, которое в свою очередь указывает на внезапное изменение состояния системы от более упорядоченного к состоянию с большим беспорядком и согласуется с тем, что конденсированная геометрия испаряется. Эквивалентным образом, если мы рассмотрим охлаждение системы в процессе этого перехода, то переход будет включать изменение порядка в системе, когда при понижении температуры появляется геометрическая фаза.

Еще одной полезной наблюдаемой, которую следует изучить, является удельная теплоемкость

$$C_v := \frac{\langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2}{N^2} = \mathcal{S} - \tilde{\alpha}^4 \frac{d\mathcal{S}}{d\tilde{\alpha}^4}. \quad (4)$$

Рис. 1. Усредненное действие S как функция претерпевшей коллапс константы связи $\tilde{\alpha}$ (при $m^2 = 0$).

Поведение этой величины при больших $\tilde{\alpha}$ снова согласуется с тем, что предсказано выражением для точки минимума эффективного потенциала (3), а также с тем, что удельная теплоемкость не зависит от $\tilde{\alpha}$ при $\tilde{\alpha} < \tilde{\alpha}_c$. Результаты численного моделирования и теоретические результаты для C_v показаны на рис. 2. Видно, что C_v расходится при приближении к критической точке со стороны низкотемпературной геометрической фазы, но не имеет такой расходимости в высокотемпературной фазе. Кроме того, при приближении к точке фазового перехода со стороны больших значений $\tilde{\alpha}$ становится все сложнее получать термализованную численную выборку. Это находится в соответствии с расходимостью удельной теплоемкости и является типичным для реальных физических систем при флуктуациях на масштабе, большом по сравнению с микроскопическими степенями свободы. В подобных системах это явление известно как критическое замедление, т. е. на практике требуются очень длинные временные масштабы, чтобы система термализовалась при приближении к критической точке.

Из формулы (4) можно получить поведение удельной теплоемкости при приближении к точке фазового перехода:

$$C_v = \frac{29}{36} + \frac{1}{2^{11/8} 3^{7/8}} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_c}} + O((\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_c)^{1/2}).$$

В обычных критических явлениях [11] удельная теплоемкость имеет расходимость с критическим показателем α и амплитудами $A_{\pm}$, которые зависят от того, приближаемся мы к переходу со стороны высоких или низких температур: так, мы имеем $C \sim A_{-}(T_c - T)^{-\alpha}$ в низкотемпературной фазе. Отсюда можно сделать вывод, что

Рис. 2. Удельная теплоемкость C_v как функция претерпевшей коллапс константы связи $\tilde{\alpha}$.

в этой трехматричной модели критический показатель для теплоемкости равен $1/2$. Показатель α зависит от размерности системы и группы симметрии параметра порядка, в то время как амплитуды $A_{\pm}$ зависят от микроскопических деталей, причем отношение A_{+}/A_{-} снова универсально и зависит только от размерности и группы симметрии. Поэтому тот факт, что геометрия исчезает в высокотемпературном режиме, согласуется со значительным различием в поведении удельной теплоемкости при приближении к точке фазового перехода с разных сторон.

Дальнейшие сведения о природе перехода можно извлечь из распределения собственных значений одной из матриц. В низкотемпературной фазе некоммутативной сферы собственные значения оператора X_3 находятся в прекрасном согласии с собственными значениями оператора $\alpha\phi L_3$, где L_3 – генератор алгебры $\mathfrak{su}(2)$ в N -мерном представлении. Распределение собственных значений в высокотемпературной фазе показано на рис. 3. Этот спектр хорошо аппроксимируется функцией $\rho(x) = 3(R^2 - x^2)/4R^3$ при $R \approx 2.0$. Распределение не чувствительно к значению $\tilde{\alpha}$ вплоть до самой точки перехода. Данная парабола становится понятной, если доминантные конфигурации в режиме малых $\tilde{\alpha}$ даются коммутирующими матрицами, когда совместное распределение собственных значений является равномерным в шаре радиуса $R = 2$.

Подведем итог. Следя за системой в процессе охлаждения, получаем, что в высокотемпературной фазе (при малых $\tilde{\alpha}$) $\langle \text{Tr } X_a^2 \rangle = 3R^2/5 \cdot N$, где $R \approx 2.0$, и не зависит от α вплоть до $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_c$. В этой точке система претерпевает экзотический фазовый переход, при котором $\langle \text{Tr } X_a^2 \rangle$ скачком меняет свое значение с $12/5 \cdot N$ на $\sqrt{3/8} \cdot N^2$, а в низкотемпературной фазе система характеризуется геометрией фоновой некоммутативной сферы с $\langle \text{Tr } X_a^2 \rangle = \tilde{\alpha}^2 \phi^2 N^2/4$.

Рис. 3. Распределение собственных значений оператора X_3 при $\alpha = 0$ для $N = 64$. Распределение фитировано функцией $\rho(x) = 3(4 - x^2)/32$ (сплошная линия).

4. МОДЕЛЬ ДИМЕРОВ

С учетом экзотической природы рассмотренного фазового перехода очень соблазнительно найти другие примеры аналогичных переходов. Любопытно, что совершенно классическая модель, называемая моделью димеров, обладает очень схожими термодинамическими свойствами [12], [13]. Математики изучают ее как модель, позволяющую переписать покрытия графов. Для физика эта модель имеет много сторон, например ее можно рассматривать как решеточную модель двумерного фермиона. В простейшем случае берется гексагональная решетка с тремя ребрами, исходящими из каждой вершины, с заданными на них активностями $a = e^{-\beta\epsilon_a}$, $b = e^{-\beta\epsilon_b}$ и $c = e^{-\beta\epsilon_c}$. Эти активности определяют вероятность пребывания ребра в активном состоянии и ориентацию ромбовидной фигуры, входящей в покрытие дуальной треугольной решетки.

Статистическая сумма есть $Z(N, M, a, b, c) = \sum a^{N_a} b^{N_b} c^{N_c}$, где суммирование ведется по всем покрытиям, N_i – число активных связей типа i и $N_a + N_b + N_c = NM$, поскольку решетка должна быть полностью покрыта. Если активности полагаются равными единице, то Z определяет число ромбов в покрытии дуальной треугольной решетки.

Хитрым образом приписывая знаки элементам матрицы смежности решетки, Кастелайн, Фишер и Темперли заметили, что можно преобразовать $Z(a, b, c)$ в пфаффиан матрицы K , которая теперь называется матрицей Кастелайна. В любой простой связной плоской области модуль пфаффиана матрицы K дает статистическую сумму модели димеров. Для тороидальной решетки статистическая сумма равна

$Z = (-Z_{0,0} + Z_{1/2,0} + Z_{0,1/2} + Z_{1/2,1/2})/2$, где нижние индексы задают периодичность матрицы K по циклам тора.

В термодинамическом пределе логарифм объемной статистической суммы в пересчете на один димер есть

$$W = \frac{\ln Z}{NM} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \ln(c - ae^{-i\theta} - be^{i\phi}).$$

Если один из весов больше, чем сумма двух других, то W является логарифмом этого веса. При $a = b = e^{-\beta}$ и $c = 1$ низкотемпературная фаза имеет замороженный порядок в c -направлении с фазовым переходом при $\beta_c = \ln 2$. Разлагая вблизи точки β_c , получаем $W = 0$ при $\beta > \ln 2$, а при $\ln 2 \geq \beta$ имеем

$$W(\beta) \simeq \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} (\ln 2 - \beta)^{3/2}.$$

Видно, что удельная теплоемкость $C = \beta^2 \cdot \partial^2 W / \partial \beta^2$ равна нулю в низкотемпературной замороженной фазе и является расходящейся с критическим показателем $\alpha = 1/2$, если приближаться к переходу со стороны высоких температур.

Спектр матрицы K имеет вид $p^{\text{Hex}}(z, w) = 1 - w - 1/z$, где $z = e^{x+i\theta}$ и $w = e^{y+i\phi}$, а $x = \ln(a/c)$ и $y = \ln(b/c)$. Для высокотемпературной фазы имеются ровно две пары углов (Θ, Φ) и $(-\Theta, -\Phi)$, при которых $p^{\text{Hex}} = 0$. Вообще говоря, множество, где $p^{\text{Hex}} = 0$, есть область на плоскости xy , ограниченная кривыми, на которых эти углы становятся равными 0 или π . Выписав разложение в окрестности нуля,

$$p^{\text{Hex}} \approx -\frac{2\pi ia}{N} e^{-i\Theta} (n + u + \tau(m + v)), \quad \tau = \frac{Nb}{Ma} e^{i(\Theta+\Phi)},$$

мы видим, что спектр матрицы K переходит в спектр безмассового дираковского фермиона на двумерном торе, модулярный параметр которого $\tau = \tau_0 + i\tau_1$ определяется весами димеров. Поскольку система охлаждена и приближается к точке фазового перехода, угол тора коллапсирует, $\tau \rightarrow \tau_0$. Система возвращается к замороженной решетке, испытывая переход, при котором коллапсирует континуальная геометрия. Тщательный анализ показывает, что в высокотемпературной фазе эффекты конечного размера в точности соответствуют эффектам дираковского фермиона, распространяющегося по континуальному тору с модулярным параметром τ в присутствии калибровочного потенциала с нулевой напряженностью поля, но с плоской связностью и с голономиями вокруг циклов на торе. Голономии определяются точной природой предела.

В работе [13] была выдвинута гипотеза, что если шестивершинная модель, обладающая сходными термодинамическими свойствами, определена на торе, то она претерпевает переход, при котором геометрия также коллапсирует, но переход происходит при критическом значении τ и $\tau_1 \neq 0$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Трехматричная модель представляет собой конкретную модель, в которой можно проследить за тем, как геометрия претерпевает фазовый переход и исчезает. Переход происходит на фоне самой геометрии. На микроскопическом уровне эта

геометрия является некоммутативной – она описывается некоммутативной сферой с флуктуациями поля Янга–Миллса и флуктуациями материи. При высоких температурах собственные значения образуют заполненный шар инфинитезимального радиуса на масштабе некоммутативной сферы. Геометрическая фаза появляется при охлаждении системы. Качественно схожее явление происходит в модели димеров, в которой фазовый переход является фазовым переходом “заморозки” димеров на микроскопическом уровне, но на макроскопическом уровне испытывает переход именно модулярный параметр τ тора. Другие фазовые переходы с аналогичными характеристиками происходят в модели димеров и шестивершинных моделях. Это подсказывает, что, возможно, такие переходы принадлежат к новому классу универсальности топологических фазовых переходов.

В контексте матричных моделей несложно придумать другие многоматричные модели, в которых происходят аналогичные фазовые переходы. Легко обобщить действие (1) на другие группы. Важное обобщение результатов предложенной работы должно включать фермионы. Для подходящих моделей, в которых все еще имеется переход к геометрической низкотемпературной некоммутативной сфере, такое включение фермионов, по-видимому, не оказывает существенного влияния на низкотемпературную фазу. Для высокотемпературной фазы опять же можно ожидать, что доминирующий вклад будут вносить коммутирующие матрицы и флуктуации в окрестности этих конфигураций, однако присутствие фермионов может радикально изменить распределение собственных значений. Можно надеяться, что предложенное направление исследований позволит более глубоко понять эмерджентность геометрии и, возможно, гравитации.

Список литературы

- [1] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz, *Phys. Rept.*, **323**:3–4 (2000), 183–386, arXiv: hep-th/9905111.
- [2] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker, L. Susskind, *Phys. Rev. D*, **55**:8 (1997), 5112–5128, arXiv: hep-th/9610043.
- [3] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa, A. Tsuchiya, *Nucl. Phys. B*, **498**:1–2 (1997), 467–491, arXiv: hep-th/9612115.
- [4] H. Steinacker, *Class. Quant. Grav.*, **27**:13 (2010), 133001, 46 pp., arXiv: 1003.4134.
- [5] F. A. Berezin, *Comm. Math. Phys.*, **40**:2 (1975), 153–174.
- [6] J. Hoppe, *Quantum theory of a massless relativistic surface and a two-dimensional bound state problem*, Ph.D. thesis, Massachusetts Inst. Technology, Cambridge, MA, 1982.
- [7] J. Madore, *Class. Quant. Grav.*, **9**:1 (1992), 69–87.
- [8] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, CA, 1994.
- [9] R. Delgadillo-Blando, D. O’Connor, B. Ydri, *Phys. Rev. Lett.*, **100**:20 (2008), 201601, 4 pp., arXiv: 0712.3011.
- [10] R. Delgadillo-Blando, D. O’Connor, B. Ydri, *JHEP*, **05** (2009), 049, 39 pp., arXiv: 0806.0558.
- [11] A. Pelissetto, E. Vicari, *Phys. Rep.*, **368**:6 (2002), 549–727, arXiv: cond-mat/0012164.
- [12] J. F. Nagle, C. S. O. Yokoi, S. M. Bhattacharjee, “Dimer models on anisotropic lattices”, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, **13**, eds. C. Domb, J. L. Lebowitz, Academic Press, London, 1989, 235–297.
- [13] C. Nash, D. O’Connor, *J. Phys. A*, **42**:1 (2009), 012002, 8 pp., arXiv: 0809.2960.