Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Ю. Письмак, Ю. М. Письмак, Рассеяние электромагнитных волн на плоской поверхности в модели с потенциалом Черна–Саймонса, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 1, 69–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6709>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:26:13

© 2011 г.

Д. Ю. Письмак*, Ю. М. Письмак*

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В МОДЕЛИ С ПОТЕНЦИАЛОМ ЧЕРНА–САЙМОНСА

Потенциал Черна–Саймонса возникает в квантовой электродинамике при построении моделей взаимодействия материальной поверхности с фотонным полем, если наложить требования локальности, калибровочной инвариантности и перенормируемости. В рамках такой модели рассмотрена задача рассеяния электромагнитных волн на плоскости.

Ключевые слова: эффект Казимира, электродинамика в пространстве с макроскопическими неоднородностями, потенциал Черна–Саймонса, рассеяние волн.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что состояние квантовополевой системы зависит от воздействия на нее внешнего фонового поля. С другой стороны, квантовые флуктуации вакуума вносят существенные поправки в классическую картину взаимодействия макроскопических материальных объектов. В 1948 г. Казимир показал, что квантовые флуктуации вызывают притяжение между двумя параллельными пластинами незаряженного конденсатора [1]. Теоретическое предсказание этого явления, названного эффектом Казимира, хорошо согласуется с современными экспериментальными данными [2]–[4]. Характерный масштаб для эффекта Казимира – расстояние $10 \div 1000$ нм. На таких расстояниях существенными оказываются как классические, так и квантовые свойства системы, и это требует разработки специальных методов исследования. Знание законов нанофизики важно не только для более полного понимания природы физических явлений, в настоящее время оно становится также необходимым и для решения различных практических задач в бурно развивающихся направлениях по созданию новых технических устройств микромеханики, разработки нано- и биотехнологий.

На данный момент существует большое число теоретических работ, в которых рассматривается эффект Казимира (см., например, [5]). Однако, интересуясь только

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: dashap2@gmail.com, ypismak@yahoo.com

некоторыми его особыми аспектами, многие авторы производят вычисления в упрощенных моделях. Обычно предполагают, что специфика квантовой электродинамики (КЭД) не существенна, и наиболее важные особенности эффекта Казимира могут быть исследованы в рамках свободного квантового скалярного поля с фиксированными граничными условиями или с δ -функцией в качестве потенциала.

Используя такие методы, можно получить количественное описание некоторой характеристики эффекта Казимира, но они неприменимы для исследований в рамках одной и той же модели других явлений, возникающих из-за взаимодействия полей КЭД с классическим фоновым полем (дефектом). Для построения такой модели можно использовать подход Симанзика, в котором к обычному действию квантовой теории поля добавляется действие дефекта, сосредоточенное в области пространства, занятого материальным телом.

Взаимодействие сингулярного внешнего поля, сосредоточенного на двумерной поверхности в трехмерном пространстве, с фотонным полем оказывается полностью определено формой поверхности (дефекта) и ограничениями, вытекающими из основных принципов КЭД (калибровочная инвариантность, локальность, перенормируемость). При этом в действии дефекта содержится только один безразмерный параметр – константа взаимодействия материала поверхности с фотонным полем [6]. Оказывается, что сила Казимира существенно зависит от этого параметра и при определенных его значениях может стать отталкивающей. Кроме того, модель предсказывает необычные эффекты взаимодействия зарядов и токов с материальной плоскостью [6]. В работе [7] с помощью этой модели проведены расчеты потенциала Казимира–Полдера для нейтрального атома, находящегося вблизи плоской поверхности. В настоящей работе данная модель используется для исследования процесса рассеяния электромагнитных волн на плоскости.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим модель фотонного поля, взаимодействующего с материальной плоскостью. Для общего случая двумерной поверхности, заданной уравнением $\Phi(x) = 0$, функционал действия модели имеет вид

$$S(A) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + S_{\Phi}(A),$$

где

$$S_{\Phi}(A) = \frac{a}{2} \int \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \partial_{\lambda} \Phi(x) A_{\mu}(x) F_{\nu\rho}(x) \delta(\Phi(x)) dx, \quad F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}.$$

Вариационная производная действия дефекта, сосредоточенного на поверхности, записывается как

$$\frac{\delta S_{\Phi}(A)}{\delta A_{\nu}(y)} = a \varepsilon^{\mu\nu\eta\rho} \partial_{\mu} \Phi(y) F_{\eta\rho}(y) \delta(\Phi(y)).$$

Для плоскости $x_3 = 0$ уравнения Эйлера–Лагранжа рассматриваемой модели представляют собой модифицированные уравнения Максвелла:

$$\frac{\delta S(A)}{\delta A_{\nu}} = \partial_{\mu} F^{\mu\nu} + a \varepsilon^{3\nu\sigma\rho} F_{\sigma\rho} \delta(x_3) = 0. \quad (1)$$

Мы решим их, воспользовавшись преобразованием Фурье по координатам x_0, x_1, x_2 для вектор-потенциала A_μ :

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\bar{p}\bar{x}} A_\mu(\bar{p}, x_3) d\bar{p}, \quad A_\mu(\bar{p}, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\bar{p}\bar{x}} A_\mu(x) d\bar{x}. \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем мы используем обозначение $\bar{p}$ для вектора $\bar{p} = (p_0, p_1, p_2)$, $\bar{p}^2 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2$, $\bar{p}\bar{x} = p_0x_0 - p_1x_1 - p_2x_2$. Для поля $A(\bar{p}, x_3)$ уравнения (1) записываются в виде

$$\nu = 3 : \quad \bar{p}^2 A^3 + \partial^3 i\bar{p}\bar{A} = 0, \quad (3)$$

$$\nu \neq 3 : \quad (-\bar{p}^2 - \partial_3^2) A^\nu - ip^\nu (i\bar{p}\bar{A} - \partial_3 A_3) + 2a\varepsilon^{3\nu\eta\rho} ip_\eta A_\rho \delta(x_3) = 0. \quad (4)$$

В силу второго равенства в (2) условие вещественности $A_\mu(x) = A_\mu^*(x)$ вектор-потенциала $A_\mu(x)$ для $A(\bar{p}, x_3)$ имеет вид $A^*(\bar{p}, x_3) = A(-\bar{p}, x_3)$. Воспользовавшись этим соотношением, можно получить интегральное представление

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \theta(p_0) [e^{i\bar{p}\bar{x}} A_\mu(\bar{p}, x_3) + e^{-i\bar{p}\bar{x}} A_\mu^*(\bar{p}, x_3)] d\bar{p} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} 2 \operatorname{Re} \int \theta(p_0) [e^{i\bar{p}\bar{x}} A_\mu(\bar{p}, x_3)] d\bar{p}, \end{aligned} \quad (5)$$

в котором вещественность $A_\mu(x)$ очевидна.

3. ВЫБОР КАЛИБРОВКИ

Уравнение Эйлера–Лагранжа (1) для рассматриваемой задачи инвариантно относительно калибровочного преобразования $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \varphi(x)$, поэтому решение уравнения (1) находится с точностью до калибровочного преобразования, и мы можем при его построении зафиксировать калибровку. Мы будем проводить расчеты в темпоральной калибровке

$$A_0 = 0. \quad (6)$$

Воспользовавшись калибровочным условием (6), перепишем уравнения (3), (4) в виде

$$\bar{p}^2 A^3 - \partial^3 (ip_1 A_1 + ip_2 A_2) = 0, \quad (7)$$

$$p^0 (ip_1 A_1 + ip_2 A_2 + \partial_3 A_3) - 2a(p_1 A_2 - p_2 A_1) \delta(x_3) = 0, \quad (8)$$

$$(-\bar{p}^2 - \partial_3^2) A^1 + ip^1 (ip_1 A_1 + ip_2 A_2 + \partial_3 A_3) + 2aip_0 A_2 \delta(x_3) = 0, \quad (9)$$

$$(-\bar{p}^2 - \partial_3^2) A^2 + ip^2 (ip_1 A_1 + ip_2 A_2 + \partial_3 A_3) - 2aip_0 A_1 \delta(x_3) = 0. \quad (10)$$

Положим

$$ip_1 A_1 + ip_2 A_2 + \partial_3 A_3 = \alpha, \quad A_1|_{x_3=0} = a_1, \quad A_2|_{x_3=0} = a_2. \quad (11)$$

Тогда из уравнения (8) следует, что

$$\alpha = 2a \frac{p_1 a_2 - p_2 a_1}{p_0} \delta(x_3),$$

и в силу уравнений (9), (10) поля A_1 , A_2 удовлетворяют уравнениям

$$(\bar{p}^2 + \partial_3^2)A_i + c_i \delta(x_3) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

в которых

$$c_1 \equiv -\frac{2ia}{p_0}[(p_1^2 - p_0^2)a_2 - p_1 p_2 a_1], \quad c_2 \equiv \frac{2ia}{p_0}[(p_2^2 - p_0^2)a_1 - p_1 p_2 a_2].$$

Таким образом, в рассматриваемом нами случае темпоральной калибровки нам нужно найти решения двух однотипных дифференциальных уравнений (12).

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $\partial_T^2 \psi + P^2 \psi + C \delta(T) = 0$

Чтобы найти $A(\bar{p}, x_3)$, решим вначале вспомогательную задачу. Найдем общее решение уравнения

$$\partial_t^2 \psi + p^2 \psi + c \delta(t) = 0. \quad (13)$$

Пусть

$$f(t) \equiv \frac{c}{2pi} [\theta(t)e^{-ipt} + \theta(-t)e^{ipt}] = \frac{ce^{-ip|t|}}{2pi}. \quad (14)$$

Продифференцировав эту функцию по t , получим

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{c}{2} [\theta(t)e^{-ipt} - \theta(-t)e^{ipt}], \\ f''(t) &= \frac{cpi}{2} [\theta(t)e^{-ipt} + \theta(-t)e^{ipt}] - c\delta(t). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $f(t)$ является одним из решений уравнения (13). Однородное уравнение $\partial_t^2 \varphi + p^2 \varphi = 0$ имеет решение $\varphi(t) = d_1 e^{ipt} + d_2 e^{-ipt}$, где d_1 , d_2 – произвольные постоянные. Следовательно, общим решением уравнения (13) является

$$\psi(t) = d_1 e^{ipt} + d_2 e^{-ipt} + \frac{ce^{-ip|t|}}{2pi}, \quad (15)$$

где d_1 , d_2 – произвольные постоянные. Полученный результат, как мы покажем далее, позволяет найти решение системы уравнений (7)–(10) в явном виде.

5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА–ЛАГРАНЖА

Так как функция (15) является общим решением уравнения (13), мы можем записать общее решение уравнений для полей A_1 , A_2 в виде

$$A_1(\bar{p}, x_3) = d_1^{(1)} e^{i\rho x_3} + d_2^{(1)} e^{-i\rho x_3} + \frac{c_1 e^{-i\rho|x_3|}}{2i\rho}, \quad (16)$$

$$A_2(\bar{p}, x_3) = d_1^{(2)} e^{i\rho x_3} + d_2^{(2)} e^{-i\rho x_3} + \frac{c_2 e^{-i\rho|x_3|}}{2i\rho}, \quad (17)$$

где $\rho \equiv \sqrt{\bar{p}^2}$. Нетрудно убедиться, что из предположения ограниченности $A_j(x_3, \bar{p})$ при любых значениях x_3 следует, что $\bar{p}^2 > 0$, поэтому мы рассмотрим только случай $\rho > 0$. Поле A_3 находится непосредственно из уравнения (7):

$$A_3(x_3, \bar{p}) = d_1^{(3)} e^{i\rho x_3} + d_2^{(3)} e^{-i\rho x_3} + \epsilon(x_3) \frac{c_3 e^{-i\rho|x_3|}}{2i\rho}, \quad (18)$$

где

$$d_1^{(3)} = \frac{1}{\rho}(p_1 d_1^{(1)} + p_2 d_1^{(2)}), \quad d_2^{(3)} = -\frac{1}{\rho}(p_1 d_2^{(1)} + p_2 d_2^{(2)}), \quad c_3 = -\frac{1}{\rho}(p_1 c_1 + p_2 c_2)$$

и $\epsilon(x_3) \equiv x_3/|x_3|$.

Положив $x_3 = 0$ в (16), (17) и воспользовавшись обозначениями (11), мы получим соотношения

$$a_j = d_1^{(j)} + d_2^{(j)} + \frac{c_j}{2i\rho}, \quad j = 1, 2.$$

Пусть $D_j = (d_1^{(j)} + d_2^{(j)})\rho$, $j = 1, 2$. Тогда система линейных уравнений для a_1, a_2 запишется в виде

$$\begin{aligned} a_1(p_0\rho - ap_1p_2) + aa_2(p_1^2 - p_0^2) &= D_1p_0, \\ a_2(p_0\rho + ap_1p_2) - aa_1(p_2^2 - p_0^2) &= D_2p_0. \end{aligned}$$

Решив ее, получим

$$a_1 = \frac{aD_2(p_0^2 - p_1^2) + D_1(ap_1p_2 + p_0\rho)}{p_0\rho^2(a^2 + 1)}, \quad (19)$$

$$a_2 = -\frac{aD_1(p_0^2 - p_2^2) + D_2(ap_1p_2 - p_0\rho)}{p_0\rho^2(a^2 + 1)} \quad (20)$$

и

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{2ai[D_1(ap_0\rho - p_1p_2) - D_2(p_0^2 - p_1^2)]}{p_0\rho(a^2 + 1)}, \\ c_2 &= -\frac{2ai[D_2(ap_0\rho + p_1p_2) + D_1(p_0^2 - p_2^2)]}{p_0\rho(a^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Положив

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (A_1, A_2, A_3), \quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{f} = \frac{1}{2i\rho}(c_1, c_2, c_3), \\ \vec{d}_j &= (d_j^{(1)}, d_j^{(2)}, d_j^{(3)}), \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

представим формулы (16)–(18) в компактной форме

$$\vec{A}(\vec{p}, x_3) = \vec{d}_1(\vec{p})e^{i\rho x_3} + \vec{d}_2(\vec{p})e^{-i\rho x_3} + R(x_3)\vec{f}(\vec{p})e^{-i\rho|x_3|}, \quad (21)$$

где $R(x_3)$ – диагональная матрица с элементами $R_{11}(x_3) = R_{22}(x_3) = 1$, $R_{33}(x_3) = \epsilon(x_3)$. Таким образом, воспользовавшись соотношениями (5), (21), мы получаем следующее представление решения уравнений Эйлера–Лагранжа для рассматриваемой модели:

$$\begin{aligned} \vec{A}(x) &= \frac{\theta(x_3)}{(2\pi)^{3/2}} 2 \operatorname{Re} \int \theta(p_0) \{ \vec{d}_1(\vec{p})e^{i(\vec{p}\vec{x} + \rho x_3)} + [\vec{d}_2(\vec{p}) + \vec{f}(\vec{p})]e^{i(\vec{p}\vec{x} - \rho x_3)} \} d\vec{p} + \\ &+ \frac{\theta(-x_3)}{(2\pi)^{3/2}} 2 \operatorname{Re} \int \theta(p_0) \{ [\vec{d}_1(\vec{p}) + T\vec{f}(\vec{p})]e^{i(\vec{p}\vec{x} + \rho x_3)} + \vec{d}_2(\vec{p})e^{i(\vec{p}\vec{x} - \rho x_3)} \} d\vec{p}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $T = R(-1)$ диагональная матрица с элементами $T_{11}(x_3) = T_{22}(x_3) = 1$, $T_{33}(x_3) = -1$. Первые слагаемые в подынтегральных выражениях в (22) описывают волны, движущиеся в отрицательном направлении третьей оси, а вторые – в положительном.

6. РАССЕЯНИЕ ВОЛН НА ПЛОСКОСТИ

Для задачи рассеяния волны с волновым вектором $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$, падающей на плоскость из полупространства с отрицательной координатой x_3 , мы должны иметь в полупространстве $x_3 > 0$ только проходящую волну, движущуюся от плоскости $x_3 = 0$ в положительном направлении третьей оси. Следовательно, в (22) мы должны положить $\vec{d}_1 = 0$. В результате получим

$$\begin{aligned} \vec{A}(x) = & \frac{\theta(x_3)}{(2\pi)^{3/2}} 2 \operatorname{Re} \int \theta(p_0) \vec{A}_{\text{tr}}(\vec{p}) e^{i(\vec{p}\vec{x} - \rho x_3)} d\vec{p} + \\ & + \frac{\theta(-x_3)}{(2\pi)^{3/2}} 2 \operatorname{Re} \int \theta(p_0) \{ \vec{A}_{\text{r}} e^{i(\vec{p}\vec{x} + \rho x_3)} + \vec{A}_{\text{in}} e^{i(\vec{p}\vec{x} - \rho x_3)} \} d\vec{p}, \end{aligned}$$

где векторные амплитуды $\vec{A}_{\text{in}}(\vec{p})$, $\vec{A}_{\text{r}}(\vec{p})$, $\vec{A}_{\text{tr}}(\vec{p})$ падающей, отраженной и проходящей волн записываются в виде

$$\vec{A}_{\text{in}}(\vec{p}) = \vec{d}_2(\vec{p}), \quad \vec{A}_{\text{r}}(\vec{p}) = T\vec{f}(\vec{p}), \quad \vec{A}_{\text{tr}}(\vec{p}) = \vec{d}_2(\vec{p}) + \vec{f}(\vec{p}) \quad (23)$$

и тем самым удовлетворяют соотношению

$$\vec{A}_{\text{r}} = T(\vec{A}_{\text{tr}} - \vec{A}_{\text{in}}). \quad (24)$$

Таким образом, векторная амплитуда отраженной волны получается из разности амплитуд падающей и проходящей волн изменением в ней знака у третьей компоненты. Из равенства (24) следует, что имеются только две независимые векторные амплитуды волн, которые определяют третью амплитуду.

7. СОБСТВЕННЫЕ МОДЫ

Собственными модами мы назовем волны, для которых амплитуды падающей и проходящей волн пропорциональны друг другу:

$$\vec{A}_{\text{tr}} = \lambda \vec{A}_{\text{in}}. \quad (25)$$

Для них из формул (24), (25) следует, что

$$\vec{A}_{\text{r}} = (\lambda - 1)T\vec{A}_{\text{in}}, \quad a_1 = \lambda d_2^{(1)}, \quad a_2 = \lambda d_2^{(2)}. \quad (26)$$

Воспользовавшись (19), (20), найдем соотношения, которым в силу двух последних равенств в (26) должны удовлетворять $d_2^{(1)}$, $d_2^{(2)}$:

$$\lambda d_2^{(1)} = \frac{a d_2^{(2)}(p_0^2 - p_1^2) + d_2^{(1)}(a p_1 p_2 + p_0 \rho)}{p_0 \rho(a^2 + 1)}, \quad (27)$$

$$\lambda d_2^{(2)} = -\frac{a d_2^{(1)}(p_0^2 - p_2^2) + d_2^{(2)}(a p_1 p_2 - p_0 \rho)}{p_0 \rho(a^2 + 1)}. \quad (28)$$

Данная система уравнений имеет ненулевые решения $d_2^{(1)}$, $d_2^{(2)}$, если

$$(a^2 + 1)\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет два решения

$$\lambda_1 \equiv \frac{i}{i-a}, \quad \lambda_2 \equiv \frac{i}{i+a}.$$

Таким образом, имеются две собственные моды, для которых

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1, & \vec{\mathcal{A}}_{\text{in}}^{(1)} &= g_1 \vec{V}_1, \\ \lambda &= \lambda_2, & \vec{\mathcal{A}}_{\text{in}}^{(2)} &= g_2 \vec{V}_2, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &\equiv (p_0^2 - p_1^2, -ip_0\rho - p_1p_2, ip_0p_2 - p_1\rho), \\ \vec{V}_2 &\equiv (p_0^2 - p_1^2, ip_0\rho - p_1p_2, -ip_0p_2 - p_1\rho) \end{aligned} \quad (30)$$

и g_1, g_2 – произвольные функции от p_0, p_1, p_2 . Используя эти обозначения, мы можем записать векторные амплитуды $\vec{\mathcal{A}}_{\text{in}}(\vec{p})$, $\vec{\mathcal{A}}_{\text{r}}(\vec{p})$, $\vec{\mathcal{A}}_{\text{tr}}(\vec{p})$ собственных мод падающей, отраженной и проходящей волн в следующем виде:

$$\vec{\mathcal{A}}_{\text{in}}^{(j)} = g_j(\vec{p})\vec{V}_j(\vec{p}), \quad \vec{\mathcal{A}}_{\text{r}}^{(j)} = g_j(\vec{p})K_{\text{r}}^{(j)}T\vec{V}_j(\vec{p}), \quad \vec{\mathcal{A}}_{\text{tr}}^{(j)} = g_j(\vec{p})K_{\text{tr}}^{(j)}\vec{V}_j(\vec{p}), \quad j = 1, 2.$$

Здесь мы использовали обозначения

$$K_{\text{r}}^{(1)} = \frac{ia + a^2}{1 + a^2}, \quad K_{\text{r}}^{(2)} = \frac{-ia + a^2}{1 + a^2}, \quad K_{\text{tr}}^{(1)} = \frac{1 - ia}{1 + a^2}, \quad K_{\text{tr}}^{(2)} = \frac{1 + ia}{1 + a^2}.$$

Полученные нами характеристики собственных мод удовлетворяют соотношениям $\vec{V}_2 = \vec{V}_1^*$, $K_{\text{tr}}^{(2)} = K_{\text{tr}}^{(1)*}$, $K_{\text{r}}^{(2)} = K_{\text{r}}^{(1)*}$.

8. РАССЕЯНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН

Выберем в качестве собственных мод плоские волны с векторными амплитудами $\vec{\mathcal{A}}_{\text{in}}^{(j)}(\vec{p}) = \vec{V}_j(\vec{p})$, $j = 1, 2$. Мы рассмотрим также их линейную комбинацию $\vec{\mathcal{A}}_{\text{in}} = C_1\vec{\mathcal{A}}_{\text{in}}^{(1)} + C_2\vec{\mathcal{A}}_{\text{in}}^{(2)}$ с коэффициентами C_1, C_2 . Для векторных амплитуд $\vec{\mathcal{A}}_{\text{r}}(\vec{p})$, $\vec{\mathcal{A}}_{\text{tr}}(\vec{p})$ отраженной и проходящей волн мы имеем

$$\vec{\mathcal{A}}_{\text{r}} = C_1K_{\text{r}}^{(1)}T\vec{V}_1 + C_2TK_{\text{r}}^{(1)*}\vec{V}_1^*, \quad \vec{\mathcal{A}}_{\text{tr}} = C_1K_{\text{tr}}^{(1)}\vec{V}_1 + C_2K_{\text{tr}}^{(1)*}\vec{V}_1^*. \quad (31)$$

Вектор $\vec{V}_1$ можно представить в виде

$$\vec{V}_1 = \vec{U}_1 + i\vec{U}_2, \quad \vec{U}_1 \equiv (p_0^2 - p_1^2, -p_1p_2, -p_1\rho), \quad \vec{U}_2 \equiv (0, -p_0\rho, p_0p_2),$$

поэтому

$$\begin{aligned} K_{\text{r}}^{(1)}\vec{V}_1 &= \frac{a}{1 + a^2}(\vec{Y}_1 + i\vec{Y}_2), & \vec{Y}_1 &\equiv a\vec{U}_1 - \vec{U}_2, & \vec{Y}_2 &\equiv a\vec{U}_2 + \vec{U}_1, \\ K_{\text{tr}}^{(1)}\vec{V}_1 &= \frac{1}{1 + a^2}(\vec{Z}_1 + i\vec{Z}_2), & \vec{Z}_1 &\equiv \vec{U}_1 + a\vec{U}_2 = \vec{Y}_2, & \vec{Z}_2 &\equiv \vec{U}_2 - a\vec{U}_1 = -\vec{Y}_1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{A}}_{\text{in}} &= (C_1 + C_2)\vec{U}_1 + i(C_1 - C_2)\vec{U}_2, \\ \vec{\mathcal{A}}_{\text{r}} &= \frac{a}{1 + a^2}[(C_1 + C_2)T\vec{Y}_1 + i(C_1 - C_2)T\vec{Y}_2], \\ \vec{\mathcal{A}}_{\text{tr}} &= \frac{1}{1 + a^2}[(C_1 + C_2)\vec{Z}_1 + i(C_1 - C_2)\vec{Z}_2]. \end{aligned} \quad (32)$$

Если положить

$$\kappa_1 = |C_1 + C_2|, \quad \kappa_2 = |C_1 - C_2|, \quad \phi_1 = -i \ln \frac{C_1 + C_2}{|C_1 + C_2|}, \quad \phi_2 = -i \ln \frac{C_2 - C_1}{|C_2 - C_1|},$$

то вектор-потенциалы рассматриваемых нами плоских волн запишутся в виде

$$\begin{aligned} \vec{A}_{\text{in}}(\bar{p}, x) &= \sigma \operatorname{Re} \vec{A}_{\text{in}}(\bar{p}) e^{i(\bar{p}\bar{x} - \rho x_3)} = \kappa_1 \alpha_{\text{in}} \vec{U}_1 - \kappa_2 \beta_{\text{in}} \vec{U}_2, \\ \vec{A}_{\text{r}}(\bar{p}, x) &= \sigma \operatorname{Re} \vec{A}_{\text{r}}(\bar{p}) e^{i(\bar{p}\bar{x} + \rho x_3)} = \kappa_1 \alpha_{\text{r}} T \vec{Y}_1 - \kappa_2 \beta_{\text{r}} T \vec{Y}_2, \\ \vec{A}_{\text{tr}}(\bar{p}, x) &= \sigma \operatorname{Re} \vec{A}_{\text{tr}}(\bar{p}) e^{i(\bar{p}\bar{x} - \rho x_3)} = \kappa_1 \alpha_{\text{tr}} \vec{Z}_1 - \kappa_2 \beta_{\text{tr}} \vec{Z}_2, \end{aligned}$$

где $\sigma \equiv 2(2\pi)^{-3/2}$,

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{in}} &= \sigma \cos(\bar{p}\bar{x} - \rho x_3 + \phi_1), & \beta_{\text{in}} &= \sigma \sin(\bar{p}\bar{x} - \rho x_3 + \phi_2), \\ \alpha_{\text{r}} &= \frac{a\sigma}{1+a^2} \cos(\bar{p}\bar{x} + \rho x_3 + \phi_1), & \beta_{\text{r}} &= \frac{a\sigma}{1+a^2} \sin(\bar{p}\bar{x} + \rho x_3 + \phi_2), \\ \alpha_{\text{tr}} &= \frac{a}{1+a^2} \alpha_{\text{in}}, & \beta_{\text{tr}} &= \frac{a}{1+a^2} \beta_{\text{in}}. \end{aligned}$$

В рассматриваемой нами калибровке напряженность электрического поля $\vec{E}$ совпадает с производной по x_0 от вектор-потенциала $\vec{A}$:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{in}} &= \sigma \operatorname{Re}(ip_0 \vec{A}_{\text{in}}(\bar{p}) e^{i(\bar{p}\bar{x} - \rho x_3)}) = -p_0(\kappa_1 \beta_{\text{in}} \vec{U}_1 + \kappa_2 \alpha_{\text{in}} \vec{U}_2), \\ \vec{E}_{\text{r}} &= \sigma \operatorname{Re}(ip_0 \vec{A}_{\text{r}}(\bar{p}) e^{i(\bar{p}\bar{x} + \rho x_3)}) = -p_0(\kappa_1 \beta_{\text{r}} T \vec{Y}_1 + \kappa_2 \alpha_{\text{r}} T \vec{Y}_2), \\ \vec{E}_{\text{tr}} &= \sigma \operatorname{Re}(ip_0 \vec{A}_{\text{tr}}(\bar{p}) e^{i(\bar{p}\bar{x} - \rho x_3)}) = -p_0(\kappa_1 \beta_{\text{tr}} \vec{Z}_1 + \kappa_2 \alpha_{\text{tr}} \vec{Z}_2). \end{aligned} \quad (33)$$

Магнитное поле вычисляется по формуле $\vec{H} = \vec{\partial} \times \vec{A}$, из которой непосредственно получается следующий результат:

$$\vec{H}_{\text{in}} = -\frac{\vec{P}_{\text{in}} \times \vec{E}_{\text{in}}}{p_0}, \quad \vec{H}_{\text{r}} = -\frac{\vec{P}_{\text{r}} \times \vec{E}_{\text{r}}}{p_0}, \quad \vec{H}_{\text{tr}} = -\frac{\vec{P}_{\text{tr}} \times \vec{E}_{\text{tr}}}{p_0}, \quad (34)$$

где $\vec{H}_{\text{in}}$, $\vec{H}_{\text{r}}$, $\vec{H}_{\text{tr}}$ – векторы напряженностей магнитного поля падающей, отраженной, проходящей волн и $\vec{P}_{\text{in}} = \vec{P}_{\text{tr}} = (p_1, p_2, \rho)$, $\vec{P}_{\text{r}} = (p_1, p_2, -\rho)$. Подставив в (34) векторы напряженностей электрических полей (33), получим

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{in}} &= p_0(\kappa_2 \alpha_{\text{in}} \vec{U}_1 - \kappa_1 \beta_{\text{in}} \vec{U}_2), \\ \vec{H}_{\text{r}} &= -p_0(\kappa_2 \alpha_{\text{r}} T \vec{Y}_1 - \kappa_1 \beta_{\text{r}} T \vec{Y}_2), \\ \vec{H}_{\text{tr}} &= p_0(\kappa_2 \alpha_{\text{tr}} \vec{Z}_1 - \kappa_1 \beta_{\text{tr}} \vec{Z}_2). \end{aligned}$$

Для интенсивностей I_{in} , I_{r} , I_{tr} падающей, отраженной и проходящей волн мы имеем следующие выражения:

$$I_{\text{in}} \equiv |\sigma \vec{A}_{\text{in}}(\bar{p}) e^{i(\bar{p}\bar{x} - \rho x_3)}|^2 = |\sigma \vec{A}_{\text{in}}(\bar{p})|^2, \quad I_{\text{r}} = |\sigma \vec{A}_{\text{r}}(\bar{p})|^2, \quad I_{\text{tr}} = |\sigma \vec{A}_{\text{tr}}(\bar{p})|^2.$$

Непосредственно из определений векторов $\vec{U}_j$, $\vec{Y}_j$, $\vec{Z}_j$ (31) и матрицы T получаем

$$\vec{U}_1 \vec{U}_2 = \vec{Y}_1 \vec{Y}_2 = \vec{Z}_1 \vec{Z}_2 = 0, \quad \vec{U}_1 \vec{U}_1 = \vec{U}_2 \vec{U}_2 = p_0^2(p_0^2 - p_1^2), \quad (35)$$

$$\vec{Y}_1 \vec{Y}_1 = \vec{Y}_2 \vec{Y}_2 = \vec{Z}_1 \vec{Z}_1 = \vec{Z}_2 \vec{Z}_2 = p_0^2(p_0^2 - p_1^2)(1 + a^2), \quad T T^T = T^2 = 1. \quad (36)$$

В силу (32), (35), (36) имеем

$$I_r = \frac{a^2}{1+a^2} I_{in}, \quad I_{tr} = \frac{1}{1+a^2} I_{in}.$$

Следовательно, коэффициенты отражения $K_r \equiv I_r/I_{in}$ и прохождения $K_{tr} \equiv I_{tr}/I_{in}$ плоской волны при ее рассеянии на плоскости не зависят от частоты, угла падения и выражаются через константу a взаимодействия электромагнитного поля с поверхностью, характеризующую свойства ее материала:

$$K_r = \frac{a^2}{1+a^2}, \quad K_{tr} = \frac{1}{1+a^2}.$$

Рассмотрим движения волн вдоль оси x_3 . В этом случае $p_1 = p_2 = 0$, $\rho = p_0$ и

$$\begin{aligned} \vec{E}_{in} &= p_0^3(-\kappa_1\beta_{in}, \kappa_2\alpha_{in}, 0), \\ \vec{E}_{tr} &= \frac{p_0^3}{1+a^2}(-\kappa_1\beta_{in} + \kappa_2\alpha_{in}a, \kappa_2\alpha_{in} + \kappa_1\beta_{in}a, 0), \\ \vec{E}_r &= \frac{ap_0^3}{1+a^2}(-\kappa_1\beta_r a - \kappa_2\alpha_r, \kappa_2\alpha_r a - \kappa_1\beta_r, 0). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\vec{E}_{tr} = \frac{1}{1+a^2} \vec{E}_{in} + \frac{a}{1+a^2} \vec{Q}, \quad \vec{Q} \equiv p_0^3(\kappa_2\alpha_{in}, \kappa_1\beta_{in}, 0),$$

а при замене в $\vec{E}_r$ знака величины x_3 на противоположный

$$\vec{E}_r = \frac{a^2}{1+a^2} \vec{E}_{in} - \frac{a}{1+a^2} \vec{Q}.$$

Мы видим, что при рассеянии волны, которая движется перпендикулярно плоскости, кроме обычных для процесса рассеяния волн, возникают волны с повернутым на угол $\pi/2$ вектором напряженности электрического поля ($\vec{E}_{in}\vec{Q} = 0$).

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели задачу рассеяния электромагнитной волны на плоскости. В рамках модели со взаимодействием Черна–Саймонса двумерной поверхности с фотонным полем в калибровке $A_0 = 0$ получено решение модифицированных уравнений Максвелла, содержащее безразмерный параметр, который описывает свойства материала рассеивающей электромагнитные волны плоскости. Мы построили в явном виде две линейно независимые собственные моды задачи рассеяния, для которых вектор-потенциалы отраженной и проходящей волн в комплексной форме получаются из вектор-потенциала падающей волны умножением на комплексные числа. Получены вектор-потенциалы, электрическое и магнитное поля отраженной и проходящей волн для случая рассеяния плоской волны произвольной поляризации. Коэффициенты прохождения и отражения оказались не зависящими от энергии падающей волны и угла падения. Нами был рассмотрен случай распространения волн в направлении, ортогональном плоскости. Обнаружен поворот вектора поляризации на угол, близкий к $\pi/2$, у отраженной волны, исчезающей при малой константе

взаимодействия плоскости с электромагнитным полем. Вектор поляризации исчезающей в пределе бесконечной константы взаимодействия проходящей волны также оказался повернутым по отношению к вектору падающей волны на угол $\pi/2$. Эти эффекты аналогичны спонтанному нарушению симметрии, при котором нарушающее симметрии внешнее воздействие приводит к изменениям состояния системы, не исчезающим в пределе уменьшения данного воздействия до сколь угодно малой величины. Полученные результаты позволяют надеяться на возможность экспериментальной проверки модели взаимодействия полей КЭД с макроскопическими объектами и определения на основе экспериментальных данных параметров, характеризующих свойства материала.

Список литературы

- [1] H. B. G. Casimir, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, **51** (1948), 793–795.
- [2] U. Mohideen, A. Roy, *Phys. Rev. Lett.*, **81**:21 (1998), 4549–4552, arXiv: physics/9805038; A. Roy, C.-Y. Lin, U. Mohideen, *Phys. Rev. D*, **60**:11 (1999), 111101(R), 5 pp., arXiv: quant-ph/9906062.
- [3] B. W. Harris, F. Chen, U. Mohideen, *Phys. Rev. A*, **62**:5 (2000), 052109, 5 pp.
- [4] G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio, G. Ruoso, *Phys. Rev. Lett.*, **88**:4 (2002), 041804, 4 pp., arXiv: quant-ph/0203002.
- [5] K. A. Milton, *J. Phys. A*, **37**:38 (2004), R209–R277, arXiv: hep-th/0406024.
- [6] V. N. Markov, Yu. M. Pis'mak, *J. Phys. A*, **39**:21 (2006), 6525–6532, arXiv: hep-th/0606058.
- [7] V. N. Marachevsky, Yu. M. Pis'mak, *Phys. Rev. D*, **81** (2010), 065005, 6 pp., arXiv: 0907.1985.