Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Налимов, В. А. Сергеев, Исследование асимптотик высоких порядков квантово-полевых разложений в теории двумерной развитой турбулентности, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 1, 79–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6710>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 18:16:49

© 2011 г.

М. Ю. Налимов*, В. А. Сергеев*

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИК ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ КВАНТОВО-ПОЛЕВЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ТЕОРИИ ДВУМЕРНОЙ РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

На основе упрощенной $(0 + 1)$ -мерной теории разработаны подходы, которые могут быть полезны при исследовании асимптотик высоких порядков квантово-полевых разложений в двумерной теории развитой турбулентности. В теории развитой турбулентности рассмотрена асимптотика малых времен корреляционной функции. Выведено и исследовано уравнение стационарности. Обосновано предположение, что в данном пределе ряды теории возмущений имеют конечный радиус сходимости.

Ключевые слова: развитая турбулентность, инстантон, ренормализационная группа, стохастическая динамика.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование асимптотик высоких порядков (АВП) квантово-полевых разложений позволяет определить характер поведения рядов теории возмущений и существенно улучшить результаты вычислений путем подходящего пересуммирования сосчитанных отрезков соответствующих рядов. Методами инстантонного анализа эти исследования были проведены в конце прошлого века практически для всех моделей квантовой теории поля и для статических моделей критического поведения [1]. Однако в динамических моделях статистической физики, где основой являются стохастические уравнения Ланжевена, асимптотики квантово-полевых разложений часто неизвестны. К настоящему времени исследовано лишь поведение разложений в достаточно простых моделях турбулентной диффузии Обухова–Крейчнана [2] (где возможен переход к так называемым лагранжевым переменным) и в стохастических моделях критической динамики, приводящих на больших временах к равновесному критическому поведению. В последнем классе моделей динамический “инстантон” был построен на основе известного статического инстантона [3].

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: mikhail.nalimov@pobox.spbu.ru, vladimir.sergeev@gmail.com

Для несжимаемой, однородной и изотропной жидкости стохастическое уравнение Навье–Стокса имеет вид

$$\partial_t v_i(t, x) + g P_{ik} (v \partial) v_k(t, x) - \nu \partial^2 v_i(t, x) = \xi_i(t, x), \quad (1)$$

где $v(t, x)$ – поперечное ($\partial v \stackrel{\text{def}}{=} \partial_m v_m = 0$) поле скорости, ν – кинематическая вязкость, $\xi(t, x)$ – поперечная внешняя случайная сила в расчете на единицу массы. Для $\xi(t, x)$ предполагается гауссово распределение с нулевым средним и заданным коррелятором $\langle \xi_i(t, x) \xi_j(t', x') \rangle \stackrel{\text{def}}{=} D_{ij}(t - t', x - x')$ вида

$$D_{ij}(t - t', x - x') = \delta(t - t') (2\pi)^{-d} \int dk P_{ij}(k) N(k) e^{ik(x - x')},$$

где $P_{ij}(k) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ – поперечный проектор, $N(k) = D_0 k^\alpha$ – так называемая функция накачки, d – размерность пространства.

Данная модель служит основой ренормгруппового (РГ) подхода в исследовании развитой турбулентности [4]. Параметр α позволяет сделать модель логарифмической и построить регулярное разложение по отклонению от логарифмичности. В двумерном пространстве логарифмической теории соответствует значение $\alpha = 2$. При этом, если выбрать, вообще говоря, произвольный коэффициент в функции накачки $D_0 = 2\nu$, рассматриваемая теория имеет статический предел – максвелловскую функцию распределения $e^{-v^2/2}$ [4].

Двумерная теория развитой турбулентности интересна в плане исследований АВП разложений тем, что в ней существует статический предел, но в отличие от моделей критической динамики [3], статический инстантон отсутствует. Поведение рядов теории возмущений в моделях развитой турбулентности ранее не исследовалось, многие авторы (см., например, [5]) полагают эти ряды расходящимися исходя лишь из аналогии с исследованными статическими моделями. Однако нами было показано, что инстантонный анализ поведения рядов в двумерной турбулентности сталкивается с отсутствием решения уравнения стационарности – динамического “инстантона”.

Поскольку задача инстантонного исследования рядов в данной модели оказалась достаточно сложной, была изучена упрощенная $(0+1)$ -мерная модель, описываемая стохастическим уравнением

$$\partial_t \varphi_i(t) + \nu \varphi_i(t) + g \varphi^2(t) \varepsilon_{im} \varphi_m(t) = \xi_i(t), \quad (2)$$

где φ и ξ – двухкомпонентные векторные поля, зависящие только от времени. Для случайной силы ξ задано гауссово распределение с коррелятором $\langle \xi_i(t) \xi_m(t') \rangle = 2\nu \delta_{im} \delta(t - t')$, ν – некоторый параметр, обеспечивающий затухание корреляционных функций на бесконечности, ε_{ij} – антисимметричный тензор с компонентами ± 1 , начальное условие есть $\varphi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$, здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам и, где необходимо, интегрирование по непрерывным аргументам. Данная модель похожа на модель двумерной развитой турбулентности тем, что в ней также имеется статический предел, определяемый равновесной функцией распределения $e^{-S_{\text{st}}}$, $S_{\text{st}} = \varphi^2/2$, и также отсутствует статический инстантон.

Для этой модели был проведен анализ АВП разложений, основанный на поиске решений уравнений стационарности в классе негладких функций с последующим численным анализом не подлежащих исследованию интегралов по граничным значениям методом стационарной фазы. Показана существенная неоднородность АВП по аргументам корреляционных функций. Данная методика анализа может быть применена в двумерной теории развитой турбулентности, но приводит к значительным техническим сложностям.

В рамках упрощенной модели, используя факт существования статической функции распределения, удалось точно определить АВП разложений корреляционных функций в пределе малых времен. Показано, что при этом ряды теории возмущений имеют конечный радиус сходимости, несмотря на то что число диаграмм для корреляционных функций растет факториально с ростом порядка теории возмущений.

Аналогичный анализ (в асимптотике малых времен) был развит для модели двумерной развитой турбулентности. В этой модели задача не допускает точного решения. АВП предложено искать методом инстантонного анализа в полученной эффективной статической модели.

Выведено интегральное уравнение на инстантон. Показано, что ряды теории возмущений в данной области имеют конечный радиус сходимости при условии существования решения полученного уравнения. Исследованы асимптотики больших и малых импульсов решения предъявленного уравнения, показано, что они не запрещают существования решения. Исследована зависимость АВП от параметра обрезания в предположении существования решения, показано, что она совпадает с анализом диаграмм прямой теории возмущений. Проведенное исследование позволяет заключить, что ряды теории возмущений в теории развитой двумерной турбулентности в асимптотике малых времен имеют конечный радиус сходимости.

2. ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ

В формализме Мартина–Сиггиа–Розе (MCP) [6] уравнение (2) сводится к квантово-полевой модели с удвоенным числом полей φ , φ' и функционалом действия

$$S(\varphi, \varphi') = \frac{(\varphi')^2}{2} + \varphi'(\partial_t \varphi + \nu \varphi + g \varphi^2 \varepsilon \varphi).$$

Используя предложенный в работе [7] метод, несложно установить, что инстантон (решение уравнений стационарности) в данной модели отсутствует в классе гладких интегрируемых функций.

Для исследования АВП теории возмущений, например корреляционной функции $C_{ij}(T) = \langle \varphi_i(0) \varphi_j(T) \rangle$, в данной модели используем вычисление коэффициента методом стационарной фазы при N -м члене разложения по g [8]:

$$C_{ij}^{[N]}(T) = \frac{1}{2\pi i \mathcal{Z}} \oint \frac{dg}{g} \int D\varphi D\varphi' \varphi_i(0) \varphi_j(T) e^{S - N \ln g},$$

где нормировочный множитель

$$\mathcal{Z} = \int D\varphi D\varphi' e^{S|_{g=0}}.$$

Большой параметр (N) выделяется в показателе экспоненты путем масштабных преобразований $\{\varphi, \varphi'\} \rightarrow \{\sqrt{N} \varphi, \sqrt{N} \varphi'\}$, $g \rightarrow g/N$.

Система уравнений стационарности имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \varphi_i} &= 0 \quad \Rightarrow \quad -\partial_t \varphi'_i + \nu \varphi'_i + 2g \varphi_i \varphi'_k \varepsilon_{kl} \varphi_l + g \varphi^2 \varphi'_k \varepsilon_{ki} = 0, \\ \frac{\delta S}{\delta \varphi'_j} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t \varphi_j + \varphi'_j + \nu \varphi_j + g \varphi^2 \varepsilon_{jk} \varphi_k = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial g} &= \frac{1}{g} \quad \Rightarrow \quad g \int dt \varphi'_k \varepsilon_{kl} \varphi_l \varphi^2 = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Для рассматриваемой простой модели данная система допускает аналитическое решение. Обозначим $x = \varphi_l \varphi_l$, $y = \varphi'_l \varphi'_l$, $z = \varphi_l \varphi'_l$.

Воспользовавшись свойством антисимметрии тензора ε , а также выражениями для производных $\partial_t \varphi_l$, $\partial_t \varphi'_l$ (3), легко получить следующую систему уравнений, определяющую динамику величин x , y и z :

$$\frac{dx}{dt} = -2z - 2\nu x, \quad \frac{dy}{dt} = 2\nu y + 4g\mathcal{C}z, \quad \frac{dz}{dt} = -y + 2g\mathcal{C}x, \quad (4)$$

где величина $\mathcal{C}$ – постоянная, определяемая интегралом движения системы: $\varphi'_k \varepsilon_{ki} \varphi_i = \text{const} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}$.

Для общего решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (4) имеем

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 e^{-\lambda t} + a_2 e^{\lambda t}, \\ y &= 2g\mathcal{C}a_0 + 2g\mathcal{C} \frac{\nu - \lambda/2}{\nu + \lambda/2} a_1 e^{-\lambda t} + 2g\mathcal{C} \frac{\nu + \lambda/2}{\nu - \lambda/2} a_2 e^{\lambda t}, \\ z &= -\nu a_0 - \left(\nu - \frac{\lambda}{2}\right) a_1 e^{-\lambda t} - \left(\nu + \frac{\lambda}{2}\right) a_2 e^{\lambda t}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\lambda = 2\sqrt{\nu^2 - 2g\mathcal{C}}$. Используя очевидное соотношение $z^2 = xy - \mathcal{C}^2$, получим связь на параметры решения $a_1 a_2 = a_0^2/4 + \mathcal{C}^2/\lambda^2$. Таким образом, только два из трех коэффициентов $\{a_i\}$ оказываются по-настоящему независимыми. Начальное условие обеспечивает $\mathcal{C} = 0$, что согласно (5) приводит к тривиальному результату: $x = y = z = 0$, нетривиальное решение уравнений стационарности, как и утверждалось ранее, не существует. В таком случае система (3) несовместна.

Будем искать решения уравнений стационарности в классе негладких функций аналогично [9]. Разобьем область интегрирования по t на интервалы $(-\infty, 0]$ и $[0, T]$ (заметим, что T – максимальное время во всех диаграммах теории возмущений) и представим корреляционную функцию в виде

$$C_{ij}^{[N]}(T) \approx \frac{1}{2\pi i \mathcal{Z}} \int d^2 \varphi(0) d^2 \varphi(T) \varphi_i(0) \varphi_j(T) \int D\bar{\varphi} D\varphi' e^{\bar{S}} \oint \frac{dg}{g^{N+1}} \int D\hat{\varphi} D\hat{\varphi}' e^{\hat{S}},$$

по определению $\bar{S}$ – функционал от поля $\hat{\varphi}$, в котором интегрирование по t проводится на интервале $(-\infty; 0)$, а для $\hat{S}$ – на интервале $(0; T)$. Символы $\bar{x}$ и $\hat{x}$ в дальнейшем обозначают принадлежность переменной x к определенным временным интервалам. Начальное условие обеспечивает $\bar{\mathcal{C}} = 0$.

Вместо вычисления методом стационарной фазы контурного интеграла по g воспользуемся (см. [1]) непосредственным разложением в ряд по g , исследуемая функция при этом приобретает вид

$$\frac{1}{N! \mathcal{Z}} \int d^2\varphi(0) d^2\varphi(T) d^2\varphi_i(0) \varphi_j(T) \hat{\sigma}^N \int D\bar{\varphi} D\bar{\varphi}' e^{\bar{S}_0} \times \\ \times \int D\hat{\varphi} D\hat{\varphi}' \exp\left(\hat{S}_0 + N \ln \left| \int_0^T dt \hat{\varphi}^2 \hat{\varphi}'_l \varepsilon_{lm} \hat{\varphi}_m \right| \right),$$

где

$$\hat{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \text{sign} \left(\int_0^T dt \hat{\varphi}^2 \hat{\varphi}'_l \varepsilon_{lm} \hat{\varphi}_m \right).$$

Уравнения стационарности данной теории после замены переменных

$$\{\varphi, \varphi', \bar{\varphi}, \bar{\varphi}', \hat{\varphi}, \hat{\varphi}'\} \rightarrow \sqrt{N} |\hat{I}_s|^{-1/2} \cdot \{\psi, \psi', \bar{\psi}, \bar{\psi}', \hat{\psi}, \hat{\psi}'\},$$

где

$$\hat{I}_s \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T dt \hat{\psi}^2 \hat{\psi}'_l \varepsilon_{lm} \hat{\psi}_m,$$

сводятся к уравнениям (3) (без последнего уравнения, с заменой g на $\hat{\sigma}$). Инстантонное решение для основного поля ищем в классе непрерывных функций $\bar{\varphi}|_{t=0} = \hat{\varphi}|_{t=0}$, тогда $\bar{z}|_{t=0} = -2\nu(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2)$. Оставшиеся интегралы по граничным значениям $\varphi(0)$, $\varphi(T)$, по-видимому не оцениваемые методом стационарной фазы, имеют вид

$$\frac{N^{2N+1}}{N! \mathcal{Z}} \int d^2\psi(0) d^2\psi(T) \psi_i(0) \psi_j(T) |\hat{I}_s|^{-1} \hat{\sigma}^N \times \\ \times \exp\left(N \frac{\hat{z}|_{t=T} - \hat{z}|_{t=0} + \bar{z}|_{t=0}}{2|\hat{I}_s|} + N\hat{\sigma} - N \ln |\hat{I}_s| \right)$$

(использовано условие $\bar{z}|_{t=-\infty} = 0$) и вычисляются с учетом непрерывности основного поля φ и вращательной инвариантности модели. Положим $\hat{x}|_{t=0} = x|_{t=0} \stackrel{\text{def}}{=} x_0$, $\hat{x}|_{t=T} = x|_{t=T} \stackrel{\text{def}}{=} x_T$, $\theta|_{t=0} = 0$, $\theta|_{t=T} = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (использованы полярные координаты $\bar{\varphi}_1(t) = \sqrt{\bar{x}(t)} \cos \theta(t)$, $\bar{\varphi}'_1(t) = \sqrt{\bar{y}(t)} \cos \theta'(t)$, $\bar{\varphi}_2(t) = \sqrt{\bar{x}(t)} \sin \theta(t)$, $\bar{\varphi}'_2(t) = \sqrt{\bar{y}(t)} \sin \theta'(t)$). Динамическое уравнение на угол имеет вид

$$\theta(t) = \int_0^t dt \frac{\widehat{C} + \hat{\sigma} \hat{\varphi}^4(t)}{\hat{\varphi}^2(t)}.$$

При $t = T$ оно определяет уравнение на $\widehat{\mathcal{C}}$:

$$\arctg \frac{\hat{\lambda}(2\hat{a}_2 e^{\hat{\lambda}T} + \hat{a}_0)}{2\widehat{\mathcal{C}}} - \arctg \frac{\hat{\lambda}(2\hat{a}_2 + \hat{a}_0)}{2\widehat{\mathcal{C}}} + \\ + \hat{\sigma} \left(\frac{\hat{a}_1}{\hat{\lambda}} (1 - e^{-\hat{\lambda}T}) - \frac{\hat{a}_2}{\hat{\lambda}} (1 - e^{\hat{\lambda}T}) + \hat{a}_0 T \right) = \pi k. \quad (6)$$

Выражая коэффициенты $\hat{a}_i$ через x_0 , x_T и $\hat{\mathcal{C}}$, получим

$$\begin{aligned}\hat{a}_2 &= \frac{x_0 + x_1 e^{-\hat{\lambda}T}}{e^{\hat{\lambda}T} - 1} + 2\sqrt{\frac{x_1 x_0}{e^{-\hat{\lambda}T} + e^{\hat{\lambda}T} - 2} - \frac{\hat{\mathcal{C}}^2}{\hat{\lambda}^2}} (1 - e^{\hat{\lambda}T})^{-1}, \\ \hat{a}_1 &= \hat{a}_2 + x_0 + 2\sqrt{\hat{a}_2 x_0 - \frac{\hat{\mathcal{C}}^2}{\hat{\lambda}^2}}, \quad \hat{a}_0 = x_0 - \hat{a}_1 - \hat{a}_2,\end{aligned}\tag{7}$$

где $\hat{\lambda} = 2\sqrt{\nu^2 - 2\hat{\sigma}\hat{\mathcal{C}}}$. Таким образом, асимптотика $C_{11}^{[N]}(T)$ дается выражением

$$\begin{aligned}C_{11}^{[N]}(T) &\approx \frac{N^{2N+1} \sigma^N e^{N\sigma}}{N! \mathcal{Z}} \int dy_0 dy_T d\theta'_0 d\theta'_T y_0^{1/2} y_T^{1/2} \times \\ &\times \int dx_0 dx_T d\theta_0 d\theta_T x_0 x_T |\hat{I}_s|^{-1} e^{Nf(x_0, x_T, \hat{\mathcal{C}})},\end{aligned}\tag{8}$$

где функция f представляет собой приведенный ранее показатель экспоненты в переменных x_0 , x_T и $\hat{\mathcal{C}}$. При этом $\hat{I}_s = \hat{\mathcal{C}} \int_0^T x(t) dt$, а константа $\hat{\mathcal{C}}$ определяется из трансцендентного уравнения (6), которое решалось численно.

Численный анализ показывает, что максимум функции f реализуется на границе области определения, т. е. при $x_T x_0 \cong \hat{\mathcal{C}}^2 e^{\hat{\lambda}T} (e^{-\hat{\lambda}T} - 1)^2 / \hat{\lambda}^2$. В результате проведенного численного исследования установлено, что асимптотика исследуемой корреляционной функции имеет вид $N! N^a e^{N(f_{\text{st}}(T))} \cdot \text{const}$, т. е. ряды теории возмущений асимптотические (с нулевым радиусом сходимости), хотя следует заметить, что АВП данных рядов существенно неравномерна по T . Очевидно, $f_{\text{st}}(T) \rightarrow -\infty$ при $T \rightarrow 0$, что требует дополнительного исследования данной области.

3. СТАТИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ ПРОСТОЙ МОДЕЛИ

Неравномерность АВП по T приводит нас к необходимости особо исследовать область малых T . Рассматриваемая модель имеет статический предел ($e^{-S_{\text{st}}}$). Воспользуемся этим свойством при вычислении АВП корреляционной функции $C_{ij}(T)$ при малых $T \sim 0$. Для этого разложим $\varphi_j(T)$ в ряд при малом T , а затем подставим в выражение для парной корреляционной функции:

$$C_{ij}(T) = \langle \varphi_i(0) \varphi_j(T) \rangle = \left\langle \varphi_i(0) \left(\varphi_j(0) + \frac{d\varphi_j(T)}{dT} \Big|_{T=0} T + \dots \right) \right\rangle.$$

Вклад любого члена разложения в рассматриваемую корреляционную функцию является уже объектом равновесной статической теории, усредненным со статической функцией распределения. Наша цель – получить асимптотическую оценку $C_{ij}^{[N]}(T)$ при $N \gg 1$. Для этого необходимо выделить главный по N вклад в коэффициент при g^N . Например, вклад первой производной по времени от $\varphi(T)$ есть

$$\langle \varphi_i \partial_t \varphi_j \rangle = -\nu \langle \varphi_i \varphi_j \rangle - g \langle \varphi_i \varepsilon_{jk} \varphi_k \varphi^2 \rangle + \langle \varphi_i \xi_j \rangle,$$

где $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(0)$, $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\xi}(0)$.

Отметим, что член $\langle \varphi_i \xi_j \rangle$ является поправкой $\sim g^0$ для рассматриваемого вклада в корреляционную функцию. Первое слагаемое $-\nu \langle \varphi_i \varphi_j \rangle$ также является поправкой $\sim g^0$, так как одновременная функция Грина определяется статикой, действие S_{st} не зависит от g . Таким образом, в главном (g^1) порядке имеем $C_{ij}^{[1]}(T) \cong$

$-\langle \varphi_i \varepsilon_{jk} \varphi_k \varphi^2 \rangle$. В следующем порядке разложения по T в выражении для $C_{ij}^{[2]}(T)$ присутствует член $\langle \varphi_i \partial_t \xi_j \rangle$, содержащий $\delta(0)$, а в следующих порядках возникают производные δ -функций в нуле. Их происхождение несложно понять, если вспомнить, что, например, свободная корреляционная функция модели имеет зависимость от $|T|$, поэтому в ее разложении по времени и появляются эти сингулярные члены. Если доопределять корреляционную функцию по непрерывности из области $T > 0$, все эти сингулярные члены следует доопределить нулем.

Итерируя уравнение (2), несложно заметить, что вклад высокого порядка g^N появляется лишь в N -м члене разложения по T , для него справедливо

$$C_{ij}^{[N]}(T) \cong (-1)^N \langle \varphi_i \varepsilon_{jm_1} \varepsilon_{m_1 m_2} \dots \varepsilon_{m_{N-1} m_N} \varphi_{m_N} (\varphi^2)^N \rangle_{\text{st}} T^N,$$

где индексом st указано, что среднее берется со статическим весом $e^{-S_{\text{st}}}$. После свертки по повторяющимся индексам и интегрированию по полю φ с гауссовым весом S_{st} получаем для АВП парной корреляционной функции

$$C_{ij}^{[2N]}(T) \sim (-1)^N \nu^{-1} (2N+1) \left(\frac{T}{\nu} \right)^{2N}.$$

Заметим, что в рассматриваемой асимптотике ряды теории возмущений исследуемой модели имеют конечный радиус сходимости.

4. ИНСТАНТОННЫЙ АНАЛИЗ В ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Стохастическая модель (1) приводит к теории МСР с действием

$$S = \nu v' \Delta v' + v'_i [\partial_t v_i + g P_{ij} v_l \partial_l v_j - \nu \Delta v_i].$$

Например, нас интересует АВП функции $G_{ij}(T, x - y) \stackrel{\text{def}}{=} \langle v_i(0, x) v_j(T, y) \rangle$. Уравнения стационарности в данной модели имеют вид

$$\begin{aligned} 2\nu \Delta v'_i + \partial_t v_i + g P_{ij} v_l \partial_l v_j - \nu \Delta v_i &= 0, \\ \partial_t v'_i + g P_{ij} v_l \partial_l v'_j + g P_{ij} v_l \partial_j v'_l - \nu \Delta v'_i &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Методом, предложенным в работе [7], несложно показать, что данные уравнения имеют только тривиальное решение в классе гладких интегрируемых функций, поэтому обычный инстантонный анализ в данной задаче неприменим. Развитый ранее метод ломаных экстремалей технически сложно применить в данной задаче, поскольку аналитические решения системы (9) неизвестны. Поэтому мы ограничились исследованием АВП квантово-полевых разложений корреляционной функции в пределе малых T , аналогично анализу, проведенному для простой модели в предыдущем разделе.

Итерируя уравнение (1), выразим главный, содержащий g^N вклад в $\bar{v} \equiv \frac{\partial^N v}{\partial T^N} \Big|_{T=0}$. Отметим, что если бы уравнение (1) было локальным (без поперечного проектора), то задача решалась бы очень просто. В ведущем порядке по g

$$\frac{\partial^N v_i(T)}{\partial T^N} \Big|_{T=0} \approx g^N \partial_{l_1} \dots \partial_{l_N} v_{l_1} \dots v_{l_N} v_i,$$

и тем самым

$$\left\langle \frac{v \partial^N v}{\partial T^N} \right\rangle \bigg|_{T=0} \frac{1}{N!} \sim (gT)^N \frac{(N+1)!!}{N!},$$

что обеспечивает бесконечный радиус сходимости.

Нелокальный характер задачи существенно усложняет исследование АВП. Несложно убедиться, что $\bar{v}$ является итерационным решением статического уравнения

$$\bar{v}_i(y) = v_i(y) - gP_{ik}(\bar{v}\partial)\bar{v}_k(y). \quad (10)$$

Итак, задача свелась к определению АВП статической корреляционной функции $\langle v(\mathbf{x})\bar{v}(\mathbf{y}) \rangle$; напомним, что в равновесии усреднение ведется с весом $e^{-v^2/2}$. Применяв стандартный прием вывода действия теории МСР [4], в данном статическом случае можно написать

$$\langle v(\mathbf{x})\bar{v}(\mathbf{y}) \rangle = \int Dv v(\mathbf{x})\bar{v}(\mathbf{y})e^{-v^2/2} = \int Dv D\bar{v} v(\mathbf{x})\bar{v}(\mathbf{y})e^{-v^2/2} \delta(\bar{v} - v + gP(\bar{v}\partial)\bar{v}) \det M,$$

где $M = \delta(\bar{v} - v + g(P(\bar{v}\partial)\bar{v}))/\delta\bar{v}$. После интегрирования по полю v остается исследовать

$$\langle v(\mathbf{x})\bar{v}(\mathbf{y}) \rangle = \int D\bar{v} (\bar{v}(\mathbf{x}) + gP(\bar{v}(\mathbf{x})\partial)\bar{v}(\mathbf{x}))\bar{v}(\mathbf{y})e^{-S}$$

с действием

$$S = (\bar{v} + gP(\bar{v}\partial)\bar{v})(\bar{v} + gP(\bar{v}\partial)\bar{v}). \quad (11)$$

В отличие от рассмотренной ранее простой модели, проблема определения АВП в данной статической теории нетривиальна. Используя метод работы [7], несложно установить, что нетривиальное решение уравнения стационарности $\delta S/\delta\bar{v}$ в естественном классе функций отсутствует и в этой статической модели.

Тем не менее мы собираемся применить инстантонный анализ для решения данной проблемы, используя решение уравнения стационарности из класса обобщенных функций. Чтобы оправдать законность применения такой операции, рассмотрим очередную точно решаемую модель с действием вида $S = \phi^2/2 + g\phi^4/4!$. Отметим, что квадратичный член данного действия не содержит пространственных производных, как и в исследуемой модели (11), что в данном случае приводит к локальности рассматриваемых корреляционных функций. Пропэгатор теперь есть просто $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, при вычислении диаграмм появляются члены $\delta(0)$, требующие введения регуляризации. В качестве последней используем симметричное обрезание по импульсам параметром Λ . Теперь любая диаграмма, например для парной корреляционной функции, легко вычисляется и дает $\kappa\Lambda^{nd}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, где κ – симметричное число диаграммы, d – размерность пространства, n – число петель в диаграмме.

Уравнение стационарности для этой модели имеет вид $\phi(x) + g\phi^3(x)/6 = 0$. Нетривиальное решение $\phi_{\text{st}} = \sqrt{-6/g}$ не принадлежит классу интегрируемых функций и не решает проблему АВП. Попробуем найти решение этого уравнения стационарности, предположив $\phi_{\text{st}} \sim \delta(x - x_0)$ (произвол x_0 , как обычно, является следствием трансляционной инвариантности). Такое решение удобнее искать в импульсном представлении. Преобразование Фурье для уравнения стационарности дает интегральное уравнение с очевидным решением указанного выше вида $\phi_{\text{st}}(\mathbf{p}) =$

$\sqrt{-6/g}/\Lambda^d$. Несложно убедиться, что такое решение позволяет правильно определить характер поведения рядов теории возмущений для корреляционной функции в этой модели и их зависимость от регуляризатора Λ .

Воспользуемся этим подходом в модели (11). Уравнения стационарности в импульсном представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{v}_i(\mathbf{p}) = g^2 P_{ij}(\mathbf{p}) \int d\mathbf{q} \bar{v}_n(\mathbf{p} - \mathbf{q}) i q_j P_{nk}(\mathbf{q}) \int d\mathbf{k} v_m(\mathbf{q} - \mathbf{k}) i k_m v_k(\mathbf{k}) + g^2 P_{ij}(\mathbf{p}) \times \\ \times \int d\mathbf{q} \bar{v}_m(\mathbf{p} - \mathbf{q}) i q_m P_{jk}(\mathbf{q}) \int d\mathbf{k} v_l(\mathbf{q} - \mathbf{k}) i k_l v_k(\mathbf{k}), \quad \frac{\partial S}{\partial g} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В нелинейном интегральном уравнении во всех интегралах по импульсам предполагается обрезание параметром Λ . Существование зависимости от Λ исследуемой АВП функции $\partial^N C_{ij}(T)/\partial T|_{T=0}$ в модели (1) легко проверяется в обыкновенной теории возмущений. В работе [10] была предпринята попытка решения аналогичного уравнения (динамического) в области малых волновых чисел p . Отметим, что такое решение в нашем случае не позволяет решить поставленную задачу, поскольку разложение реально ведется по параметру p/Λ , все члены этого разложения дают вклады одного порядка на верхнем пределе интегралов по волновому числу как в интегральном уравнении (12), так и во входящие в $S(\bar{v}_{\text{st}})$ интегралы. Рассмотрим, тем не менее, асимптотики возможного решения данного уравнения.

Будем искать решение в виде $\bar{v}_i(\mathbf{p}) = P_{ij}(\mathbf{p}) f_j(\mathbf{p})$. При малых импульсах p уравнение (12) принимает вид

$$P_{ij}(\mathbf{p}) f_j(\mathbf{p}) = g^2 P_{ij}(\mathbf{p}) \int d\mathbf{q} P_{lm}(\mathbf{q}) q_j f_m(\mathbf{q}) P_{ln}(\mathbf{q}) F_n(\mathbf{q}), \quad (13)$$

где $F_n(\mathbf{k}) = (\partial_k v_n v_k)(\mathbf{k})$ (отметим, что в выражение для F дают вклады все члены разложения функций f по k/Λ). Предполагая обрезание сферически-симметричным, отметим, что решение требует нарушения симметрии: по значкам поперечная часть функции F может иметь вид лишь $F_n \sim P_{nk}(\mathbf{k}) a_k$ с неким постоянным вектором $\mathbf{a}$, нарушающим вращательную инвариантность решения. Тогда из уравнения (13) следует заключить, что при малых импульсах $v_{\text{st}}(\mathbf{p}) = \text{const} \cdot P_{ij}(\mathbf{p}) a_j$.

Рассмотрим поведение уравнения (12) в области $p \gg \Lambda$. В этом случае уравнение принимает вид

$$P_{ij}(\mathbf{p}) f_j(\mathbf{p}) = g^2 P_{ij}(\mathbf{p}) \int d\mathbf{k} P_{lm}(\mathbf{p}) f_m(\mathbf{p}) [P_{ln}(\mathbf{k}) k_j + P_{jn}(\mathbf{k}) k_l] F_n(\mathbf{k}) \quad (14)$$

и, как несложно установить, имеет лишь нулевое решение. Тем самым показано стремление к нулю $v_{\text{st}}(\mathbf{p})$ при больших p . Рассматривая первую поправку по Λ/p в (14), приходим к выводу, что асимптотическое решение существует, причем из симметричных и размерных соображений следует $v_{\text{st}}(\mathbf{p}) \sim P_{ij}(\mathbf{p}) a_j / (\Lambda^{1/2} p)$, при этом $g_{\text{st}} \sim 1/(\Lambda^2 \sqrt{N})$. Последнее равенство означает, что вклад N -го порядка теории возмущений в рассматриваемую асимптотику малых времен парной корреляционной функции пропорционален Λ^{2N} , что согласуется с оценками непосредственно в теории возмущений.

Таким образом, мы установили, что уравнение (12) приводит к конечному при больших и малых импульсах решению, сингулярности при конечных импульсах не

характерны для интегральных уравнений подобного вида. Проведенный анализ является весомым аргументом в пользу существования решения уравнения. Из самого факта существования решения, вследствие указанной зависимости g_{st} от N , следует конечный радиус сходимости рядов теории возмущений для парной корреляционной функции в асимптотике малых времен.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-02-00125а).

Список литературы

- [1] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, International Series of Monographs on Physics, **77**, Oxford Univ. Press, New York, 1996.
- [2] A. Yu. Andreanov, M. V. Komarova, M. Yu. Nalimov, *J. Phys. A*, **39**:25 (2006), 7801–7813, arXiv: nlin/0410058.
- [3] J. Andreanov, J. Honkonen, M. Komarova, M. Nalimov, *J. Phys. A*, **39**:25 (2006), 7815–7824.
- [4] А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1998.
- [5] S. A. Orszag, V. Yakhot, *J. Sci. Comput.*, **14**:2 (1999), 147–195.
- [6] P. C. Martin, E. D. Siggia, H. A. Rose, *Phys. Rev. A*, **8**:1 (1973), 423–437.
- [7] V. G. Makhankov, *Phys. Lett. A*, **61**:7 (1977), 431–432.
- [8] Л. Н. Липатов, *ЖЭТФ*, **72**:2 (1977), 411–427.
- [9] И. С. Кремнев, М. Ю. Налимов, В. А. Сергеев, *Вестн. СПбГУ. Сер. 4: Физика, химия*, **4** (2007), 30–36.
- [10] G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev, A. Migdal, *Phys. Rev. E*, **54**:5 (1996), 4896–4907.