Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ц. Аджемян, М. В. Компаниец, Ренормгруппа и ε -разложение: представление β -функции и аномальных размерностей несингулярными интегралами, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 1, 100–111

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6712>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:56:33

© 2011 г.

Л. Ц. Аджемян*, М. В. Компаниец*

РЕНОРМГРУППА И ε -РАЗЛОЖЕНИЕ: ПРЕДСТАВЛЕНИЕ β -ФУНКЦИИ И АНОМАЛЬНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ НЕСИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

В рамках ренормгруппы и ε -разложения предложены удобные для численных расчетов выражения для β -функции и аномальных размерностей через ренормированные 1-неприводимые функции. Выбрана схема ренормировки, в которой вычисляемые величины с использованием R -операции представлены интегралами, не содержащими особенностей по ε . Создана полностью автоматизированная система расчета, начинающегося с построения диаграмм, нахождения существенных подграфов, комбинаторных коэффициентов и т. д., вплоть до определения критических показателей. В качестве примера вычислены критические индексы модели φ^3 в порядке ε^4 .

Ключевые слова: ренормализационная группа, ε -разложение, многопетлевые диаграммы, критические показатели.

1. ВВЕДЕНИЕ

Аналитические расчеты критических показателей в моделях критического поведения методом ренормализационной группы (РГ) и ε -разложения сталкиваются в старших порядках теории возмущений с существенными трудностями [1]. Это наиболее сильно проявляется в моделях критической динамики, где точность расчета даже в наиболее простой, так называемой модели А, до последнего времени ограничивалась трехпетлевым приближением [2].

Результаты РГ-расчетов с использованием ε -разложения существенно отстают от соответствующих расчетов в “реальном пространстве”, в которых не стоит проблема вычисления сингулярных по ε констант ренормировки и основная задача заключается в вычислении конечных интегралов высокой кратности, которую можно решать численно. В настоящей работе мы поставили цель найти такую реализацию РГ-подхода с использованием ε -разложения, в которой задача также сводилась бы к вычислению конечных интегралов и весь процесс расчета можно было бы автоматизировать.

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: Loran.Adzhemyan@pobox.spbu.ru, mkompan@gmail.com

Для решения этой задачи важно выбрать наиболее удобную схему ренормировки. Мы будем использовать реализацию процедуры ренормировки в терминах R -операции, в которой ренормированные величины записываются в виде [3]

$$\Gamma^R = R\Gamma = (1 - K)R'\Gamma, \quad (1)$$

где R' – неполная R -операция, устраняющая расходимости в подграфах диаграмм, операция $(1 - K)$ устраняет остающуюся поверхностную расходимость. Выбор операции K (выделение расходящейся части) неоднозначен, в схеме минимальных вычитаний (MS) выделяются только полюсы по ε , в схеме вычитаний на нулевых импульсах (NM) – отрезок ряда по импульсу, длина которого определяется размерностью подграфа. Конечный продукт – критические показатели в форме ε -разложения – не зависит от схемы ренормировки.

Схема MS удобна для аналитических вычислений, для численных расчетов более удобна схема NM. Операцию вычитания $(1 - K)$ в этой схеме можно, используя известную формулу для вычитания из функции $F(k)$ первых n членов ее ряда Тейлора, записать в виде

$$(1 - K)F(k) = F(k) - \sum_{m=0}^n \frac{k^m}{m!} F^{(m)} \Big|_{k=0} = \frac{1}{n!} \int_0^1 da (1 - a)^n \partial_a^{n+1} F(ak). \quad (2)$$

Учитывая, что в схеме NM вычитается начальный отрезок ряда по импульсу, мы получаем следующее представление для действия R -операции [4]:

$$R\chi = \left(\prod_i \left(\frac{1}{n_i!} \int_0^1 da_i (1 - a_i)^{n_i} \partial_{a_i}^{n_i+1} \right) \right) \chi(\{a\}), \quad (3)$$

где произведение берется по всем существенным подграфам χ_i (включая диаграмму χ как целое) с канонической размерностью $n_i \geq 0$, a_i – параметр растяжения внутри i -го подграфа импульсов, втекающих в этот подграф. Преимущество такой записи ренормированных величин в том, что ответ представляется в виде интегралов, конечных при $\varepsilon = 0$, причем в форме, в которой не происходит сокращения больших вкладов в подынтегральном выражении (“теория без расходимостей” [4]).

Нашей задачей является расчет РГ-функций (β -функции и аномальных размерностей), определяющих в виде ε -разложения критические индексы модели. Эти функции имеют наиболее простой вид в схемах с “примитивными” вычитаниями, в которых контрчлены являются полиномами по импульсам и массам, а РГ-функции от масс не зависят (например, схема MS) [3]. Схема NM не является примитивной, но становится таковой после небольшой модификации, при этом в полученной схеме сохраняется возможность записи интересующих нас величин в удобной для расчета форме (3).

2. ВЫБОР СХЕМЫ РЕНОРМИРОВКИ

Рассмотрим решение поставленной задачи на примере теории φ^3 в пространстве размерности $d = 6 - \varepsilon$. Ренормированное действие этой теории дается выражением

$$S = -\frac{1}{2}(m^2 Z_1 + p^2 Z_2 + \delta m^2)\varphi^2 - \frac{1}{6}g\mu^{\varepsilon/2}Z_3\varphi^3, \quad (4)$$

которое можно записать в виде

$$S = S_B + \delta S, \quad (5)$$

где

$$S_B = -\frac{1}{2}(m^2 + p^2)\varphi^2 - \frac{1}{6}g\mu^{\varepsilon/2}\varphi^3 \quad (6)$$

– базовое действие,

$$\delta S = -\frac{1}{2}(m^2\delta Z_1 + p^2\delta Z_2 + \delta m^2)\varphi^2 - \frac{1}{6}g\mu^{\varepsilon/2}\delta Z_3\varphi^3 \quad (7)$$

– контрчлены. Поверхностные УФ-расходимости при $\varepsilon = 0$ присутствуют в диаграммах 1-неприводимых функций $\Gamma_2 = \langle \varphi\varphi \rangle_{1\text{-ir}}$ и $\Gamma_3 = \langle \varphi\varphi\varphi \rangle_{1\text{-ir}}$, имеющих квадратичную и логарифмическую поверхностную расходимости соответственно. Контрчлены $\delta Z_i = Z_i - 1$, $i = 1, 2, 3$, и δm^2 призваны сократить эти расходимости в каждом порядке теории возмущений по константе связи g . Константы ренормировки Z_1 , Z_2 , Z_3 связаны соотношениями

$$Z_1 = Z_{m^2}Z_\varphi^2, \quad Z_2 = Z_\varphi^2, \quad Z_3 = Z_gZ_\varphi^3 \quad (8)$$

с константами ренормировки затравочных параметров m_0^2 , g_0 и поля φ_0

$$m_0^2 = m^2Z_{m^2}, \quad g_0 = g\mu^{\varepsilon/2}Z_g, \quad \varphi_0 = \varphi Z_\varphi. \quad (9)$$

Учет контрчленов (7) можно заменить действием R -операции (1) на диаграммы базовой теории с действием (6). Конкретная схема ренормировки определяется заданием операции K отбора расходящихся частей 1-неприводимых диаграмм. Мы приведем сначала определение этой операции в схеме NM, а затем перейдем от нее к используемой нами схеме.

В схеме NM операция K определяется равенствами

$$K\Gamma_3 = \mathcal{K}_0\Gamma_3, \quad \mathcal{K}_0f(\{p\}) \equiv f|_{\{p=0\}} \quad (\text{NM}), \quad (10)$$

$$K\Gamma_2 = (\mathcal{K}_0 + p^2\mathcal{K}_2)\Gamma_2, \quad \mathcal{K}_2f \equiv (\partial_{p^2}f)|_{p=0} \quad (\text{NM}), \quad (11)$$

т. е. выделяется начальный отрезок ряда по импульсу, длина которого определяется размерностью диаграммы. Это соответствует следующим условиям для ренормированных функций:

$$\mathcal{K}_0R\Gamma_2 = -m^2, \quad \mathcal{K}_2R\Gamma_2 = -1, \quad \mathcal{K}_0R\Gamma_3 = -g\mu^{\varepsilon/2}. \quad (12)$$

За выполнение второго и третьего условий ответственны контрчлены $-p^2\delta Z_2\varphi^2/2$ и $-g\mu^{\varepsilon/2}\delta Z_3\varphi^3/6$ из (7) соответственно. За выполнение первого условия ответственны контрчлены¹⁾ $-\delta m^2\varphi^2/2$ и $-\delta Z_1\varphi^2/2$. Первый из них обеспечивает выполнение равенства при $m = 0$, т. е. условия

$$\mathcal{K}_0R\Gamma_2|_{m=0} = 0, \quad (13)$$

¹⁾ Величина δm^2 интерпретируется в статистической физике как сдвиг критической температуры.

и устраняет из теории Λ -расходимости [3] (Λ – параметр УФ-обрезания). С учетом (13) условие $\mathcal{K}_0 R\Gamma_2 = -m^2$ записывается в виде требования

$$\mathcal{K}_0 R(\Gamma_2 - \Gamma_2|_{m=0}) = -m^2, \quad (14)$$

определяющего контрчлен $-\delta Z_1 \varphi^2/2$. Благодаря наличию вычитания в (14) Λ -обрезание при вычислении этого контрчлена можно снять, его роль сводится после этого к устранению возникающих полюсов по ε .

Константы ренормировки удобно записывать в терминах нормированных функций

$$\bar{\Gamma}_2 = -\mathcal{K}_2 \Gamma_2, \quad \bar{\Gamma}_{2,m} = -\mathcal{K}_0 \left(\frac{\Gamma_2 - \Gamma_2|_{m=0}}{m^2} \right), \quad \bar{\Gamma}_3 = -\frac{\mathcal{K}_0 \Gamma_3}{g\mu^{\varepsilon/2}}, \quad (15)$$

удовлетворяющих согласно (12), (14) условиям

$$\mathcal{K}_0 R\bar{\Gamma}_i = 1, \quad i = 1, 2, 3, \quad (16)$$

где под $\bar{\Gamma}_1$ будем понимать $\bar{\Gamma}_{2,m}$. В терминах $\bar{\Gamma}_i$ константы ренормировки имеют единообразный вид:

$$Z_i = 1 - KR'\bar{\Gamma}_i = 1 - R'\bar{\Gamma}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17)$$

Второе равенство в (17) – следствие того, что мы включили операцию K в определение величин $\bar{\Gamma}_i$ (см. приложение А).

Мы выберем схему ренормировки, отвечающую прежним условиям (13), (16), но взятым в точке нормировки $m = \mu$ (назовем эту схему NP):

$$\mathcal{K}_0 R\bar{\Gamma}_i|_{m=\mu} = 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{NP}). \quad (18)$$

Константы ренормировки будут тогда иметь вид (17) с $m = \mu$:

$$Z_i = 1 - \mathcal{K}_0 R'\bar{\Gamma}_i|_{m=\mu}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{NP}). \quad (19)$$

Контрчленам (7) с такими Z_i соответствует операция K вида

$$K\Gamma_3 = \mathcal{K}_0 \Gamma_3|_{m=\mu} \quad (\text{NP}), \quad (20)$$

$$K\Gamma_2 = \mathcal{K}_0 \left[\Gamma_2|_{m=0} + \frac{m^2}{\mu^2} (\Gamma_2|_{m=\mu} - \Gamma_2|_{m=0}) \right] + p^2 \mathcal{K}_2 \Gamma_2|_{m=\mu}. \quad (21)$$

При вычислении констант ренормировок условие $m = \mu$ в (19) упрощает операцию (21),

$$K\Gamma_2|_{m=\mu} = \mathcal{K}_0 \Gamma_2|_{m=\mu} + p^2 \mathcal{K}_2 \Gamma_2|_{m=\mu}, \quad (22)$$

так что обе операции (20), (22) сводятся к вычитанию на нулевых импульсах (10), (11) при $m = \mu$, как и предполагалось в (19).

Схемы NM и NP отличаются лишь конечной перенормировкой параметров g , m^2 и констант ренормировки Z_i , что обусловлено связью между вычетами в старших полюсах констант ренормировок и в первом полюсе – той же самой связью, которая обеспечивает УФ-конечность ренормгрупповых функций. Значения критических показателей в обеих схемах совпадают.

3. СХЕМА РАСЧЕТА КОНСТАНТ РЕНОРМИРОВОК

В этом разделе мы рассмотрим константы ренормировки Z_2 , Z_3 , определяющие β -функцию и аномальную размерность поля. Техника вычисления константы Z_1 обсуждается в приложении Б. Предлагаемый способ расчета годится в равной степени для обеих схем ренормировки NM и NP, однако в схеме NP окончательный результат формулируется значительно проще.

Разложение констант ренормировки (17) в ряд теории возмущений в схеме NM имеет вид

$$Z_i = 1 - R'\bar{\Gamma}_i = 1 - \sum_n u^n \mu^{n\varepsilon} R'\bar{\Gamma}_i^{(n)}(m^2), \quad i = 1, 2, 3, \quad u \equiv \frac{S_d g^2}{(2\pi)^d} \quad (\text{NM}), \quad (23)$$

где введен естественный для теории (4) заряд $u \sim g^2$, S_d – площадь d -мерной сферы единичного радиуса. Коэффициенты ряда $R'\bar{\Gamma}_i^{(n)}$ в (23) являются однородными функциями m^2 ,

$$R'\bar{\Gamma}_i^{(n)}(m^2) = m^{-n\varepsilon} R'\bar{\Gamma}_i^{(n)}|_{m \rightarrow 1}, \quad (24)$$

поэтому можно записать

$$R'\bar{\Gamma}_i = \sum_n u^n \left(\frac{\mu}{m} \right)^{n\varepsilon} R'\bar{\Gamma}_i^{(n)} \Big|_{m \rightarrow 1}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (25)$$

При использовании схемы NP в (25) следует положить $\mu/m = 1$, так что константы ренормировки зависят только от заряда u :

$$Z_i = 1 - \sum_n Z_i^{(n)} u^n, \quad Z_i^{(n)} = R'\bar{\Gamma}_i^{(n)}|_{m \rightarrow 1}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{NP}). \quad (26)$$

Задача состоит в вычислении величин $R'\bar{\Gamma}_i^{(n)}$, для которых мы хотим получить представление через интегралы, свободные от расходимостей. Воспользовавшись (24), для $\bar{\Gamma}_i^{(n)}$ можно написать очевидное равенство:

$$R'\bar{\Gamma}_i^{(n)} = -\frac{2}{n\varepsilon} m^2 \partial_{m^2} R'\bar{\Gamma}_i^{(n)}. \quad (27)$$

Вводя операцию $\hat{\partial}_{m^2} f \equiv (\partial_{m^2} f)|_{m \rightarrow 1}$, из (26) и (3) получаем соотношение

$$Z_i^{(n)} = -\frac{2}{n\varepsilon} \hat{\partial}_{m^2} R'\bar{\Gamma}_i^{(n)}, \quad (28)$$

позволяющее в явном виде выделить в $Z_i^{(n)}$ один полюс по ε . Однако оставшееся выражение также содержит полюсы. Их не было бы, если бы операция дифференцирования коммутировала с R' -операцией – операция $\hat{\partial}_{m^2}$, действуя на линии диаграмм, снимает поверхностную расходимость величин $\bar{\Gamma}_i^{(n)}$, последующее действие R' -операции убирает расходимости в подграфах, так что величина

$$-R'\hat{\partial}_{m^2} \bar{\Gamma}_i^{(n)} \equiv \mathcal{N}\bar{\Gamma}_i^{(n)} \quad (29)$$

является конечной при $\varepsilon = 0$ и ее можно записать в виде²⁾

$$\mathcal{N}\bar{\Gamma}_i^{(n)} = -R\hat{\partial}_{m^2}\bar{\Gamma}_i^{(n)}. \quad (30)$$

Выделяя эту величину в правой части (28), запишем

$$Z_i^{(n)} = \frac{2}{n\varepsilon}(\mathcal{N}\bar{\Gamma}_i^{(n)} - \mathcal{J}\bar{\Gamma}_i^{(n)}), \quad (31)$$

где

$$\mathcal{J}\bar{\Gamma}_i^{(n)} \equiv (\hat{\partial}_{m^2}R' - R'\hat{\partial}_{m^2})\bar{\Gamma}_i^{(n)}. \quad (32)$$

“Коммутатор” (32) отличен от нуля, так как дифференцирование линий диаграммы меняет структуру расходимостей в подграфах – продифференцированные вершинные подграфы становятся несущественными, а двухвостки – логарифмическими. Важно, что в коммутаторе (32) сокращаются все вклады, не содержащие контрчленов на подграфы (т.е. при замене R' на единицу). Это означает, что его действие на любую диаграмму χ , входящую в $\bar{\Gamma}_i^{(n)}$, сводится к сумме произведений диаграмм младшего порядка, результат удается компактно записать в виде

$$\mathcal{J}\chi = \sum_{\chi_\alpha \in \text{sub}(\chi)} R'\chi^{(\alpha)}(\mathcal{N}\chi_\alpha). \quad (33)$$

Здесь суммирование ведется по всевозможным существенным подграфам χ_α диаграммы χ , $\chi^{(\alpha)}$ – часть этой диаграммы, остающаяся после стягивания подграфа. Действие операции $\mathcal{N}$ на подграфы определяется в согласии с (29) соотношением

$$\mathcal{N}\chi_\alpha = -R\hat{\partial}_{m^2}\mathcal{K}_{n_\alpha}\chi_\alpha, \quad (34)$$

где $n_\alpha \equiv n_{\chi_\alpha}$ – размерность подграфа χ_α . Величина $\hat{\partial}_{m^2}\mathcal{K}_{n_\alpha}\chi_\alpha$ не имеет поверхностной расходимости, поэтому R -операция в (34), как и в (29), (30), сводится к R' -операции. Соотношение (33) доказывается методом индукции по числу петель.

Таким образом, для нахождения констант ренормировок Z_2 , Z_3 с помощью соотношений (26), (31), (30) и (33) на каждом шаге теории возмущений достаточно вычислять конечные величины вида (34): первое слагаемое с $\mathcal{N}\bar{\Gamma}_i^{(n)}$ в правой части (31) определяется конечными диаграммами для всех n , второе слагаемое для однопетлевых диаграмм, не имеющих подграфов, отсутствует, для двухпетлевых диаграмм это слагаемое определяется согласно (33) конечными величинами $\mathcal{N}\chi_\alpha$ и однопетлевыми диаграммами $\chi^{(\alpha)}$, вычисляемыми согласно вышесказанному, и т. д. Для операции R в (34) можно использовать соотношение (3), которое позволяет представить величину (34) в виде сходящегося интеграла, допускающего численный расчет.

Отметим, что диаграммы $\chi^{(\alpha)}$, получающиеся после стягивания вершинных подграфов χ_α , непосредственно совпадают с рассчитанными на предыдущих шагах теории возмущений, а диаграммы, возникающие после стягивания двухвостых подграфов, включают дополнительную вставку в линию с множителем k^2 . Их также можно свести к ранее сосчитанным, мы не приводим получающийся результат для констант ренормировок, поскольку ответ выглядит намного проще для представляющих непосредственный интерес РГ-функций.

²⁾Это утверждение справедливо для функций $\bar{\Gamma}_2^{(n)}$ и $\bar{\Gamma}_3^{(n)}$, но не для $\bar{\Gamma}_{2,m}^{(n)}$, в которой зависимость от m^2 присутствует не только в линиях. Поэтому в дальнейшем всюду $i = 2, 3$.

4. РЕНОРМГРУППОВЫЕ ФУНКЦИИ

Константы ренормировки в схеме NP, как и в схеме MS, зависят только от безразмерного заряда g (и от размерности пространства). Поэтому вид уравнений ренормгруппы, выводимых на основе произвольности ренормировочной массы μ [3], и связь РГ-функций с константами ренормировки в этих схемах совпадают. В число РГ-функций входит β -функция

$$\beta = -g \left(\frac{\varepsilon}{2} + \gamma_g \right) \quad (35)$$

и γ -функции, сопоставляемые каждой константе ренормировки Z_i соотношением

$$\gamma_i = \beta \partial_g \ln Z_i, \quad (36)$$

в частности

$$\gamma_g = \beta \partial_g \ln Z_g. \quad (37)$$

Из (35)–(37) следует

$$\beta = -\frac{g\varepsilon}{2} \frac{1}{1 + g\partial_g \ln Z_g}, \quad (38)$$

$$\gamma_i = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{g\partial_g \ln Z_i}{1 + g\partial_g \ln Z_g}. \quad (39)$$

Определяемые сингулярными по ε константами ренормировки РГ-функции не содержат полюсов по ε : их сокращение в (38), (39) для перенормируемых моделей гарантируется теорией ренормировок. Подтверждение сокращения полюсов в конкретных расчетах является обычно косвенной проверкой их правильности. Интересно отметить, что в нашем случае, после подстановки соотношений (23), (31), (33) в (39) и разложения результата по константе связи, сокращение полюсов происходит на аналитическом уровне, без вычисления диаграмм, что снимает проблему приближенного сокращения старших полюсов при численных расчетах. Ответ имеет простой вид:

$$\gamma_2 = \frac{2f_2}{1 + f_2}, \quad \gamma_3 = \frac{2f_3}{1 + f_2}, \quad (40)$$

где

$$f_i = -R(m^2 \partial_{m^2} \bar{\Gamma}_i) \big|_{m=\mu}, \quad i = 2, 3. \quad (41)$$

Соотношения (40), (41) позволяют вычислять РГ-функции по диаграммам 1-неприводимых функций, приведенным к сходящимся интегралам. Такое представление удобно для численных расчетов, которые достаточно просто автоматизировать.

Справедливость соотношений (40), (41) проверена нами в четырехпетлевом приближении, его доказательство в общем виде требует решения довольно сложной комбинаторной задачи. Использование уравнений РГ позволяет получить весьма схожее, но менее удобное представление РГ-функций через ренормированные 1-неприводимые функции, мы приводим его для сравнения в приложении В.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Соотношения (40), (41) являются основным результатом работы. На их основе реализована автоматизированная программа расчета критических показателей. Для построения диаграмм использована программа `grc` из пакета `GRACE` [5], к которой нами была добавлена программа нахождения существенных подграфов. Для каждой диаграммы, необходимой для расчета величин (41) с использованием для R -операции представления (3), генерировалось соответствующее подынтегральное выражение (пример его построения приведен в приложении Г). Расчет интегралов проводился методом Монте-Карло [6]. Для вычисления импульсных интегралов использовалась как сферическая d -мерная система координат, так и фейнмановское представление.

Аномальные размерности γ_2 и γ_3 вычислены в четырехпетлевом приближении (потребовалось рассчитать 204 диаграммы), на их основе найдена β -функция (35) и определена координата неподвижной точки u_* с точностью до ε^4 включительно, а затем рассчитан критический показатель $\eta = \gamma_2|_{u=u_*}$,

$$\eta = -0.1111\varepsilon - 0.0588\varepsilon^2 + 0.0436\varepsilon^3 - 0.081\varepsilon^4 + O(\varepsilon^5). \quad (42)$$

Точность расчета интегралов составляла 10^{-4} . Полученный результат согласуется с данными трехпетлевого аналитического расчета [7], [8]:

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{\varepsilon}{9} - \frac{43\varepsilon^2}{36} + \varepsilon^3 \left(-\frac{8375}{22310} + \frac{16\zeta(3)}{3^5} \right) + O(\varepsilon^4) \approx \\ &\approx -0.1111\varepsilon - 0.05898\varepsilon^2 + 0.04369\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (43)$$

Проведенный расчет показал работоспособность предложенной схемы вычислений. В старших порядках теории возмущений ее возможности ограничиваются только временем счета и точностью вычисления многократных интегралов.

Примененная схема расчета допускает обобщение на модели критической динамики. Подобный расчет реализован в работе [9], в которой вычислен динамический критический индекс модели А в порядке ε^4 . Вычисления в работе [9] проводились на основе соотношения, сходного с (31), но аналоги соотношений (33), (40) и (41) получены не были.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Замечание к соотношению (17)

При получении соотношения (17) для $\bar{\Gamma}_2$ использована коммутативность операций R' и $\partial_{p^2}(\cdot)|_{p=0}$. При этом надо уточнить, как понимается действие R' -операции на продифференцированные по импульсу диаграммы. Зависимость диаграммы от p^2 возникает после выполнения интегрирования по всем внутренним импульсам, при дифференцировании же отдельных линий операцию ∂_{p^2} надо понимать как $\partial_p^2/2$. В результате возникает сумма вкладов, в которых имеются однократно и двукратно продифференцированные линии. Если такая линия стоит внутри вершинного подграфа, это делает его несущественным и R' -операция на него не действует. Если однократно продифференцированная линия стоит внутри двухвостого подграфа, его размерность уменьшается на единицу и операция вычитания K на такой подграф

принимает вид $K\chi = \mathcal{K}_1\chi$, где $\mathcal{K}_1 f(k) \equiv (\partial_k f)|_{k=0}$. Если внутри двухвостого подграфа окажутся две продифференцированные линии или одна дважды продифференцированная, то подграф становится логарифмическим и для него $K\chi = \mathcal{K}_0\chi$. Все эти случаи объединяются общим правилом: существенными являются подграфы χ_α с размерностью $n_\alpha \geq 0$, операция K для них имеет вид $K\chi = \mathcal{K}_{n_\alpha}\chi_\alpha$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Константа ренормировки Z_1

Ренормированному действию (4) отвечает УФ-конечный производящий функционал

$$G(A) = C^{-1} \int e^{S+A\varphi} D\varphi, \quad C = \int e^S D\varphi. \quad (44)$$

Конечной является также и его производная по m^2

$$\partial_{m^2} G(A) = -\frac{1}{2} Z_1 C^{-1} \int (\varphi^2 - \langle \varphi^2 \rangle) e^{S+A\varphi} D\varphi. \quad (45)$$

Определяя составной оператор ϕ равенством $\phi \equiv \varphi^2$ и вводя его ренормированный аналог $\phi_R = Z_\phi \varphi^2$, перепишем (45) в виде

$$\partial_{m^2} G(A) = -\frac{1}{2} Z_1 Z_\phi^{-1} C^{-1} \int (\phi_R - \langle \phi_R \rangle) e^{S+A\varphi} D\varphi. \quad (46)$$

Интеграл в правой части этого равенства УФ-конечен, это означает УФ-конечность произведения³⁾ $Z_1 Z_\phi^{-1} \equiv Z_f$. Конечность величины Z_f приводит к тому, что соответствующая РГ-функция $\gamma_f = \beta \partial_g \ln Z_f$ обращается в нуль в неподвижной точке $\beta(u_*) = 0$ (несингулярная функция $\partial_g \ln Z_f(u)$ не может иметь полюса в точке $u = u_* = O(\varepsilon)$ в рамках ε -разложения). Следовательно, для аномальных размерностей $\gamma^* \equiv \gamma|_{u=u_*}$ имеем $\gamma_1^* = \gamma_\phi^*$, так что аномальную размерность γ_1^* можно найти, вычисляя константу ренормировки Z_ϕ . Диаграммы, определяющие эту константу, являются логарифмическими, и для их вычисления можно воспользоваться соотношениями, аналогичными (26), (31). Отметим также, что непосредственно в модели (4) величина γ_1^* выражается через γ_2^* и γ_3^* , необходимость ее независимого расчета возникает только в обобщениях модели φ^3 [8].

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Выражение РГ-функций через ренормированные 1-неприводимые функции с помощью уравнений РГ

Наиболее прямой способ выразить РГ-функции через ренормированные 1-неприводимые функции состоит в использовании уравнений РГ. Эти уравнения для функций $\Gamma_n^R = R\Gamma_n$ имеют вид [3]

$$(\mu \partial_\mu + \beta \partial_g - \gamma_{m^2} m^2 \partial_{m^2}) \Gamma_n^R = n \gamma_\varphi \Gamma_n^R. \quad (47)$$

Для нормированных функций (15) из (47) получаем

$$(\mu \partial_\mu + \beta \partial_g - \gamma_{m^2} m^2 \partial_{m^2} - \gamma_i) \bar{\Gamma}_i^R = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (48)$$

³⁾В рамках схемы MS это означает равенство констант ренормировок Z_1 и Z_ϕ , т. е. $Z_f = 1$ [3].

где $\gamma_1 = \gamma_{m^2} + 2\gamma_\varphi$, $\gamma_2 = 2\gamma_\varphi$, $\gamma_3 = \gamma_g + 3\gamma_\varphi$. Перейдем в (48) к точке нормировки $m = \mu$. При любом g согласно (18) имеем $\bar{\Gamma}_i^R|_{m=\mu} = 1$, откуда $\partial_g \bar{\Gamma}_i^R|_{m=\mu} = 0$. Учитывая, что безразмерные функции $\bar{\Gamma}_i^R$ зависят от отношения μ^2/m^2 , находим $\mu \partial_\mu \bar{\Gamma}_i^R = -2m^2 \partial_{m^2} \bar{\Gamma}_i^R$. Вводя обозначение $F_i = -(m^2 \partial_{m^2} \bar{\Gamma}_i^R)|_{m=\mu}$, из (48) получаем

$$(2 + \gamma_1 - \gamma_2)F_i = \gamma_i, \quad F_i = -(m^2 \partial_{m^2} \bar{\Gamma}_i^R)|_{m=\mu}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (49)$$

Из системы уравнений (49) находим

$$\gamma_i = \frac{2F_i}{1 + F_2 - F_1}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (50)$$

Эти соотношения, схожие по форме с (40), также позволяют выразить РГ-функции через ренормированные 1-неприводимые функции. Отличие состоит в порядке применения R -операции и дифференцирования $\partial_{m^2}(\cdot)|_{m=\mu}$ в функциях f_i и F_i . Для f_i из (41) R -операция действует на продифференцированную диаграмму, в которой уже положено $m = \mu$, поэтому операция K имеет простой вид (22), позволяющий воспользоваться для R -операции конструктивным представлением (3). Для F_i из (49) необходимо сначала продифференцировать ренормированную диаграмму, в которой операция K дается выражением (21), и лишь затем перейти в точку нормировки $m = \mu$, использование представления (3) в этом случае невозможно.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Пример расчета величины $\mathcal{N}_\chi = -R\hat{\partial}_{m^2}\mathcal{K}_{n_\chi}\chi$

Рассмотрим в качестве χ четырехпетлевую вершинную диаграмму

Эта диаграмма имеет размерность $n_\chi = 0$, поэтому действие на нее оператора $\mathcal{K}_{n_\chi} = \mathcal{K}_0$ сводится к тому, что внешние импульсы диаграммы надо положить равными нулю. Диаграмма имеет три существенных подграфа: вершинные $\{6, 7, 8\}$ и $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ с размерностями $n_1 = n_2 = 0$ и двухвосты $\{2, 3\}$ с размерностью $n_3 = 2$.

Действие операции $-\hat{\partial}_{m^2}$ на линию $G(k) = 1/(k^2 + m^2)$ дает $1/(k^2 + 1)^2$, т.е. сводится к вставке точки (единичной вершины) в линию. Действие этой операции на диаграмму дает сумму вкладов со всевозможными вставками точки:

В первой из этих диаграмм точка стоит вне существенных подграфов, и все они остаются существенными. Во второй диаграмме точка стоит внутри вершинного подграфа $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ и делает его несущественным ($n_2 \rightarrow -2$). В третьей диаграмме становятся несущественными оба вершинных подграфа ($n_1 \rightarrow -2, n_2 \rightarrow -2$), в четвертой – точка стоит внутри двухвостого подграфа $\{2, 3\}$ и превращает его в логарифмический ($n_3 \rightarrow 0$).

Следующий шаг при вычислении величины $\mathcal{N}\chi = -R\hat{\partial}_{m^2}\mathcal{K}_{n_\chi}\chi$ – действия на полученные диаграммы R -операцией согласно (3) – должен осуществляться с учетом этих изменений. Рассмотрим построение R -операции на примере первой диаграммы χ_1 в (52). Расставим некоторым образом импульсы интегрирования и сделаем растяжения импульсов, втекающих в существенные подграфы:

Выбранной расстановке импульсов соответствует следующая функция $\chi_1(\{a\})$ в (3):

$$\chi_1^{-1}(\{a\}, \{\mathbf{k}\}) = (k_1^2 + 1)^5 (k_2^2 + 1) (k_3^2 + 1)^2 (k_4^2 + 1) [(a_1 a_2 \mathbf{k}_1 + a_2 \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)^2 + 1] \times \\ \times [(a_3 \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2 + 1] [(a_1 \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3)^2 + 1] [a_2 (\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)^2 + 1].$$

Учитывая размерности подграфов n_i , из (3) получаем окончательно

$$R\chi_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 da_1 \partial_{a_1} \int_0^1 da_2 \partial_{a_2} \int_0^1 da_3 (1 - a_3)^2 \partial_{a_3}^3 \int d\{\mathbf{k}\} \chi_1(\{a\}, \{\mathbf{k}\}).$$

Благодарности. Авторы благодарны Д. И. Казакову, Н. В. Антонову за полезные обсуждения и С. В. Новикову за помощь в реализации ряда алгоритмов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-02-00125_a).

Список литературы

- [1] H. Kleinert, V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of φ^4 -Theories*, Word Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.
- [2] Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, *ТМФ*, **60**:1 (1984), 59–71.
- [3] А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1998.

- [4] О. И. Завьялов, *Перенормированные диаграммы Фейнмана*, Наука, М., 1979.
- [5] Т. Kaneko, “grc (Feynman graph generator)”, *GRACE System*, <http://minami-home.kek.jp/>.
- [6] R. Kreckel, *Comp. Phys. Commun.*, **106**:3 (1997), 258–266;
<ftp://ftpthep.physik.uni-mainz.de/pub/pvegas/>; *Cuba – a library for multidimensional numerical integration*, <http://www.feynarts.de/cuba/>.
- [7] O. F. de Alcantara Bonfim, J. E. Kirkham, A. J. McKane, *J. Phys A*, **13**:7 (1980), L247–L251.
- [8] O. F. de Alcantara Bonfim, J. E. Kirkham, A. J. McKane, *J. Phys A*, **14**:9 (1981), 2391–2413.
- [9] Л. Ц. Аджемян, С. Н. Новиков, Л. Сладкофф, *Вестн. СПбГУ. Сер. 4: Физика, химия*, 2008, № 4, 110–114.