Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Браун, Квантовая электродинамика в средах с дисперсией и поглощением, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 1, 58–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 03:55:33

© 2011 г.

М. А. Браун*

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ И ПОГЛОЩЕНИЕМ

Развивается формулировка квантовой электродинамики в присутствии среды с дисперсией и поглощением, дающая единое описание как релятивистских, так и нерелятивистских взаимодействий, которая базируется на использовании электрического поля как основной динамической переменной и введении дополнительных динамических переменных для среды. В качестве приложения рассматривается лэмбовский сдвиг в присутствии диэлектрика, занимающего полупространство.

Ключевые слова: квантовая электродинамика, среда с дисперсией и поглощением, лэмбовский сдвиг в среде.

1. ВВЕДЕНИЕ

Нашей целью является построение квантовой электродинамики (КЭД) в форме, позволяющей описать как релятивистские, так и нерелятивистские эффекты, возникающие за счет взаимодействия с виртуальными электронами и средой с дисперсией и поглощением. В прошлом формулировке КЭД в присутствии среды с дисперсией и поглощением было уделено достаточно много внимания. В рамках модели Хопфилда [1], следуя подходу Хуттнера и Барнетта [2], можно интерпретировать дисперсию и поглощение как взаимодействие электромагнитного поля с поляризацией, которая, в свою очередь, взаимодействует со средой, моделируемой набором осцилляторов с непрерывно распределенными частотами. В результате электромагнитное поле теряет энергию, которая переходит к этому набору осцилляторов. В таком подходе электромагнитное поле перестает существовать как самостоятельная динамическая переменная и выражается через операторы, характеризующие среду [3]. При этом остается открытой проблема релятивистских фотонов, для которых среда практически прозрачна и которые, очевидно, продолжают существовать как самостоятельные физические величины, ответственные за релятивистские взаимодействия в стандартной КЭД.

Мы развиваем другой формализм, в котором электромагнитное поле выживает в присутствии среды с дисперсией и поглощением. Наш подход базируется на выборе электрического поля как основной динамической переменной для электромагнитного поля. При добавлении переменных, характеризующих среду, это дает

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: braun1@pobox.spbu.ru

единое описание взаимодействия со средой и заряженными частицами как в нерелятивистской, так и в релятивистской областях. Наше описание взаимодействия со средой оказывается довольно близким к предложенному в работе [4], в которой, однако, проблема релятивистских взаимодействий вообще не затрагивается.

2. КЭД В ТЕРМИНАХ ОПЕРАТОРОВ ПОЛЯ

2.1. Действие КЭД в терминах электрического поля. Стандартный лагранжиан КЭД во взаимодействии с релятивистскими заряженными частицами может быть представлен суммой трех членов:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_I, \quad (1)$$

где

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) \quad (2)$$

– лагранжиан свободного электромагнитного поля,

$$\mathcal{L}_c = \bar{\psi}(i\hat{\partial} + m)\psi \quad (3)$$

– лагранжиан свободных заряженных частиц (электронов) и

$$\mathcal{L}_I = A^\mu j_\mu, \quad j_\mu = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad (4)$$

– лагранжиан взаимодействия. Классические уравнения движения (уравнения Максвелла) для электромагнитного поля имеют вид

$$\nabla \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0, \quad \nabla \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{j}, \quad (5)$$

где $\rho = j_0$ и j_i представляют собой плотности заряда и тока соответственно, которые удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\dot{\rho} + \nabla \mathbf{j} = 0. \quad (6)$$

Действие есть

$$S = S_e + S_c + S_I = \int dt d^3x (\mathcal{L}_e + \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_I). \quad (7)$$

Наша цель – выразить действие исключительно в терминах электрического поля $\mathbf{E}$ и заряженных частиц ψ . Для этого перепишем соответствующую часть действия в пространстве энергий, представляя электрическое поле как

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}), \quad (8)$$

где $\mathbf{E}(-\omega, \mathbf{x}) = \mathbf{E}^*(\omega, \mathbf{x})$, и сходным образом для $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}$. В пространстве ω мы получаем соответствующую часть действия в виде

$$S_e + S_I = \int d\omega d^3x \left\{ \frac{1}{2}(\mathbf{E}(-\omega)\mathbf{E}(\omega) - \mathbf{B}(-\omega)\mathbf{B}(\omega)) + \rho(-\omega)\phi(\omega) - \mathbf{j}(-\omega)\mathbf{A}(\omega) \right\}, \quad (9)$$

где зависимость полей от координат не указана явно. Используя классические уравнения движения и уравнение непрерывности, которые в пространстве ω трансформируются в

$$\mathbf{B} = \frac{1}{i\omega} \mathbf{E}, \quad \rho = \frac{1}{i\omega} \nabla \mathbf{j}, \quad (10)$$

мы исключаем $\mathbf{B}$ и ρ и переписываем действие следующим образом:

$$\begin{aligned} S &= \int d\omega d^3x \left\{ \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}(-\omega) \mathbf{E}(\omega) - \frac{1}{\omega^2} (\nabla \times \mathbf{E}(-\omega)) (\nabla \times \mathbf{E}(\omega)) \right) - \frac{1}{i\omega} \nabla \mathbf{j}(-\omega) \phi(\omega) - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{j}(-\omega) \mathbf{A}(\omega) \right\} = \\ &= \int d\omega d^3x \left\{ \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}(-\omega) \mathbf{E}(\omega) - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{E}(-\omega) \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\omega) \right) - \frac{1}{i\omega} \mathbf{j}(-\omega) \mathbf{E}(\omega) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Видно, что действие оказалось записанным исключительно в терминах электрического поля $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{x})$, которое взаимодействует с векторной частью электромагнитного тока.

Пропагатором электрического поля, очевидно, является матрица, обратная к матрице квадратичной формы для $\mathbf{E}$ в действии:

$$G_{ik}(\omega, \mathbf{x}) = -i \left[\delta_{ik} - \frac{1}{\omega^2} (\nabla_i \nabla_k - \nabla^2 \delta_{ik}) \right]^{-1}, \quad (12)$$

или, в терминах поперечного и продольного проекторов $P_\perp$ и $P_\parallel$,

$$G = -i\omega^2 (\omega^2 P_\parallel + (\omega^2 + \nabla^2) P_\perp)^{-1} = -i\omega^2 \left(\frac{1}{\omega^2} P_\parallel + \frac{1}{\omega^2 + \nabla^2} P_\perp \right). \quad (13)$$

В пространстве импульсов находим

$$G_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = -i\omega^2 \left(\delta_{ij} \frac{1}{\omega^2 - \mathbf{k}^2} - \frac{k_i k_j}{\omega^2 (\omega^2 - \mathbf{k}^2)} \right). \quad (14)$$

Это стандартный фотонный пропагатор в темпоральной калибровке $\phi = 0$ с дополнительным фактором ω^2 , который сокращается с дополнительным множителем $1/\omega$ во взаимодействии с током.

2.2. Диэлектрическая среда. Для описания диэлектрической среды введем электромагнитный ток $\mathbf{j}_M$, порождаемый диэлектриком. В полном действии возникает новый член, описывающий взаимодействие электромагнитного поля и среды:

$$S_I^{(1)}(\mathbf{j}_M) = - \int \frac{d\omega}{i\omega} d^3x \mathbf{j}_M(-\omega) \mathbf{E}(\omega). \quad (15)$$

Мы выберем ток $\mathbf{j}_M$ в той форме, которая приводит к классическим уравнениям Максвелла в диэлектрике:

$$S_I^{(1)}(\mathbf{j}_M) = \frac{1}{2} \int d\omega d^3x \mathbf{E}(-\omega) \chi(\omega) \mathbf{E}(\omega), \quad (16)$$

где $\chi(\omega, \mathbf{x})$ есть комплексная поляризуемость диэлектрика. Отметим, что интегрирование в выражении (16) идет по всем вещественным значениям ω . Это требует, чтобы поляризуемость $\chi(\omega)$ была определена как для положительных, так и для отрицательных значений ω . Как мы увидим ниже, она должна быть четной функцией ω , удовлетворяющей условию $\chi(\omega) = \chi(-\omega)$. Это означает, что интегрирование по ω в формуле (16) фактически совершается по фейнмановскому контуру на комплексной плоскости ω .

Добавляя этот член к действию свободного электромагнитного поля, получаем электромагнитное действие в диэлектрике:

$$S_{\text{ем}} = \frac{1}{2} \int d\omega d^3x \left(\mathbf{E}(-\omega) \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega) - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{E}(-\omega) \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\omega) \right). \quad (17)$$

Здесь $\epsilon(\omega, \mathbf{x}) = 1 + \chi(\omega, \mathbf{x})$ представляет собой комплексную диэлектрическую постоянную. Непосредственная проверка показывает, что действие $S_{\text{ем}}$ порождает стандартные уравнения Максвелла в диэлектрике.

В самом деле, в отсутствие других заряженных источников находим

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{\omega^2} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}), \quad (18)$$

и из действия (17) следует уравнение

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{x}) = \epsilon(\omega, \mathbf{x}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) \quad (19)$$

в соответствии с основным соотношением при фиксированном времени:

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \int_0^\infty d\tau \chi(\tau, \mathbf{x}) \mathbf{E}(t - \tau, \mathbf{x}). \quad (20)$$

Комплексная поляризуемость $\chi(\omega, \mathbf{x})$ определяется соотношением

$$\chi(\omega, \mathbf{x}) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \chi(t, \mathbf{x}), \quad (21)$$

поэтому по определению она является аналитической функцией ω в верхней полуплоскости и удовлетворяет условию

$$\chi^*(-\omega^*) = \chi(\omega), \quad (22)$$

которое следует из вещественности $\chi(t, \mathbf{x})$. Мы можем ввести другую функцию:

$$\bar{\chi}(\omega, \mathbf{x}) = \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} \chi(t, \mathbf{x}), \quad (23)$$

которая аналитична в нижней полуплоскости ω и удовлетворяет тому же условию (22). При достаточно малых ω поглощение отсутствует, и $\chi(\omega, \mathbf{x})$ становится вещественной и совпадает с $\bar{\chi}(\omega, \mathbf{x})$. Это означает, что $\bar{\chi}(\omega, \mathbf{x})$ аналитически продолжает $\chi(\omega, \mathbf{x})$ в нижнюю полуплоскость ω как четную функцию ω с правым и левым разрезами вдоль вещественной оси и свойствами

$$\chi(\omega) = \chi(-\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - \lambda(\omega)}, \quad (24)$$

где при комплексных ω

$$\lambda(\omega) = \int_0^\infty \frac{d\omega_1 \xi(\omega_1)}{\omega_1^2 - \omega^2} \quad (25)$$

при $\xi(\omega) \geq 0$. Отсюда следует, что на разрезах

$$\begin{aligned} \chi(\omega + i0) - \chi(\omega - i0) &= \chi(-\omega - i0) - \chi(-\omega + i0) = \\ &= 2i \operatorname{Im} \chi(\omega + i0) = \frac{1}{2\omega} \xi(\omega), \quad \omega \geq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Комплексная диэлектрическая постоянная $\epsilon(\omega)$ будет иметь те же аналитические свойства, что и $\chi(\omega)$, за исключением того, что она не исчезает при $\omega \rightarrow \infty$, а стремится к единице.

С физической точки зрения действие $S_{\text{ем}}$ не является удовлетворительным, потому что оно комплексно. Соответствующий функциональный интеграл, очевидно, расходится, так что действие $S_{\text{ем}}$ может быть истолковано только как эффективное, порождающее диаграммы Фейнмана в теории возмущений. Однако фигурирующие в нем операторы поля $\mathbf{E}$ не могут иметь непосредственного физического смысла, поскольку они, вообще говоря, неэрмитовы в координатном пространстве.

Чтобы избавиться от этого дефекта, выразим часть действия, обусловленную взаимодействием с материей, в виде результата взаимодействия с некоторой динамической системой, представляя

$$e^{iS_{\text{ем}}} = \int D\mathbf{j} e^{iS_{\text{I}}^{(1)}(\mathbf{j}) + iS_{\text{M}}(\mathbf{j})}, \quad (27)$$

где S_{M} — часть, описывающая свободную материю, квадратичная в $\mathbf{j}$. Очевидно, мы вправе интерпретировать динамические переменные $\mathbf{j}(\omega, \mathbf{x})$ как квантовые операторы с пропагатором

$$\Delta_{ij}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \chi(\omega, \mathbf{x}). \quad (28)$$

Мы имеем

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \mathbf{j}(\omega, \mathbf{x}) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega t} \mathbf{j}(\omega, \mathbf{x}) + e^{i\omega t} \mathbf{j}^\dagger(\omega, \mathbf{x})). \quad (29)$$

Будем рассматривать $\mathbf{j}(\omega)$ и $\mathbf{j}^\dagger(\omega)$ при $\omega > 0$ как операторы уничтожения и рождения, коммутирующие на число:

$$[j_i(\omega, \mathbf{x}), j_k^\dagger(\omega', \mathbf{x}')] = f(\omega, \mathbf{x}) \delta_{ik} \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \omega > 0. \quad (30)$$

Предполагаем, что вакуумное состояние удовлетворяет условию

$$\mathbf{j}(\omega, \mathbf{x})|0\rangle = 0, \quad \omega > 0; \quad (31)$$

пропагатор определяем как

$$\Delta_{ik}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = i\langle 0|T\{j_i(t, \mathbf{x}), j_k(t=0, \mathbf{y})\}|0\rangle. \quad (32)$$

При $t > 0$ находим

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})_{t>0} &= i\langle 0|j_i(t, \mathbf{x}), j_k(0, \mathbf{y})|0\rangle = \int_0^\infty \frac{d\omega d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega t} \langle 0|j_i(\omega, \mathbf{x}), j_k^\dagger(\omega', \mathbf{y})|0\rangle = \\ &= \delta_{ik} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} i f(\omega, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (33)$$

при $t < 0$ —

$$\begin{aligned} \Delta_{ik}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})_{t<0} &= i\langle 0|j_k(0, \mathbf{y}), j_i(t, \mathbf{x})|0\rangle = \int_0^\infty \frac{d\omega d\omega'}{2\pi} e^{i\omega t} \langle 0|j_k(\omega', \mathbf{y}), j_i^\dagger(\omega, \mathbf{x})|0\rangle = \\ &= \delta_{ik} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} i f(\omega, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (34)$$

С другой стороны, пропагатор должен иметь вид (28). Отсюда получаем

$$\Delta_{ik}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \int_C \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \chi(\omega, \mathbf{x}), \quad (35)$$

где интегрирование ведется по фейнмановскому контуру в плоскости ω . При $t > 0$ замыкаем контур на правый разрез $\chi(\omega)$ и получаем

$$\Delta_{ik}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})_{t>0} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} 2i \operatorname{Im} \chi(\omega, \mathbf{x}). \quad (36)$$

При $t < 0$, используя $\Delta(-t) = \Delta(t)$, сразу находим

$$\Delta_{ik}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})_{t<0} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} 2i \operatorname{Im} \chi(\omega, \mathbf{x}). \quad (37)$$

Сравнение с формулами (33) и (34) дает

$$f(\omega, \mathbf{x}) = 2 \operatorname{Im} \chi(\omega, \mathbf{x}) = 2 \operatorname{Im} \epsilon(\omega, \mathbf{x}). \quad (38)$$

Таким образом, если мы определим

$$\mathbf{j}^{(\pm)}(\omega, \mathbf{x}) = \sqrt{2 \operatorname{Im} \epsilon(\omega, \mathbf{x})} \mathbf{c}^{(\pm)}(\omega, \mathbf{x}), \quad (39)$$

то операторы $\mathbf{c}^{(\pm)}$ будут удовлетворять равенству

$$[c_i(\omega, \mathbf{x}), c^\dagger(\omega', \mathbf{y})] = \delta_{ik} \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (40)$$

и станут нормальными операторами рождения и уничтожения с гамильтонианом среды

$$H_M = \int d\omega d^3x \omega \mathbf{c}^\dagger(\omega, \mathbf{x}) \mathbf{c}(\omega, \mathbf{x}). \quad (41)$$

В однородной среде мы находим операторы $\mathbf{c}^{(\pm)}(\omega, \mathbf{k})$ с ω , не зависящими от $\mathbf{k}$, и гамильтониан

$$H_M = \int d\omega d^3k \omega \mathbf{c}^\dagger(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{c}(\omega, \mathbf{k}). \quad (42)$$

Это означает, что диэлектрик моделируется набором осцилляторов с непрерывно распределенными частотами.

2.3. Диаграммная техника. В среде взаимодействие электрического поля и заряженных частиц описывается действием

$$S_{\text{IM}} = - \int d\omega d^3x \frac{1}{i\omega} j(-\omega) \mathbf{E}(\omega), \quad (43)$$

где пропагатор электрического поля дается обобщением (12):

$$G_{ik}(\omega, \mathbf{x}) = -i\omega^2 [\omega^2 \epsilon(\omega) \delta_{ik} - \nabla_i \nabla_k + \nabla^2 \delta_{ik}]^{-1}. \quad (44)$$

Подчеркнем, что интегрирование по ω ведется по фейнмановскому контуру, как в стандартной КЭД, в отличие от работы [4], где оно идет в верхней полуплоскости.

Мы рассмотрим применение этой техники к набору нерелятивистских частиц с зарядом $-e$, движущихся в некотором внешнем поле. Для этих частиц определим

$$\mathbf{x}_c(t, \mathbf{x}) = \sum_n \mathbf{x}_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n). \quad (45)$$

Тогда

$$-e\dot{\mathbf{x}}_c(t, \mathbf{x}) = -i[H_e, \mathbf{x}(t, \mathbf{x})] = \mathbf{j}_c(t, \mathbf{x}), \quad (46)$$

или, в пространстве ω ,

$$-ie\omega\mathbf{x}(\omega, \mathbf{x}) = \mathbf{j}_e(-\omega, \mathbf{x}), \quad (47)$$

т. е.

$$\frac{1}{i\omega}\mathbf{j}_e(-\omega, \mathbf{x}) = -\mathbf{x}_c(\omega, \mathbf{x}). \quad (48)$$

Это приводит к выражению

$$S_{\text{IM}} = i \int d\omega d^3x \mathbf{x}_e(\omega, \mathbf{x}) \mathbf{E}_M(\omega, \mathbf{x}) = i \int dt d^3x \mathbf{x}_e(t, \mathbf{x}) \mathbf{E}_M(t, \mathbf{x}). \quad (49)$$

Если внешние частицы описываются вторично квантованным полем $\psi(t, \mathbf{x})$, то

$$S_{\text{IM}} = i \int dt d^3x \psi^*(t, \mathbf{x}) \psi(t, \mathbf{x}) \mathbf{x} \mathbf{E}_M(t, \mathbf{x}). \quad (50)$$

Это определяет вершины взаимодействия.

3. ЛЭМБОВСКИЕ СДВИГ И ШИРИНА В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

3.1. Общий случай. Сдвиг уровней энергии атомного электрона за счет взаимодействия с квантованным электромагнитным полем (лэмбовский сдвиг) в нижнем порядке по α дается двумя диаграммами Фейнмана, изображенными на рис. 1. Сплошные линии соответствуют атомному электронному пропагатору (в картине Фарри), штриховые линии отвечают электромагнитному полю. Представленные диаграммы дают сдвиги энергии ΔE_a и ΔE_b за счет поляризации вакуума и собственной энергии электрона соответственно. Последняя может быть разделена на нерелятивистскую и релятивистскую части, ΔE_b^{NR} и ΔE_b^{R} , в зависимости от энергии ω виртуального фотона, $0 < \omega < \omega_m$ и $\omega > \omega_m$ соответственно, причем величина ω_m обычно выбирается много большей, чем энергии электрона в атоме. Полный сдвиг энергии есть сумма этих трех вкладов:

$$\Delta E = \Delta E_a + \Delta E_b^{\text{NR}} + \Delta E_b^{\text{R}}. \quad (51)$$

Релятивистские вклады ΔE_a и ΔE_b^{R} “не чувствуют” среды, которая прозрачна для фотонов с большой энергией. Они могут быть вычислены стандартным способом и не являются предметом обсуждения в настоящей работе. Нас интересует только нерелятивистский вклад в собственную энергию электрона. В нерелятивистской области можно использовать нерелятивистское приближение для электронного пропагатора:

$$S(E, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} | (H_A - E)^{-1} | \mathbf{y} \rangle = \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{x}) \psi_n^*(\mathbf{y})}{E_n - E - i0}, \quad (52)$$

Рис. 1. Диаграммы для лэмбовского сдвига: поляризация вакуума (а) и собственная энергия электрона (б).

где H_A – гамильтониан атомного электрона, движущегося в поле, созданном атомным ядром, находящимся в точке $\mathbf{x}_0$:

$$H_A = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}, \quad (53)$$

а E_n и $\psi_n(\mathbf{x})$ – его уровни энергии и собственные функции. Собственная энергия электрона, соответствующая диаграмме на рис. 1б, является оператором, действующим в пространстве координат, с ядром

$$\Sigma(E, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = e^2 \int \frac{d\omega}{2\pi} S(E - \omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) x_i G_{ik}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) y_k, \quad (54)$$

где G – электромагнитный пропагатор в диэлектрике (44), а вершины берутся в соответствии с (50). Сдвиг n -го уровня дается формулой

$$\begin{aligned} (\Delta E_b^{\text{NR}})_n &= -\langle n | \Sigma(E_n) | n \rangle = \\ &= -e^2 \int d^3x d^3y \psi^*(x) \int \frac{d\omega}{2\pi i} S(E_n - \omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) x_i G_{ik}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) y_k \psi(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (55)$$

Интегрирование по ω идет по фейнмановскому контуру, представленному на рис. 2а, который можно деформировать в контур, идущий вокруг правого разреза функции G (рис. 2б):

$$(\Delta E_b^{\text{NR}})_n = -e^2 \int d^3x d^3y \psi^*(x) \int_0^{\omega_m} \frac{d\omega}{\pi} S(E - \omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) x_i \text{Im} G_{ik}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) y_k \psi(\mathbf{y}), \quad (56)$$

где мы ограничили интегрирование по ω нерелятивистской областью $\omega < \omega_m$.

Чтобы вычислить это выражение, воспользуемся тем, что атомные волновые функции сконцентрированы вблизи ядра: $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \sim |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| \ll 1/\omega$. Это позволяет вынести $\text{Im} G_{ik}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ за знак интеграла по $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в точке $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{x}_0$. Тогда находим

$$(\Delta E_b^{\text{NR}})_n = -e^2 \int_0^{\omega_m} \frac{d\omega}{\pi} \text{Im} G_{ik}(\omega, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) \sum_m \frac{\langle n | x_i | m \rangle \langle m | x_k | n \rangle}{E_m - E_n + \omega - i0}. \quad (57)$$

В частности, ширина n -го уровня равна

$$\frac{1}{2} \Gamma_n = \text{Im}(\Delta E_b^{\text{NR}})_n = -e^2 \sum_{m, E_m < E_n} \langle n | x_i | m \rangle \langle m | x_k | n \rangle \text{Im} G_{ik}(E_n - E_m, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0). \quad (58)$$

Рис. 2. Фейнмановский контур интегрирования (а), деформированный в контур, идущий вокруг правого разреза функции G (б).

Очевидно, что основное состояние остается стабильным и в присутствии диэлектрика. Вещественная часть сдвига дается главным значением интеграла (57).

Подчеркнем, что в отсутствие диэлектрика выражение (57) дает стандартный нерелятивистский вклад в сдвиг энергии в вакууме. Действительно, при $\epsilon(\omega, \mathbf{x}) = 1$ мы получаем вакуумную функцию Грина

$$G_{ik}^{(V)}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_{ik}^{(V)}(\omega, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\nabla_i \nabla_k + \delta_{ik} \omega^2) \frac{e^{i\omega r}}{4\pi\omega^2 r}, \quad (59)$$

где $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. В пределе $r \rightarrow 0$ находим

$$\text{Im } G_{ik}^{(V)}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \delta_{ik} \frac{\omega}{6\pi}. \quad (60)$$

Таким образом, нерелятивистский сдвиг дается выражением

$$(\Delta E_b^{\text{NR}})^{(V)}_n = -\frac{e^2}{6\pi^2} \int_0^{\omega_m} d\omega \omega^3 \sum_m \frac{\langle n | x_k | m \rangle \langle m | x_k | n \rangle}{E_m - E_n + \omega - i0}, \quad (61)$$

которое совпадает со стандартным результатом, получаемым в КЭД в вакууме.

3.2. Атом вблизи диэлектрической поверхности. Пусть пространство разделено на вакуумную и диэлектрическую части, причем атомное ядро лежит в вакууме в точке $\mathbf{x}_0 = (0, 0, z)$. Тогда согласно работе [3] функция Грина может быть разложена на вакуумную функцию Грина и отражательный член:

$$G_{ik}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_{ik}^{(V)}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + R_{ik}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (62)$$

где в точке $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{x}_0 = (0, 0, z)$

$$\begin{aligned} R_{xx}(\omega, z) = R_{yy}(\omega, z) &= -\frac{i}{8\pi\omega^2} \int_0^\infty dk \beta k e^{2i\beta z} r^p(k) + \frac{i}{8\pi} dk \frac{k}{\beta} e^{2i\beta z} r^s(k), \\ R_{zz}(\omega, z) &= \frac{i}{4\pi i \omega^2} \int dk \frac{k^3}{\beta} e^{2i\beta z}. \end{aligned} \quad (63)$$

Здесь $\beta = \sqrt{\omega^2 - k^2}$, а r^p и r^s – стандартные коэффициенты отражения Френеля для p - и s -поляризованных волн. Если расстояние от атома до поверхности мало по сравнению с длиной волны, так что $\omega z \ll 1$, то

$$\begin{aligned} R_{zz} &= \frac{1}{16\pi\omega^2 z^3} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} + \frac{1}{8\pi z} \frac{(\nu - 1)^2}{\nu(\nu + 1)} + \frac{i\omega}{12\pi} \frac{(\nu - 1)(2\nu - 1)}{\nu(\nu + 1)} + O(z), \\ R_{xx} = R_{yy} &= \frac{1}{2} R_{zz} - \frac{1}{16\pi z} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} - \frac{i\omega}{3\pi} \frac{\nu - 1}{\nu + 1} + O(z), \end{aligned} \quad (64)$$

где $\nu = \sqrt{\epsilon}$. Главные члены при $z \rightarrow 0$ для $\text{Im } R -$

$$\text{Im } R_{zz} = \frac{1}{8\pi\omega^2 z^3} \frac{\text{Im } \epsilon}{|\epsilon + 1|^2}, \quad \text{Im } R_{xx} = \text{Im } R_{yy} = \frac{1}{2} \text{Im } R_{zz}. \quad (65)$$

Полный лэмбовский сдвиг, очевидно, складывается из вакуумного вклада и дополнительного члена, порождаемого диэлектриком и равного сдвигу (57), где вместо G подставлено $\omega^2 R$. При малых z

$$\begin{aligned} \omega^2 \text{Im } R_{ik} \langle n|x_i|m \rangle \langle m|x_k|n \rangle &= \\ &= \omega^2 \text{Im} (R_{xx} \langle n|x|m \rangle \langle m|x|n \rangle + R_{yy} \langle n|y|m \rangle \langle m|y|n \rangle + R_{zz} \langle n|z|m \rangle \langle m|z|n \rangle) = \\ &= \frac{\omega^2}{2} \text{Im } R_{zz} (|\langle n|x|m \rangle|^2 + |\langle n|y|m \rangle|^2 + 2|\langle n|z|m \rangle|^2) = \frac{1}{6\pi z^3} \frac{\text{Im } \epsilon}{|\epsilon + 1|^2} d_{nm}, \end{aligned}$$

где $d_{mn} = \langle n|\mathbf{x}|m \rangle \langle m|\mathbf{x}|n \rangle + |\langle n|z|m \rangle|^2$. Это приводит к вкладу в лэмбовский сдвиг от среды

$$\Delta E_n^{(M)} = -\frac{e^2}{6\pi^2 z^3} \sum_m d_{mn} \int_0^{\omega_m} d\omega \frac{\text{Im } \epsilon(\omega)}{|\epsilon(\omega) + 1|^2} \frac{1}{E_m - E_n + \omega - i0}. \quad (66)$$

Дополнительная ширина дается выражением [3]

$$\frac{1}{2} \Gamma_n^{(M)} = -\frac{e^2}{6\pi^2 z^3} \sum_{m, E_m < E_n} d_{mn} \frac{\text{Im } \epsilon(E_n - E_m)}{|\epsilon(E_n - E_m) + 1|^2}. \quad (67)$$

При малых частотах в диэлектрике

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + i\omega\epsilon_1, \quad (68)$$

а в металлах

$$\epsilon(\omega) = i\frac{\sigma}{\omega}, \quad (69)$$

где σ – проводимость. Соответственно находим для диэлектрика

$$\frac{\text{Im } \epsilon(\omega)}{|\epsilon(\omega) + 1|^2} = \frac{\omega\epsilon_1}{(\epsilon_0 + 1)^2 + \epsilon_1^2 \omega^2} = a_d \frac{\omega}{\lambda_d^2 + \omega^2}, \quad (70)$$

где

$$a_d = \frac{1}{\epsilon_1}, \quad \lambda_d = \frac{1 + \epsilon_0}{\epsilon_1}, \quad (71)$$

и для металла

$$\frac{\text{Im } \epsilon(\omega)}{|\epsilon(\omega) + 1|^2} = \frac{\omega\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} = a_{\text{met}} \frac{\omega}{\lambda_{\text{met}}^2 + \omega^2}, \quad (72)$$

где

$$a_{\text{met}} = \lambda_{\text{met}} = \sigma. \quad (73)$$

Для обоих случаев в сдвиге (66)

$$I(z) = \int_0^\infty \frac{\omega d\omega}{\omega^2 + \lambda^2} \frac{1}{\omega + z} = \frac{1}{z^2 + \lambda^2} \left(\frac{1}{2} \pi \lambda + z \ln \frac{z}{\lambda} \right), \quad (74)$$

где $z = E_m - E_n - i0$.

Таким образом, получаем вклад в лэмбовский сдвиг от диэлектрика или металла:

$$\Delta E_n^{(M)} = -\frac{e^2 a}{6\pi^2 z^3} \sum_m d_{mn} \frac{1}{\omega_{mn}^2 + \lambda^2} \left(\frac{1}{2} \pi \lambda + \omega_{mn} \ln \frac{\omega_{mn}}{\lambda} \right), \quad (75)$$

где $\omega_{mn} = E_m - E_n - i0$. Точное вычисление этого выражения сложно и может быть осуществлено только численно. Можно получить приближенное выражение в случае, когда макроскопический параметр λ много больше, чем разница между атомными уровнями $E_m - E_n$. Если $\lambda \gg \omega_{mn}$, то выражение (75) упрощается до

$$\Delta E_n^{(M)} = -\frac{e^2 a}{12\pi z^3 \lambda} \sum_m d_{mn}. \quad (76)$$

Мы получаем

$$\sum_m d_{mn} = \langle n | \mathbf{x}^2 + z^2 | n \rangle = \frac{4}{3} \langle n | \mathbf{x}^2 | n \rangle, \quad (77)$$

где использовалась ротационная инвариантность после усреднения по проекциям орбитального углового момента в состоянии $|n\rangle$. Для атомного уровня $|nl\rangle$ получаем

$$\langle nl | \mathbf{x}^2 | nl \rangle = \frac{1}{2} n^2 [5n^2 + 1 - 3l(l+1)] \frac{\hbar^4}{Z^2 m^2 e^4}. \quad (78)$$

Таким образом, окончательно

$$\Delta E_n^{(M)} = -\frac{e^2 a}{24\pi z^3 \lambda} n^2 [5n^2 + 1 - 3l(l+1)] \frac{\hbar^4}{Z^2 m^2 e^4}. \quad (79)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы предложили формализм для КЭД в присутствии среды с дисперсией и поглощением, который позволяет единым образом рассчитывать как влияние среды, так и стандартные эффекты КЭД, возникающие за счет взаимодействия с заряженными частицами и античастицами. Для простейших эффектов этого рода, таких как лэмбовский сдвиг, для которых окончательные выражения могут быть четко разбиты на нерелятивистскую и релятивистскую части, можно избежать применения нашего формализма, потому что возможно использование различных форм КЭД для этих двух частей. Мы ожидаем, что предложенный формализм может оказаться обязательным при описании сред, которые непрозрачны для релятивистских фотонов, таких как плазма или тяжелые ионы. Мы предполагаем рассмотреть такие релятивистские среды в наших будущих исследованиях.

Благодарности. Исследование поддержано Санкт-Петербургским государственным университетом (тема 11.0.77.2010).

Список литературы

- [1] J. J. Hopfield, *Phys. Rev.*, **112**:5 (1958), 1555–1567.
- [2] B. Huttner, S. M. Barnett, *Phys. Rev. A*, **46**:7 (1992), 4306–4322.
- [3] L. Knöll, S. Scheel, D.-G. Welsch, “QED in dispersing and absorbing dielectric media”, *Coherence and Statistics of Photons and Atoms*, ed. J. Peřina, Wiley, New York, 2001, 1–64.
- [4] A. Bechler, *J. Mod. Optics*, **46**:5 (1999), 901–921.